

## الفصل السابع

### التمثيل المطابق Conformal Mapping

١ - إذا كان  $f(z)$  تابعاً هولومورفياً في ساحة  $D$  من مستوي المتحول العقدي  $z$  وإذا كانت الساحة  $\Delta$  صورة  $D$  وفق التمثيل (التطبيق)  $f(z)$  فعندئذ تكون صورة شكل لا متناه في الصغر تقع فيه،  $z_0$  (نقطة من  $D$ ) هو شكل لا متناه في الصغر تقع فيه النقطة  $w_0 = f(z_0)$  يشابه على التقريب الشكل، الأول وتساري نسبة التشابه، على التقريب  $f'(z_0)$  وتكون الزاوية التي يصنعها أي مسحين متقاطعين في  $z_0$  مساوية بالقيمة المطلقة والاشارة للزاوية المقابلة في  $w_0$  شريطة أن يكون  $f'(z_0) \neq 0$ . وبالعكس إذا كان التابعان  $P(x, y)$ ،  $Q(x, y)$  مستمرين ومشتقاتها الجزئية الأولى وإذا حفظ التمثيل :

$$w = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

الزوايا في النقطة  $(x, y)$  فان التابع  $f(z)$  تخيلي في هذه النقطة .

٢ - إذا كان التابع  $w = f(z)$  هولومورفياً في ساحة مفارقة  $B$  محيطها الطريق  $L$  وإذا كانت صورة  $L$  في المستوي  $w$  هي الطريق المغلق  $L_1$  الخالي من النقط المضاعفة فعندئذ نرى أنه عندما ترسم  $z$  الطريق  $L$  في الاتجاه الموجب ترسم  $w$  الطريق  $L_1$  في الاتجاه الموجب كذلك ، والتابع  $f(z)$  ينقل الساحة  $B$  إلى الساحة  $B_1$  المحدودة بالطريق  $L_1$  .

٣ - إذا كان  $f(z)$  تقابلاً هولومورفياً في الساحة  $B$  وكان  $L$  منحنيًا ما في هذه الساحة و  $\varphi(s)$  تابعاً معرفاً على  $L$  فعندئذ يكون :

$$\int_L \varphi(s) ds = \int_{L_1} \varphi(s_1) |F'(w)| ds_1$$

حيث  $F'(w) = \frac{1}{F'(z)}$  مشتق التابع العكسي  $z = F(w)$  وحيث

$l_1$  صورة المنحنى  $l$  في المستوي  $w$  ، و  $s_1$  القوس على  $l_1$  المقابل لـ  $l$  على  $s$  ويكون دستور تحويل التكامل المضاعف هو :

$$\iint_B \varphi(z) d\sigma = \iint_{B_1} \varphi_1(w) |F'(w)|^2 d\sigma_1$$

٤ - نقول عن تمثيل مطابق انه من النوع الثاني إذا بقيت فيه قياسات الزوايا

مصانة على ان تتغير اشارتها ، مثال ذلك التمثيل  $w = \bar{z}$  .

٥ - ان التمثيل المعين بالتابع الخطي الصحيح :

$$w = az + b \quad (1)$$

(  $a, b$  عددان عقديان ثابتان و  $a \neq 0$  ) يحافظ في مستوي التحويل العقدي

$z$  كله كما أنه تطبيق واحد إلى واحد على المستوي  $w$  ، وينقل بوجه عام كل

نقطة  $z$  إلى النقطة المقابلة  $w$  بواسطة انسحاب ودوران ونحاك . وبشكل خاص

تنقل  $z$  إلى  $w$  بانسحاب شعاعه  $b$  إذا كان  $w = z + b$  وبدوران حول مبدأ

الاحداثيات زاويته  $\alpha$  إذا كان  $w = e^{i\alpha} z$  وبتحريك مركزه  $o$  ونسبته  $q$  إذا كان

$w = qz$  (  $q$  عدد حقيقي موجب ) .

٦ - إن التابع الخطي العام :

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2)$$

(  $d, c, b, a$  أعداد عقيدية ثابتة و  $ad - bc \neq 0$  ) ينقل المستوي  $z$

كله إلى المستوي  $w$  كله ( بما في ذلك نقطة اللانهاية ) كما انه ينقل الدوائر إلى

دوائر ( على أن نفهم من لفظة الدوائر هنا الدوائر بمعناها المألوف بالإضافة إلى

المستقيمت ) وينقل الساحة التي تقع على يمين متحرك على دائرة في المستوي  $z$  إلى

الساحة التي تقع على يمين المقابل له في المستوي  $w$  والساحة التي تقع على يسار

الأول إلى الساحة التي تقع على يسار الثاني .

إن التمثيل الخطي العام الوحيد الذي ينقل ثلاث نقط مفروضة  $z_1, z_2, z_3$

من المستوي  $z$  إلى ثلاث نقط مفروضة  $w_1, w_2, w_3$  من المستوي  $w$  هو :

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (3)$$

وإن التمثيل :

$$w = \frac{a z + b}{c z + d} \quad (4)$$

ينقل نصف المستوى العلوي إلى نفسه شريطة أن تكون  $d, c, b, a$  حقيقية وإن يكون  $ad - bc < 0$  ، والتمثيل :

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{\beta z - 1} \quad (5)$$

(  $\alpha$  عدد حقيقي كفي و  $\beta$  نقطة كيفية ضمن دائرة الوحدة ) ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها ، والتمثيل :

$$w = \frac{z - i}{z' + i} \quad (6)$$

ينقل نصف المستوى العلوي إلى دائرة الوحدة .

إن جداء كل تمثيلين خطيين ( أي التمثيل الناتج عن اجرائها الواحد بعد الآخر وفق ترتيب معين ) هو كذلك تمثيل خطي ، وتنصف عملية الجداء هذه بكونها تجميعية ، غير أنها ليست تبديلية . وإذا أضفنا لذلك أن لكل تمثيل خطي  $L$  نظير  $L^{-1}$  وأنه يوجد تمثيل واحد  $U(z)$  بالنسبة لعملية الجداء هذه نرى أن مجموعة التمثيلات الخطية تؤلف زمرة .

v - إن التابع  $w = z^2$  ينقل المستوي  $z$  إلى مستويين  $w$  منطبقين على بعضها وينقل الجزء الواقع داخل الفرع الأيمن من القطع الزائد  $x^2 - y^2 = c$  إلى نصف المستوي  $R w \geq c$  ، والتابع  $w = \sqrt{z}$  ينقل جزء المستوي الواقع خارج القطع المكافئ  $y^2 = 4 c^2 (c^2 + x)$  إلى نصف المستوي  $(I) w \geq c$  والتابع  $w = \frac{k}{z} (z + \frac{1}{z})$  حيث  $k$  عدد موجب مفروض ، ينقل الدوائر في المستوي  $z$  إلى قطوع ناقصة في المستوي  $w$  وينقل المستقيمت إلى قطوع زائدة

والتابع  $w = e^z$  ينقل المستقيمت الموازية لمحور السينات إلى دوائر والمستقيمت الموازية لمحور العيينات إلى مستقيمت منبعثة من المبدأ .

٨ - دستور كريستوفل Christoffel : ان التمثيل المطابق :

$$z = A \int_0^1 (s - a_1)^{\alpha_1 - 1} (s - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (s - a_n)^{\alpha_n - 1} ds + B \quad (7)$$

(A , B ثابتان عقديان ) ينقل النصف العلوي من المستوي t إلى الساحة الواقعة داخل مضلع زواياه  $\alpha_k \pi$  في المستوي z وينقل رؤوس هذا المضلع إلى النقط  $a_k$  من المحور الحقيقي في المستوي t .  
وإذا فرضنا ان النقطة المقابلة لأحد رؤوس المضلع ، ولتكن  $a_n$  ، تقع في اللانهاية فعندئذ يأخذ الدستور السابق الشكل :

$$z = A \int_0^1 (s - a_1)^{\alpha_1 - 1} (s - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (s - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} ds + B \quad (8)$$

٩ - نظرية ريمان Riemann : إذا كانت B ساحة ما بسيطة الترابط في المستوي z ( نستثنى من ذلك الساحة التي تشمل المستوي كله بما في ذلك نقطة اللانهاية والساحة التي تشمل المستوي كله سوى نقطة وحيدة منه كنقطة اللانهاية مثلاً ) وإذا كانت  $z_0$  نقطة من B فعندئذ يوجد تابع واحد  $f(z)$  هولومورفي في B ينقل هذه الساحة إلى الساحة الواقعة داخل دائرة الوحدة ، وينقل  $z_0$  إلى مركز هذه الدائرة ويحقق الشرط  $f'(z_0) > 0$  . كذلك يتعين التابع  $f(z)$  تماماً ( إذا ضمنا استمراره حتى محيط الساحة B ) إذا اشترطنا فيه ان ينقل ثلاث نقط مفروضة على محيط الساحة B إلى ثلاث نقط مفروضة على محيط دائرة الوحدة أو إذا اشترطنا فيه ان ينقل النقطة  $z_0$  داخل الساحة B إلى نقطة مفروضة داخل دائرة الوحدة وان ينقل نقطة مفروضة على محيط الساحة B إلى نقطة مفروضة على محيط دائرة الوحدة .

★ ★ ★

## تمارين

١٩٠ - ما هو التمثيل الخطي الذي ينقل دائرة الوحدة  $|z| \leq 1$

إلى الدائرة  $|w-1| \leq 1$  والذي ينقل النقطتين  $0$  و  $1$  من المستوي  $z$

إلى النقطتين  $\frac{1}{2}$  و  $0$  من المستوي  $w$ . هل هذا التمثيل الخطي وحيد .

الحل : نعلم أن التمثيل الخطي العام ينقل كل نقطتين متعاكستين بالنسبة

لدائرة في المستوي  $z$  ( نقول عن نقطتين هما متعاكستان: انبسه لدائرة إذا

وقعتا على نصف مستقيم واحد صدر عن المركز وإذا كان جداء بعدهما

عن المركز مساوياً مربع نصف قطر الدائرة ) إلى نقطتين متعاكستين

بالنسبة للدائرة المقابلة في المستوي  $w$  . ولذلك فإن التمثيل المطلوب

ينقل النقطة  $\infty$  ( عكس النقطة  $0$  بالنسبة للدائرة  $|z| = 1$  )

إلى النقطة  $w = -1$  ( عكس النقطة  $\frac{1}{2}$  بالنسبة للدائرة

$|w-1| = 1$  ) . وهكذا نرى أن هذا التمثيل وحيد لأنه ينقل ثلاث نقط

وهي  $0, 1, \infty$  من المستوي  $z$  إلى ثلاث نقط  $0, -1, \frac{1}{2}$  من المستوي  $w$ .

ولاحصول على هذا التمثيل نبدل في (3) فنجد :

$$\frac{w - \frac{1}{2}}{w} = \frac{\frac{3}{-2}}{-1} = \frac{z}{z-1} : 1$$

ومنه :

$$\frac{2w-1}{3w} = \frac{z}{z-1}$$

أو :

$$w = -\frac{z-1}{z+2}$$

١٩١ - برهن أن التابع  $w = \frac{1}{z+i}$  ينقل نصف المستوى

$$y \geq 0 \text{ إلى الدائرة } u^2 + v^2 + v \leq 0.$$

الحل : إن هذا التابع خطي عام ولذلك فهو ينقل الدوائر إلى دوائر كما أنه ينقل الساحة التي تقع على يمين متحرك على دائرة في المستوى  $z$  إلى يمين المتحرك على الدائرة المقابلة في المستوى  $w$ .

لنبحث عن صورة المستقيم  $y=0$  وفق التمثيل المفروض . من أجل ذلك نضع  $z=x$  فنجد .

$$w = u + iv = \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1}$$

ومنه نجد :

$$u = \frac{x}{x^2+1} \quad ; \quad v = \frac{-1}{x^2+1}$$

وبحذف  $x$  نجد الدائرة :

$$u^2 + v^2 + v = 0 \quad (1)$$

نلاحظ أنه عندما تتحول  $x$  من  $-\infty$  إلى  $0$  إلى  $+\infty$  فإن  $w$

تتحرك على الدائرة (1) من 0 إلى  $-i$  إلى 0 وفق الاتجاه الموجب أي إنه عندما ترسم النقطة  $z$  محور السينات بالاتجاه الموجب فإن النقطة  $w$  ترسم الدائرة في الاتجاه الموجب وبالتالي نلاحظ أن نصف المستوي العلوي من المستوي  $z$  والذي يقع على يسار المتحرك على محور السينات بالاتجاه الموجب ينتقل إلى داخل الدائرة (1) الذي يقع على يسار المتحرك على هذه الدائرة بالاتجاه الموجب وهو المطلوب .

١٩٢ - برهن أن التابع  $w = \frac{i-z}{i+z}$  ينقل الربع الأول من

المستوي  $z$  إلى نصف الدائرة  $|w| < 1$   $0 < \arg w < \pi$  .

الحل : إن هذا التابع ينقل كل دائرة ( أو مستقيم ) مار بالنقطة  $z = -i$  إلى مستقيم في المستوي  $w$  وبشكل خاص ينقل محور العيinat إلى مستقيم لايجاد معادلة هذا المستقيم نضع  $z = iy$  فنجد :

$$w = u + iv = \frac{i - iy}{i + iy} = \frac{1 - y}{1 + y}$$

ومنه :

$$u = \frac{1 - y}{1 + y} ; v = 0$$

فلو جعلنا  $y$  تتحول من 0 إلى  $+\infty$  لرأينا أن  $w$  ترسم القطعة  $(-1, 1)$  من المحور الحقيقي بدءاً من  $-1$  إلى  $1$  . من هذا ينتج أن النصف الأيمن من المستوي  $z$  ينتقل إلى النصف الأعلى من المستوي  $w$  . كذلك نستطيع القول أن التابع المفروض ينقل كل دائرة ( أو مستقيم ) لتمر بالنقطة  $z = -i$  إلى دائرة وبشكل خاص ينتقل محور

السينات إلى دائرة ( بالمعنى المألوف لكلمة دائرة ) للحصول على معادلة هذه الدائرة نضع  $z = x$  فنجد :

$$w = u + i v = \frac{i - x}{i + x} = \frac{1 - x^2 + 2 i x}{x^2 + 1}$$

ومنه :

$$u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad ; \quad v = \frac{2 x}{x^2 + 1}$$

أو :

$$u^2 + v^2 = 1$$

وعندما تتحول  $x$  من  $0$  إلى  $\infty +$  نلاحظ أن  $w$  ترسم النصف الأعلى من هذه الدائرة بالاتجاه الموجب ، فالنصف الأعلى من المستوي  $z$  ينتقل إلى داخل الدائرة وبهذا نلاحظ أن الربع الأول من المستوي  $z$  ينقل إلى نصف الدائرة  $|w| < 1$  ( $0 < \arg w < \pi$ ) .

١٩٣ - برهن أن التابع  $w = \cos z$  ينقل الشريط

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \quad \text{إلى نصف المستوي } u \geq 0$$

الحل : لنفعل الجزء الحقيقي عن التخيلي في التابع المقروض :

$$w = u + i v = \cos ( x + i y ) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

ومنه نجد :

$$u = \cos x \operatorname{ch} y \quad ; \quad v = - \sin x \operatorname{sh} y$$

وتكون منحنيات متساويات الدرجة  $x = x_1$  هي :

$$u = \cos x_1 \operatorname{ch} y \quad ; \quad v = - \sin x_1 \operatorname{sh} y \quad (1)$$



وبحذف  $y$  نجد :

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_1} - \frac{v^2}{\sin^2 x_1} = 1$$

وتمثل هذه المعادلة جملة قطوع زائدة متحدة المحارق ( محرقاهما )  
المشتركان في النقطتين  $(u = \mp 1)$

وبما أن  $x_1$  تتحول من  $-\frac{\pi}{2}$  إلى  $0$  في الشريط المذكور فإن  
 $u$  تبقى موجبة ونكتفي لذلك بالفروع اليمنى من القطوع الزائدة .

وإذا كانت  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$  فإن القطع لزاوية يؤزل إلى المستقيم  $u = 0$   
وعندما تزداد  $x_1$  بدءاً من هذه القيمة حتى  $x_1 = 0$  فإن الفرع الأيمن  
من القطع الزائد يسمح نصف المستوي الأيمن كله ويؤزل أخيراً من أجل  
 $x_1 = 0$  إلى نصف المستقيم  $v = 0, u \geq 1$

١٩٤ - جد التابع الذي ينقل ربع المستوي  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$   
إلى الدائرة  $|w| > 1$  على أن ينقل النقطتين  $z = 1 + i, 0$  إلى النقطتين  
 $w = 0, 1$

الحل : إن التابع :

$$\xi = z^2$$

ينقل ربع المستوي  $z$  إلى نصف المستوي  $\xi$  وينقل النقطتين  
 $z = 1 + i, 0$  إلى النقطتين  $\xi = 2i, 0$  وينقل المحور التخيلي إلى النصف  
السالب من المحور الحقيقي . وبذلك تتحول المسألة إلى البحث عن التابع  
الذي يقل نصف المستوي العلوي إلى الدائرة  $|w| < 1$  على أن ينقل

النقطة المحيطة  $w = 0$  إلى النقطة المحيطة  $w = 1$  والنقطة الداخلية  $w = 2i$  إلى النقطة الداخلية  $w = 0$ .

نعلم أن التابع  $w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$  ينقل نصف المستوي العلوي إلى دائرة الوحدة وينقل ، بشكل خاص ، النقطة  $\zeta = i$  إلى النقطة  $w = 0$  . كذلك ينقل التابع :

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - \beta}{\zeta - \beta}$$

(  $\alpha$  عدد حقيقي كفي و  $\beta$  عدد عقدي كفي شريطة أن يكون جزؤه التخيلي موجب ) نصف المستوي العلوي  $\zeta$  إلى دائرة الوحدة وينقل ، بشكل خاص ، النقطة  $\zeta = \beta$  إلى النقطة  $w = 0$  .

وبما أننا نريد ان تنتقل النقطة  $\zeta = 2i$  إلى النقطة  $w = 0$  فانه يلزم ان نضع  $\beta = 2i$  فنحصل على التابع :

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - 2i}{\zeta + 2i}$$

ونعين  $\alpha$  بحيث تنتقل فيه النقطة  $\zeta = 0$  إلى النقطة  $w = 1$

$$1 = e^{i\alpha} \frac{-2i}{2i}$$

ومنـه :

$$e^{i\alpha} = -1$$

بالتعويض نحصل على التابع المطلوب :

$$w = - \frac{\zeta - 2i}{\zeta + 2i} = \frac{2i - z^2}{2i + z^2} = \frac{2 + iz^2}{2 - iz^2}$$

١٩٥ - بحث عن تابع ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى المستوي المقطوع وفق النصف الموجب من المحور الحقيقي .

الحل : نعلم أن التابع  $\xi = \sqrt{w}$  ينقل المستوي  $w$  المقطوع وفق النصف الموجب من المحور الحقيقي إلى نصف المستوي العلوي من المستوي  $\xi$  .  
ولكن التابع ( انظر المسألة السابقة ) :

$$z = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$$

ينقل نصف المستوي العلوي إلى الدائرة  $|z| < 1$  لذلك يكون التابع  $w$  المعطى بالعلاقة :

$$z = e^{i\alpha} \frac{\sqrt{w - \beta}}{\sqrt{w - \bar{\beta}}}$$

محققاً المطلوب . من العلاقة الأخيرة نجد :

$$w = \left( \frac{\beta - \bar{\beta} z e^{-i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha} z} \right)^2$$

فلو وضعنا ، على سبيل المثال ،  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  ،  $\beta = i$  حصلنا على

التابع المطلوب :

$$w = - \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^2$$

١٩٦ - جد تابعاً ينقل الدائرة  $|z| < 1$  المقطوعة وفق نصف القطر  $0 < x < 1$  إلى نصف المستوي  $v > 0$  من المستوي المركب

$$w = u + iv$$

الحل : إن التابع التالي الذي يعطي للمعد الحقيقي الموجب جذراً موجباً :

$$\xi = \sqrt{z}$$

ينقل الدائرة المذكورة إلى النصف الأعلى منها . وبوساطة تابع خطي يمكن نقل هذا النصف من الدائرة إلى ربع المستوي الأول من مستو مركب  $t$  . من أجل الحصول على هذا التابع الخطي نلاحظ أنه على هذا التابع أن ينقل إحدى النقطتين المشتركتين بين نصف الدائرة وقطرها وهما (  $1$  و  $-1$  ) إلى اللانهاية وان ينقل النقطة الأخرى إلى المبدأ . مثال ذلك التابع :

$$t = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

غير أن هذا التابع ينقل نصف الدائرة إلى الربع الرابع من المستوي  $t$  بدلاً من الربع الأول ، كما يمكن التحقق بسهولة ، ولهذا فإنه يلزم أن نجري دوراناً بزاوية مقدارها  $\frac{\pi}{2}$  . وبذلك نجد أن التابع .

$$t = i \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

ينقل نصف الدائرة إلى الربع الأول من المستوي  $t$  .  
وبوساطة التابع :

$$w = t^2$$

ينتقل ربع المستوي الأول إلى نصف المستوي الأعلى . بالتعويض نحصل على التابع :

$$w = t^2 = - \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^2 = - \left( \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \right)^2$$

الذي يحقق المطلوب :

١٩٧- ابحث عن تابع ينقل الشريط  $0 < x < a$  من المستوي العقدي

$w = u + iv$  من المستوي  $v > 0$  إلى نصف المستوي  $z = x + iy$

الحل : من المعلوم ان التابع  $w = e^z$  ينقل الشريط المحصور

بالمستقيمين  $y = 0$  :  $y = \pi$  إلى نصف المستوي العلوي لذلك علينا ، اذا

أردنا الاستفادة من هذا التحويل ، ان نحول الشريط المفروض  $0 < x < a$

إلى شريط آخر عرضه  $\pi$  ومحصور بين المحور الحقيقي ومحور آخر يوازيه

في النصف الأعلى من المستوي . يكفي من أجل ذلك أن نجري التحويل

$$\zeta = i \frac{\pi}{a} z$$

وعلى هذا فإن التابع :

$$w = e^z = e^{i \frac{\pi}{a} z}$$

يحقق المطلوب :

١٩٨ ابحث عن التمثيل الذي ينقل الساحة  $|z - 3| > 9$   $|z - 8| < 16$

إلى الحافة الدائرية  $0 < |w| < 1$  . جد قيمة  $q$  .

الحل : إن المنحني  $|z - 3| = 9$  يمثل دائرة مركزها  $z = 3$  ونصف

قطرها 9 والمنحني  $|z - 8| = 16$  يمثل دائرة مركزها  $z = 8$  ونصف

قطرها 16 والساحة المفروضة تقع بين هاتين الدائرتين . لنبحث أولاً

عن التمثيل الذي ينقل الدائرة الكبرى إلى الدائرة المثلثية . من أجل

ذلك يكفي ان نجري انسحاباً شعاعاً ،  $8 -$  ونحاكياً نسبته  $\frac{1}{16}$  وهذا

يتم بواسطة التابع الخطي :

$$\zeta = \frac{1}{16} (z - 8)$$

ان هذا التابع ينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزها :

$$\zeta = \frac{1}{16} (z - 8) = \frac{-5}{16}$$

وينقل نقطتي تقاطعها مع المحور الحقيقي  $z = 12, -6$  إلى النقطتين

$$\zeta = \frac{1}{4}, -\frac{7}{8}$$

لذلك كي نحصل على التمثيل المطلوب يكفي أن نبحث عن التمثيل الخطي الذي ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها ( أي يبقي على الدائرة الأولى ) وينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها أصغر من 1 .

ان التمثيل الذي ينقل دائرة الوحدة إلى نفسها هو (  $\alpha$  عدد حقيقي كفي و  $\beta$  عدد عقدي كفي ) .

$$w = e^{i\alpha} \frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta}$$

فاذا اخترنا  $\alpha = 0$  و  $\beta$  عدداً حقيقياً فعندئذ نلاحظ أن التمثيل الحاصل :

$$w = \frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta}$$

ينقل كل نقطتين متناظرتين بالنسبة للمحور الحقيقي في المستوى  $\zeta$  إلى نقطتين متناظرتين بالنسبة للمحور الحقيقي في المستوى  $w$  .

$$\frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta} = \overline{\left( \frac{\zeta - \beta}{1 - \beta\zeta} \right)}$$

ولذلك فهو ينقل الدائرة الثانية إلى دائرة مركزها على المحور الحقيقي . وعلى هذا يكفي أن نعين  $\beta$  على شكل يقع فيه هذا المركز في نقطة الأصل ، أي على شكل تقع فيه صورة النقطة  $\zeta = \frac{1}{4}$  مناظرة لصورة النقطة  $\zeta = -\frac{7}{8}$  :

$$\frac{\frac{1}{4} - \beta}{1 - \frac{1}{4}\beta} = -\frac{-\frac{7}{8} - \beta}{1 + \frac{7}{8}\beta}$$

وبالتالي :

$$2\beta^2 + 5\beta + 2 = 0$$

ومنه يكون  $\beta = -\frac{1}{2}$  أو  $\beta = -2$  ويكون نصف قطر الدائرة في الحالة الأولى .

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

في حين يكون في الحالة الثانية  $\frac{3}{2}$  وهذه مرفوضة لأننا نريد أن يكون نصف القطر أصغر من 1 فالتمثيل المطلوب هو إذن :

$$w = \frac{\zeta + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\zeta} = \frac{2\zeta + 1}{2 + \zeta} = \frac{\frac{1}{8}(z - z) + 1}{2 + \frac{1}{16}(z - 8)} = \frac{2z}{z + 24}$$

من الممكن الحصول على تمثيل آخر بـ الدائرة الصغرى إلى دائرة الوحدة وينقل الدائرة الكبرى إلى الدائرة  $|z| = 8$  . يكفي من أجل ذلك أن نعيد العمل ثانية أو أن نجري التحويل :

$$w = \frac{2}{3} \frac{1}{w} = \frac{z + 24}{3z}$$

ان هذا التحويل ينقل دائرة الوحدة إلى دائرة نصف قطرها  $\frac{2}{3}$  وينقل الدائرة الداخلية إلى دائرة الوحدة .

١٩٩ - استعمال التحويلات المتتالية :

$$\xi = (z + \frac{1}{2}) \pi i ; s = e^{\xi} ; t = \frac{1+s}{1-s} ; r = t^2 ; w = \frac{r-i}{r+i}$$

لنكون تحويلاً واحداً  $w = f(z)$  ينقل الشريط  $y \geq 0$

$$|w| \leq 1 \text{ إلى الدائرة } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

الحل : إن التحويل  $\xi = (z + \frac{1}{2}) \pi i$  يسحب الشريط بشعاع

مقداره  $\frac{1}{2}$  ويدوره بزاوية مقدارها  $\frac{\pi}{2}$  ويمدده بالنسبة  $\pi$  ولذلك فهو ينتقل

إلى الشريط  $0 \leq \xi \leq \pi$  ،  $0 \leq \eta \leq \pi$  من المستوي  $\xi + i\eta = \xi$  .

وأما التحويل  $s = e^{\xi}$  فهو ينقل الشريط الأخير إلى داخل النصف الأعلى من دائرة الوحدة في المستوي  $s$  ( وينقل حدود الشريط إلى حدود نصف الدائرة )

والتحويل  $t = \frac{1+s}{1-s}$  ينقل نصف الدائرة إلى الربع الأول من المستوي  $t$

وينقل محيطها إلى النصف الموجب من المحور الحقيقي والنصف الموجب من المحور التخيلي .

والتحويل  $r = t^2$  ينقل هذا الربع إلى نصف المستوي في حين ينقل

التحويل  $w = \frac{r-i}{r+i}$  نصف المستوي إلى دائرة الوحدة وينقل المحور الحقيقي



إلى محيط هذه الدائرة . واما التابع  $f(z)$  فيعطي على الشكل التالي :

$$w = \frac{r-i}{r+i} = \frac{t^2-i}{t^2+i} = \frac{(1+s)^2 - i(1-s)^2}{(1+s)^2 + i(1-s)^2}$$

$$= \frac{(1+ie^{i\pi z})^2 - i(1-e^{i\pi z})^2}{(1+ie^{i\pi z})^2 + i(1-e^{i\pi z})^2} = \frac{i - \sin \pi z}{1 - i \sin \pi z}$$

٢٠٠ - استعمال التمثيلات :

$$\xi = \sqrt{z} \quad ; \quad t = \sin \frac{\pi}{2} \quad ; \quad w = \frac{t-1}{t+1}$$

لتنقل داخل القطع المكافئ :

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$$

من المستوي  $z$  المقطوع من المحرق  $z=0$  إلى  $z=-\infty$  ، إلى

داخل دائرة الوحدة من المستوي  $w$  المقطوع من  $w=0$  إلى  $w=1$  .

الحل . ان التمثيل المعرف بتعيين التابع التالي الذي يعطي جذراً موجباً للمعدد الحقيقي الموجب :

$$\xi = \xi + i \eta = \sqrt{z} \quad (2)$$

ينصف الزوايا فهو ينقل الطرف العلوي من نصف المحور الحقيقي السالب إلى النصف العلوي من المحور التخيلي وينقل الطرف السفلي من نصف المحور الحقيقي السالب إلى النصف السفلي من المحور التخيلي .  
للعصول على صورة القطع المكافئ ، في المستوي  $\xi$  نضع في (١) :

$$z = r e^{i\theta} = \frac{2}{1 + \cos \theta} e^{i\theta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} e^{i\theta}$$

$$\xi = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = 1 + i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad : \quad \text{فنجده}$$

( اكتبينا بالاشارة + لأن  $-\pi < \theta < \pi$  و يبقى  $\cos \frac{\theta}{2}$  بالتالي

موجباً ) .

فصورة القطع المكافئ هي المستقيم  $\xi = 1$  وأما داخل القطع المكافئ في تنقل إلى الشريط  $0 < \xi < 1$  .  
لنتنقل إلى التمثيل :

$$t = X + i Y = \sin \frac{\pi}{2} \xi = \sin \frac{\pi}{2} (\xi + i \eta) \quad (2)$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي نجد :

$$X = \sin \frac{\pi}{2} \xi \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta \quad ; \quad Y = \cos \frac{\pi}{2} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta$$

من أجل  $\xi = 1$  نجد :

$$X = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta \quad ; \quad Y = 0$$

وعندما نتحول  $\eta$  من  $-\infty$  إلى  $+\infty$  ترسم  $t$  المحور الحقيقي من  $X = 1$  إلى  $X = +\infty$  مرتين .

من أجل  $\xi = 0$  يكون :

$$X = 0 \quad ; \quad Y = \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta$$

فصورة المحور التخيلي من المستوي  $\xi$  هي المحور التخيلي في المستوي  $t$  .

وهكذا نرى أن الشريط  $0 < \xi < 1$  يتحول إلى نصف المستوي

الأيمن من المستوي  $t$  المقطوع من  $X = 1$  إلى  $X = +\infty$

وأما التمثيل :

$$w = \frac{t-1}{t+1} \quad (3)$$

فهو ينقل نصف المستوى الأيمن المقطوع من  $X=1$  الى  $X=+\infty$  الى داخل دائرة الوحدة المقطوعة من  $w=0$  الى  $w=1$  بتركيب التمثيلات الثلاثة نجد :

$$w = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} - 1}{\sin \frac{\pi}{2} \sqrt{z} + 1}$$

٢٠١ - اذا كان :

$$w = \operatorname{th} z \quad (1)$$

فبرهن أن كلا من  $x = \text{const}$  و  $y = \text{const}$  ينتقل الى دوائر تقع مراكزها على استقامة واحدة في المستوى  $w$  . ثم برهن أن هذا التمثيل ينقل الشريط  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  الى نصف المستوى العلوي في المستوى  $w$  .

الحل : لنفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التحليلي في التابع ( 1 ) -

$$w = u + i v = \operatorname{th} ( x + i y ) = \frac{\operatorname{th} x + i \operatorname{tg} y}{1 + i \operatorname{th} x \operatorname{tg} y}$$

ومنه نجد :

$$u = \frac{\operatorname{sh} 2 x}{\operatorname{ch} 2 x + \cos 2 y} \quad ; \quad v = \frac{\sin 2 y}{\cos 2 y + \operatorname{ch} 2 x} \quad (2)$$

يحذف  $y$  من هاتين العلاقتين نجد :

$$(u - \operatorname{c th} 2 x)^2 + v^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2 x} \quad (3)$$

وهذا يعني أن المستقيمتين  $x = \text{const.}$  تنتقل إلى دوائر في المستوى  $w$  تقع مراكزها على محور السينات باستثنى من ذلك المستقيم  $x = 0$  الذي ينتقل إلى المحور التخيلي .  
ومحذف  $x$  من العلاقتين ( 2 ) نجد :

$$(v + \text{ctg } 2y)^2 + u^2 = \frac{1}{\sin^2 2y} \quad (4)$$

وهذا يعني أن المستقيمتين  $y = \text{const.}$  تنتقل إلى دوائر في المستوى  $w$  مراكزها على محور العيانات . يستثنى من ذلك المستقيمتين التي تجعل  $\sin 2y$  مساوياً للصفر أي  $2y = k\pi$  (  $k$  عدد صحيح ) ومنها المستقيمان  $y = 0$  و  $y = \frac{\pi}{2}$  . ان صورة المستقيم الأول تعطى بالمعادلتين :

$$u = \frac{\text{sh } 2x}{\text{ch } 2x + 1} = \text{th } x \quad , \quad v = 0$$

وهذه تمثل القطعة  $(-1, 1)$  من المحور الحقيقي . واما صورة المستقيم الثاني فتعطى بالمعادلتين :

$$u = \frac{\text{sh } 2x}{\text{ch } 2x - 1} = \text{cth } x \quad , \quad v = 0$$

وهذه ليست إلا المحور الحقيقي باستثناء القطعة  $(-1, 1)$  منه .

وكل مستقيم  $y = c$  حيث  $0 < c < \frac{\pi}{2}$  ينتقل كما هو واضح من (2) و (4) إلى قوس دائري في نصف المستوى العلوي ( لأن  $v > 0$  ) ، وتر هذه القوس القطعة  $(-1, 1)$  . وعندما تتحول  $c$  من 0 إلى  $\frac{\pi}{2}$  تَمَسَّح هذه القوس نصف المستوى العلوي كله وهو المطلوب .

٢٠٢ - جد تمثيلاً بنقل خارج الكاردبويند :

$$x = 2a(1 - \cos t) \cos t, \quad y = 2a(1 - \cos t) \sin t \quad (1)$$

$$t(0, 2\pi), \quad a > 0$$

إلى داخل دائرة الوحدة .

الحل : نجري التحويل :

$$Z = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

بفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد :

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2} ; \quad Y = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

ونحصل على التمثيل الوسيطى لصورة الكاردبويند في المستوي Z

بتعويض (1) في (2) :

$$X = \frac{\cos t}{2a(1 - \cos t)} = \frac{1}{4a} \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2} - \frac{1}{4a}$$

$$Y = \frac{\sin t}{2a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

وهذه ليست إلا المعادلات الوسيطية للقطع المكافئ :

$$Y^2 = \frac{1}{a} \left( x + \frac{1}{4a} \right) \quad (3)$$

وأما ساحة خارج الكاردبويند فننقل إلى ساحة داخل هذا القطع ( إن نقطة اللانهاية في المستوي z تنتقل إلى محرق القطع  $Z=0$  ، كذلك إذا جعلنا a بدءاً من قيمة معينة تسعى نحو اللانهاية فان

القطع (3) يمسح ساحة داخله في حين يمسح الكاردنويد (1) ساحة خارجه .

نجري بعمد ذلك التحويل :

$$\xi = \sqrt{Z} \quad (4)$$

وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد :

$$X = \xi^2 - \eta^2 \quad ; \quad Y = 2\xi\eta$$

وننتقل المستقيمت  $\eta = c$  بهذا التمثيل إلى المنحنيات :

$$X = \xi^2 - c^2 \quad ; \quad Y = 2c\xi$$

وبحذف  $\xi$  نحذف :

$$Y^2 = 4c^2(X + c^2) \quad (5)$$

بمقارنة (3) مع (5) نجد ان القطع المكافئ (3) ينتقل بالتمثيل (4) إلى المستقيم  $\eta = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  وأما ساحة داخل القطع فنتنقل إلى الشرط .

$$0 < \eta < \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (6)$$

لانه إذا جعلنا  $c$  في (5) تتحول من  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$  إلى الصفر فعندئذ يمسح القطع المكافئ ساحة داخله في حين يمسح المستقيم  $\eta = c$  الشرط (6) .

وأما نقل الشرط (6) إلى داخل دائرة الوحدة فيتم بأشكال مختلفة أحدهما يتم كما يلي : نجري التحويل :

$$t = \frac{\pi \sqrt{a}}{i} z - \frac{\pi}{2}$$

الذي ينقل الشريط المذكور إلى شريط آخر في المستوى  $t$  :

$$-\frac{\pi}{2} > \operatorname{Re} t < 0$$

وتكون صورة  $\eta = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  (أي صورة الكاردويويد) هي المحور

التخيلي في هذا المستوى . وبوساطة التحويل :

$$r = \sin t$$

ينتقل الشريط إلى نصف المستوى الأيسر المقطوع من  $r = -1$  إلى

$r = -\infty$  على طول المحور الحقيقي ، وينقل المحور التخيلي من المستوى

$t$  إلى المحور التخيلي في المستوى  $r$  .

وأما التحويل :

$$w = \frac{1+r}{1-r}$$

فينقل نصف المستوى المذكور إلى داخل دائرة الوحدة وينقل المحور

التخيلي إلى محيط هذه الدائرة .

وهكذا نجد ان التحويل :

$$w = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \sqrt{a}}{2i} \sqrt{\frac{1}{z}}$$

ينقل ساحة خارج الكاردويويد إلى ساحة داخل دائرة الوحدة

وأما الكاردويويد نفسه فينتقل إلى محيط دائرة الوحدة .

٢٠٣ جد تمثيلاً ينقل ساحة داخل القطع الناقص  $4x^2 + 5y^2 = 20$  ،

المقطوع وفق القطعة المستقيمة الرابطة بين محرقه ، إلى داخل الحلقة

$$1 < |w| < A \text{ . ماهي قيمة } A \text{ ؟}$$

الحل : من المعلوم أن التابع :

$$w = \frac{k}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

ينقل الدوائر في المستوي  $z$  إلى قطوع ناقصة في المستوي  $w$  وبالعكس فإن التمثيل :

$$z = \frac{k}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

ينقل القطوع الناقصة في المستوي  $z$  إلى المستوي  $w$  . وللتحقق من ذلك نضع  $w = \rho e^{i\theta}$  فنجد بفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي :

$$x = \frac{k}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta \quad ; \quad y = \frac{k}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \theta$$

فالدوائر  $\rho = c$  في المستوي  $w$  تنتقل إلى قطوع ناقصة انصاف اقطارها ( بفرض  $k$  عدداً موجباً ) :

$$a = \frac{k}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad ; \quad b = \frac{k}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$$

ومنه نلاحظ أنه عندما تتحول  $\rho$  من 0 إلى 1 فإن القطع يمسح المستوي كله ويصبح من أجل  $\rho = 1$  القطعة المستقيمة  $(-k, k)$  وإذا ازدادت  $\rho$  من 1 إلى  $+\infty$  فإن القطع يمسح المستوي ثانية . فالتمثيل المفروض ، إذن ، ينقل المستوي  $w$  إلى مستويين  $z$  منطبقين على بعضهما أحدهما يوافق ساحة داخل الدائرة  $|w| < 1$  والآخر يوافق ساحة



خارج هذه الدائرة .

لتعيين قيمتي  $k$  و  $\rho$  نلاحظ أن نصفي محوري القطع المفروض هما  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{5}$  لذلك :

$$\sqrt{2} = \frac{k}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad 2 = \frac{k}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)$$

ومنه نجد :

$$\rho = \sqrt{5} + 2 \quad k = 1$$

فالتمثيل :

$$z = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right) \quad (1)$$

ينقل محيط الدائرة التي نصف قطرها  $\rho = \sqrt{5} + 2$  إلى محيط القطع الناقص  $4x^2 + 5y^2 = 20$  وينقل الحلقة  $\rho < |w| < 1$  إلى داخل القطع الناقص المذكور المقطوع وفق القطعة  $(-1, 1)$  .

من (1) نجد :

$$w = z \mp \sqrt{z^2 - 1}$$

ولكن إذا أخذنا بالإشارة - فإن النقطة  $z = \sqrt{5}$  الموجودة على القطع تنتقل إلى النقطة  $w = \sqrt{5} - 2$  وهذه غير موجودة على الدائرة  $\rho = \sqrt{5} + 2$  لذلك يلزم أن نأخذ بالإشارة + التي تحقق الغرض فالتحويل المطلوب إذن هو الفرع :

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

٢٠٤ - برهن أن  $w = \lg \frac{1+z}{1-z}$  ينقل  $|z| < 1$  الى الشريط :

$$-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$$

الحل : ان التحويل :

$$\xi = \frac{1+z}{1-z}$$

ينقل الدائرة  $|z| = 1$  الى المحور التخيلي وينقل الساحة  $|z| < 1$  الى نصف المستوي الأيمن .

وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي في التعيين الرئيسي للتمثيل :

$$2w = \lg \xi$$

نجد إذا استعملنا التمثيل القطبي لـ  $\xi$  ( $\xi = \rho e^{i\theta}$ ) :

$$2u = \lg \rho ; \quad 2v = \theta$$

وبما أن  $\rho$  تتحول في نصف المستوي الأيمن من 0 إلى  $+\infty$  و  $\theta$

تتحول من  $-\frac{\pi}{2}$  إلى  $+\frac{\pi}{2}$  فان الساحة تنتقل إلى الشريط  $-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$

وهو المطلوب :

٢٠٥ - لدينا التمثيل :

$$w = e^{ia} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}} \quad (\beta = a + ib ; b > 0)$$

الذي ينقل نصف المستوي إلى دائرة الوحدة . عيّن أين يتمدد نصف المستوي العلوي وأين يتقلص ؟

الحل : يكون هنالك تمدد عندما  $|w'(z)| > 1$  أي عندما يكون

$$\frac{|\beta - \beta|}{|z - \beta|^2} > 1$$

ومنه نجد :

$$|z - \beta|^2 < 2b$$

أي إن نصف المستوي العلوي يتمدد في النقط الواقعة داخل الدائرة التي مركزها  $\beta$  ( في النصف السفلي من المستوي ) ونصف قطرها  $\sqrt{2b}$ . وشرط وجود ساحة مشتركة بين هذه الدائرة ونصف المستوي العلوي هو :

$$b < \sqrt{2b}$$

أي

$$b < 2$$

وهكذا نرى أنه إذا كان  $b \geq 2$  فإن نصف المستوي العلوي كله يتقلص وعند ما يكون  $b < 2$  فإن المنطقة الواقعة داخل الدائرة  $|z - \beta| < \sqrt{2b}$  من المستوي العلوي تتمدد والمنطقة الواقعة خارج هذه الدائرة تتقلص وأما نقط قوس الدائرة فلا يصيبها تمدد أو تقلص .

$$٢٠٦ - \text{برهن أن التمثيل } w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \text{ ينقل النصف}$$

العلوي من الدائرة  $|z| < 1$  إلى النصف العلوي من المستوي  $w$ . عين النقط حيث تكون نسبة التمدد الخطي مساوية  $\frac{1}{2}$  وتلك التي يكون الدوران عندها مساوياً  $\pm \frac{1}{2} \pi$ . برهن أن نسبة التمدد تكون أكبر من الواحد في جميع النقط الواقعة ضمن النصف العلوي للدائرة

$$. 3 \quad z^2 = 1$$

الحل : لو وضعنا  $z = r e^{i\theta}$  وفصلنا الجزء الحقيقي عن التخيلي لوجدنا :

$$u = -\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad v = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - r \right) \sin \theta$$

ومنه نلاحظ انه عندما تتحول  $r$  من  $0$  إلى  $1$  وتبقى  $\theta$  محصورة بين  $0$  و  $\pi$  فإن النقطة  $w$  ترسم النصف العلوي كله من المستوي  $w$ .  
ان نسبة التمدد الخطي تعطى بقياس المشتق  $w'(z)$  وزاوية الدوران بـ  $\arg w'(z)$ . ولذلك نرى إن نسبة التمدد الخطي تكون مساوية  $\frac{1}{2}$  عندما :

$$\frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{2}$$

أي من أجل نقط القطع الزائد .

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

وزاوية الدوران تساوي  $\pm \frac{\pi}{2}$  عندما :

$$\arg \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

أي من أجل نقط المنحني ( ليمسكات ) :

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

وفي جميع النقط الواقعة ضمن النصف العلوي للدائرة  $|z|^2 = 1$  تكون نسبة التمدد :

$$\frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{2} \frac{|z^2 - 1|}{|z|^2} > \frac{3}{2} |1 - |z|^2| > \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

وهو المطلوب .

٢٠٧ - برهن أن التابع :

$$w = \int_0^z t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt \quad (1)$$

ينقل النصف العلوي من المستوى  $z$  إلى داخل مثلث متساوي الأضلاع في المستوى  $w$  . احسب طول ضلع هذا المثلث

الحل : بمقارنة العلاقة (١) مع دستور كريستوفل الثاني في صفحة ٢٢٦

نجد أن التابع (١) ينقل الى النصف العلوي من المستوى  $z$  مثلثاً من

المستوي  $w$  . زوايا  $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \alpha_3 \pi$  حيث :

$$\alpha_1 - 1 = -\frac{2}{3} ; \quad \alpha_2 - 1 = -\frac{2}{3}$$

ومنه نجد أن كل زاوية من زوايا المثلث تساوي  $\frac{\pi}{3}$  فهو متساوي الأضلاع .

لحساب طول ضلع المثلث نلاحظ أن رؤوسه ، ولتكن  $P$  و  $Q$  و  $R$  .

تقع في النقط  $t = 0, 1, \infty$  على المحور الحقيقي ولذلك فإن النقطة  $P$

تقع في مبدأ احداثيات المستوى  $w$  ( $w = 0$ ) في حين يتعين

موضعا النقطتين  $R$  و  $Q$  بالتكاملين

$$\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt ; \quad \int_0^{\infty} t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt \quad (2)$$

ولحساب هذين التكاملين علينا ان نختار فرعاً لكل من التابعين كثيري

القيم  $t^{-\frac{2}{3}}$  و  $(1-t)^{-\frac{2}{3}}$  وذلك كي يبقيا مستمرين ووحيدتي قيمة

في  $t \geq 0$  باستثناء النقطتين  $t = 0$  و  $t = 1$  . ان هذا الأمر يتحقق

إذا اخترنا :

$$0 \leq \arg t \leq \pi \quad ; \quad -\pi \leq \arg(1-t) \leq 0$$

عند ذلك يكون في التكامل الأول :

$$t = \rho e^{i\theta} = \rho \quad ; \quad 1-t = |1-\rho| e^{i\theta} = 1-\rho$$

ويكون بفرض  $s$  طول ضلع المثلث

$$PQ = s = \int_0^1 \rho^{-\frac{2}{3}} (1-\rho)^{-\frac{2}{3}} d\rho = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma^3}{2\pi} I^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

ملاحظة : لحساب التكامل الثاني من (2) نكتب :

$$w_R = s + \int_1^{\infty} t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt$$

ويكون في هذا التكامل استناداً إلى ما ذكرناه قبل قليل :

$$\arg t = 0 \quad ; \quad \arg(1-t) = -\pi$$

أي :

$$t = \rho e^{i0} = \rho \quad ; \quad 1-t = |1-\rho| e^{-i\pi} = (\rho-1) e^{-i\pi}$$

وبالتالي

$$w_R = s + e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_1^{\infty} \rho^{-\frac{2}{3}} (\rho-1)^{-\frac{2}{3}} d\rho$$

وإذا أجرينا في التكامل الأخير التحويل  $\rho = \frac{1}{u}$  حصلنا من جديد

على  $s$  أي :

$$w_R = s + s e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

وهذا ما يؤكد من جديد أن المثلث PQR متساوي أضلاع  
 ٢٠٨ - جد التابع الذي ينقل المثلث PQR الذي تقع رؤوسه  
 في النقط  $(0, 1, i)$  في المستوي  $w$  الى النصف العلوي من المستوي  $z$   
 على أن تنتقل رؤوس هذا المثلث الى النقط  $z = 0, 1, \infty$ .

الحل : إن المثلث المفروض قائم الزاوية ومتساوي الساقين ولذلك فإن :

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{4} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

وبما أن أحد رؤوس المثلث ينتقل إلى  $z = \infty$  فإن دستور كريستوفل  
 يأخذ في هذه الحالة الشكل :

$$w = A \int_0^z t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt + B \quad (1)$$

لتعيين A و B نلاحظ أن النقطة  $z = 0$  تقابل النقطة  $w = 0$  ولذلك  
 نجد بالتعويض في (1) أن  $B = 0$  . وبما أن النقطة  $z = 1$  تقابل النقطة  
 $w = 1$  فإن :

$$\begin{aligned} 1 &= A \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt \\ &= A B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) = \frac{A \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

والتمثيل المطلوب هو :

$$w = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/4)} \int_0^t t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt$$

٢٠٩ - استعمال دستور كريستوفل لتنقل الشريط  $-a < x < a$   $y > 0$  من المستوي  $z$  إلى النصف العلوي من المستوي  $t$ .

الحل : يمكن اعتبار الشريط المذكور مثلثاً  $PQR$  رؤوسه  $Q(a, 0)$  ;  $p(-a, 0)$  وأما الرأس  $R$  ففي اللانهاية . ان زوايا هذا المثلث هي  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  وبذلك يأخذ دستور كريستوفل (إذا اخترنا صور النقط الثلاث  $P$  و  $Q$  و  $R$  في النقط  $t = -1, 1, \infty$ ) الشكل التالي :

$$z = A \int_0^t (1-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} ds + B$$

ومنه :

$$z = A \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} + B = A \arcsin t + B$$

لتعيين  $B, A$  نلاحظ أن  $z = -a$  من أجل  $t = -1$  . وأن  $z = a$  من أجل  $t = 1$  . إذن :

$$-a = -A \frac{\pi}{2} + B ; a = A \frac{\pi}{2} + B$$

وبحل هاتين العلاقتين نجد :  $B = 0$  ;  $A = \frac{2a}{\pi}$  وبالتالي :

$$z = \frac{2a}{\pi} \arcsin t$$

ومنه :



$$t = \sin \frac{\pi z}{2a}$$

٣١٠ - (١) جد التمثيل الذي ينقل مضلعاً ، عدد أضلاعه n ، من المستوي w إلى دائرة الوحدة في المستوي z .

(٢) برهن أن التابع  $w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$  ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى المربع الذي ضلعه يساوي  $(\frac{1}{4}) I^2(\frac{1}{4})$  .

الحل : من المعروف انه يمكن بواسطة دستور كريبستوفل نقل محيط المضلع إلى المحور الحقيقي من المستوي t والساحة داخل المضلع إلى نصف المستوي العلوي :

$$w = A \int (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + B \quad (1)$$

ولكن التحويل الذي ينقل النصف العلوي من المستوي t إلى داخل دائرة الوحدة في المستوي z هو :

$$t = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \quad ; \quad z = \frac{i-t}{i+t}$$

وإذا فرضنا أن النقط  $a_k$  تنتقل إلى النقط  $z_k$  على دائرة الوحدة وإذا لاحظنا أن :

$$t - a_1 = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right) - i \left( \frac{1-z_k}{1+z_k} \right) = \frac{-2i(z - z_k)}{(1+z)(1+z_k)}$$

وأن :

$$dt = \frac{-2i dz}{(1+z)^2}$$

وأن

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$$

فعندئذ نجد بالتعويض في ( 1 ) :

$$w = A' \int (z - z_1)^{\alpha_1 - 1} (z - z_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - z_n)^{\alpha_n - 1} dz + B \quad (2)$$

حيث  $A'$  ثابت كيفي جديد :

( ٢ ) استناداً إلى ( 2 ) نلاحظ أن التابع :

$$w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

ينقل دائرة الوحدة الى شكل رباعي زواياه :

$$\pi \alpha_1 = \pi \alpha_2 = \pi \alpha_3 = \pi \alpha_4 = \frac{\pi}{2}$$

فمن ذلك مستطيل ( وفي الحالة الخاصة مربع ) . ان صور رؤوس هذا الشكل الرباعي تقع في النقط  $z = 1, i, -1, -i$  والرؤوس نفسها تقع في النقط :

$$w = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \int_0^i \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \int_0^{-i} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (3)$$

فاذا اخترنا من التابع  $\sqrt{1-t^4}$  ذلك الفرع الذي يكون من أجله  $\arg(1-t^4) = 0$  على قطعة المحور الحقيقي  $(-1, 1)$  فعندئذ يكون التكامل الأول من ( 3 ) حقيقياً . ولحسابه نضع  $t^4 = u$  فنجد :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

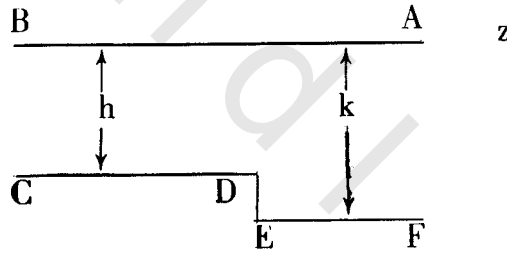
$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) = s$$

وبحساب التكاملات الثلاثة الأخرى نجد أن رؤوس الشكل الرباعي تقع بالنقط :

$$w = (s, is, -s, -is)$$

وهذا يدلنا على أن الشكل الرباعي مربع وأن طول ضاعه يساوي  $\sqrt{2}s$  أي  $\frac{1}{4} \frac{1}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$  وهو المطلوب :

٢١١ - أوجد التابع  $z = f(t)$  الذي ينقل الساحة كما في الشكل (٢٥) إلى النصف العلوي من المستوي  $t$ .



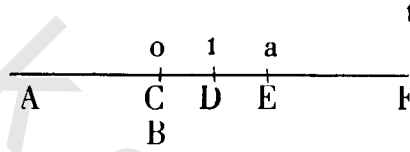
(شكل ٢٥)

الحل : يمكن استعمال دستور كريستوفل لأنه يمكن اعتبار محيط الساحة مضلعاً زواياه :

$$0, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$$

٢٥٧ - (الساحة العقديّة) م - ١٧

لنفرض أن النقطة D تنتقل بالتابع المطلوب إلى النقطة  $t = 1$  وأن  
 النقطة  $B_\infty$  ( $C_\infty$ ) إلى النقطة  $t = 0$  والنقطة  $F_\infty$  ( $A_\infty$ ) إلى  
 النقطة  $t = \infty$  ( لا يمكن حسب نظرية ريمان اختيار صور أكثر من  
 ثلاث نقط مفروضة على محيط الساحة ) وأما النقطة E فنفرض أنها  
 تنتقل إلى النقطة  $t = a$  ( يلزم تعيين a ) . عندئذ يأخذ دستور  
 كريستوفل الشكل :



( شكل ٢٦ )

$$z = A' \int \frac{\sqrt{t-1}}{t\sqrt{t-a}} dt + B'$$

لحساب هذا التكامل نجري التحويل :

$$\frac{t-a}{t-1} = u^2 \quad (1)$$

فيكون :

$$z = A' \left[ \lg \frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a+u}}{\sqrt{a-u}} \right] + B' \quad (2)$$

لتعيين  $B'$  نفرض أن نقطة الأصل في المستوي  $z$  تقع في النقطة

E . وبما أن  $t = a$  توافق  $u = 0$  فاننا نجد بالتعويض في ( 2 )<sup>(١)</sup>

$$0 = A' \left[ \lg 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \lg 1 \right] + B'$$

ومنه :

$$B' = 0$$

لتعيين  $A'$  و  $a$  نلاحظ أنه من أجل النقطة D يكون  $z = i(k-h)$ ؛  
 ومن أجل النقطة A يكون  $u = \infty$  ،  $z = \infty + ik$  بالتعويض  
 في ( 2 ) نجد :

$$i(k-h) = A' \left( i\pi - \frac{1}{\sqrt{a}} i\pi \right)$$

$$ik = A' i\pi$$

$$A' = \frac{k}{\pi} ; a = \frac{k^2}{h^2} \text{ : } \text{وَجَل هَاتين المعادلتين نجد :}$$

فالتمثيل المطلوب ينتج اذن بحذف  $u$  من ( 1 ) ومن :

$$z = \frac{k}{\pi} \left[ \lg \frac{1+u}{1-u} - \frac{h}{k} \lg \frac{k+hu}{k-hu} \right]$$

(١) ان التحويل ( 1 ) ينقل النصف العلوي من المستوي  $t$  إلى الربع الأول  
 من المستوي  $u$  ويكون :

$$u_E = 0 ; u_F = u_A = 1 ; u_C = u_B = \sqrt{a} ; u_D = \infty$$

وليكن في هذا الربع من المستوي

$$-\pi \leq \arg(1-u) \leq 0 ; 0 \leq \arg(1+u) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \arg(\sqrt{a}-u) \leq 0 ; 0 \leq \arg(\sqrt{a}+u) \leq \frac{\pi}{2}$$

٢١٢ - برهن أن مجموعة التمثيلات  $\{T_1, T_2, \dots, T_6\}$

حيث :

$$T_1 = z; T_2 = \frac{1}{z}; T_3 = 1 - z; T_4 = \frac{z}{1-z}; T_5 = \frac{z-1}{z}; T_6 = \frac{z}{z-1}$$

تشكل زمرة ( زمرة النسب اللانوافقية ) .

الحل : إن عناصر المجموعة المفروضة  $(T_i \ (i = 1, 2, \dots, 6))$  تنتمي كلها إلى مجموعة التمثيلات الخطية العامة ولما كانت مجموعة التمثيلات الخطية العامة تؤلف زمرة ، فإنه يكفي إبرهان على المطلوب اثبات أن مجموعة العناصر  $T_i$  تؤلف زمرة جزئية من زمرة التمثيلات الخطية .

من السهل أن نبين أن :

$$T_1^{-1} = z \in S; T_2^{-1} = \frac{1}{z} \in S; T_3^{-1} = 1 - z \in S$$

$$T_4^{-1} = \frac{z-1}{z} \in S; T_5^{-1} = \frac{1}{1-z} \in S; T_6^{-1} = \frac{z}{z-1} \in S$$

وأنه مهما كان  $i$  و  $j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) فإن  $T_i T_j \in S$  ،

وعلى سبيل المثال :

$$T_3 T_6 = T_3 \left( \frac{z}{z-1} \right) = 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z} = T_4 \in S$$

لذا فإن  $S$  تشكل فعلاً زمرة وهو المطلوب .

٢١٣ - برهن أن مجموعة التمثيلات  $S$  التي عناصرها :

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

حيث  $a, b, c, d$  أعداد صحيحة حقيقية أو أعداد صحيحة عقدية  
تتحقق الشرط  $ad - bc = 1$  تشكل زمرة ( نقول عن عدد إنه صحيح  
عقدي إذا أمكن كتابته على الشكل  $m + ni$  حيث  $m, n$  عدنان  
صحيحان حقيقيان ) .

الحل - إن المجموعة المفروضة هي مجموعة جزئية من زمرة  
التمثيلات الخطية العامة . ولإبرهان على أن مجموعتنا تشكل زمرة يكفي  
أن نثبت أنها تؤلف زمرة جزئية من زمرة التمثيلات الخطية العامة  
( وذلك لأن الزمرة الجزئية هي مجد ذاتها زمرة ) .

في الحقيقة يكون ، مهما كان العنصر  $L$  من المجموعة  $S$  :

$$L^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

ولما كان معين هذا التمثيل العكسي :

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc = 1$$

فإن  $L^{-1}(z) \in S$  .

كذلك مهما كان العنصران  $L_i, L_j \in S'$  فإن :

$$L_i L_j(z) = \frac{(a_i a_j + c_i c_j) z + (b_i a_j + d_i b_j)}{(a_i c_j + c_i d_j) z + (b_i c_j + d_i d_j)}$$

فلو لاحظنا أن معين هذا التمثيل الحاصل :

$$(a_i a_j + c_i c_j)(b_i c_j + d_i d_j) - (b_i a_j + d_i b_j)(a_i c_j + c_i d_j) = \\ = (a_i d_i - b_i c_i)(a_j d_j - b_j c_j) = 1$$

لنتج المطلوب .

٢١٤ - لدينا التمثيل :

$$w = f(z) = \frac{4}{(1+z)^2}$$

الذي ينقل نصف الدائرة  $z = 1$  إلى  $(-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2})$  إلى

منحنى مقيس  $C$  . احسب طول هذا المنحني

الحل : يعطى طول المنحني المطلوب ( استناداً إلى صفحة ٢٢٣ )

بالعلاقة :

$$S = \int_C ds = \int_{C_1} |f'(z)| ds$$

حيث رمزنا بـ  $C_1$  لنصف الدائرة المذكورة .

وبما أن :

$$f'(z) = -\frac{8}{(1+z)^3}$$

فانه يكون على محيط الدائرة  $|z| = 1$  :

$$f'(z) = \frac{8}{|1+z|^3} = \frac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{2}}$$

(  $\theta$  هي زاوية العدد  $z$  ) :

وهكذا نجد :

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{2} + 2 \lg(1 + \sqrt{2})$$



## تمارين للحل

٢١٥ - عين المنحني الذي ترسمه النقطة  $z$  في المستوي العقدي  $z$  وذلك في كل من الحالتين التاليتين :

$$z = (1 + e^{it})^2 \quad (١)$$

$$z = a(1 + it)e^{-it} \quad (٢)$$

( $a$  عدد حقيقي و  $t$  تتحول من  $-\infty$  إلى  $+\infty$ ).

٢١٦ - عين المنطقة أو المنحني الذي يتعين وفق الشروط التالية :

$$|z^2 - 1| < 1 \quad (١)$$

$$0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4} \quad (٢)$$

$$|z^{-1}| = 2 \quad (٣)$$

$$2z < 1 + z^2 \quad (٤)$$

برهن أن التوابع التالية  $w = f(z)$  تنقل الساحة المفروضة في المستوي

$$w = u + iv \quad \text{إلى الساحة المفروضة في المستوي } z = x + iy$$

٢١٧ -  $w = \lg z$  ينقل الساحة  $x^2 + y^2 \geq 1, y > 0$  إلى الشريط

$$0 < v < \pi, \quad u > 0$$

٢١٨ -  $w = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$  ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى شريط في المستوي

$w$  . عين عرض هذا الشريط .

٢١٩ -  $w = e^z$  ينقل الشريط  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  إلى الربع الأول من المستوي  $w$ .

٢٢٠ - ماهي الساحة التي تنتقل إليها الدائرة  $|z| < 1$  بواسطة التابع  $w = a(nz - z^n)$  حيث  $a > 0$  و  $n$  عدد صحيح أكبر من 1. احسب مساحة هذه الساحة.

٢٢١ - جد التمثيل  $w = f(z)$  الذي ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى الدائرة نفسها على أن تنتقل النقط  $z = -1, i, 1$  إلى النقط  $w = -1, \frac{3i+4}{5}, 1$ .

٢٢٢ - جد التمثيل  $w = f(z)$  الذي ينقل الساحة المحدودة بقوسى دائرتين تمران بالنقطتين  $z = a$  و  $z = b$  وبضلعان زاوية  $\frac{\pi}{2}$ ، إلى نصف المستوي  $\mathcal{A}(w) > 0$  على شكل  $z = a$  إلى النقطه  $w = 0$  والنقطه  $z = b$  إلى النقطه  $w = \infty$ .

٢٢٣ - جد التمثيل  $w = f(z)$  الذي ينقل المستوي المقطوع وفق المجالين  $z \leq a$  ؛  $z \geq b$  إلى المنطقه  $\mathcal{A}(w) > 0$  ( $a < b$ ).

٢٢٤ - جد التمثيل الذي ينقل المنطقه  $0 < a < |z| < b$  إلى مستطيل  $0 < \arg z < \pi$ .

٢٢٥ - جد التمثيل الذي ينقل داخل القطع المكافئ  $y^2 = 4x$  إلى نصف المستوي  $\mathcal{A}(w) > 0$ .

٢٢٦ - جد التمثيل الذي ينقل داخل القطع الزائد :

$$x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$$

• إلى المنطقة  $\Im w > 0$

٢٢٧ - برهن أن التابع  $w = \int_0^z (1-t^2)^{-\frac{1}{3}} (1+t^2)^{-\frac{2}{3}} dt$  الذي

ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى داخل معين زاويته  $60^\circ$  وطول ضلعه

$$\cdot \frac{1}{4} \frac{\pi}{\pi} I\left(\frac{1}{3}\right) I\left(\frac{1}{6}\right)$$

٢٢٨ - عين التابع الذي ينقل النصف العلوي من المستوي  $w$

المقطع منه المثلث QST

$$(w_Q = -b, w_S = a i, w_T = b, a > 0, b > 0)$$

• إلى النصف العلوي من المستوي  $z$

• ناقش الحالة عندما  $b \rightarrow 0$

٢٢٩ - برهن أن التابع :

$$w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^6)^{1/3}}$$

ينقل مسدس منتظم إلى دائرة الوحدة . ماهو طول ضلع

هذا المسدس

٢٣٠ - عين التابع الذي ينقل نصف الدائرة  $\Im z > 0$  إلى نصف

المستوي  $\Im w > 0$  المقطوع على طول القطعة  $(0, i)$ .

٢٣١ - عين التابع الذي ينقل الدائرة  $|z| < 1$  إلى الدائرة

$|w| < 1$  المقطوعة على طول القطعة المستقيمة  $(\frac{1}{2}, 2)$ .

٢٣٢ - برهن بوساطة التحويلين المتتاليين  $(z + \frac{1}{z})$   $\xi = -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

أن التحويل  $w = \frac{1}{\xi^2}$

$$w = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$$

ينقل النصف العلوي من الدائرة  $|z| < 1$  إلى المستوي  $w$  المقطوع على طول المحور الحقيقي الموجب على شكل تذبذب في النقط  $z = 0, 1, i$  إلى النقط  $w = 0, 1, \infty$  على الترتيب .

٢٣٤ - برهن أن التحويل  $w = \frac{2z}{1-z^2}$  ينقل اثنتين من المناطق الأربعة المحدودة بالدائرتين  $|z-1| = \sqrt{2}$  ،  $|z+1| = \sqrt{2}$  إلى  $|w| < 1$  .

### الاجوبة

٢١٥ - (١) قطع مكافئ ، (٢) فائتر دائرة

٢١٦ - (١) داخل ليمنسكات

(٢) خارج الدائرة  $(x+1)^2 + y^2 = 2$  من أجل

$x < 0$  ) وذلك اذا اخترنا قيم الزوايا بشكل

موافق ( .

(٣) دائرة

(٤) تقاطع الدائرتين  $x^2 + (y+1)^2 = 2$

$x^2 + (y-1)^2 = 2$  وخارجها .

٢١٨ -  $\frac{\pi}{2}$

٢٢٠ - داخل ابيسكلويد ، المساحة  $(n+1) \pi a^2 n$  .

$$w = \frac{2z + 1}{z + 2} \quad - \quad ۲۲۱$$

$$w = c \left( \frac{z - a}{z - b} \right)^\alpha \quad - \quad ۲۲۲$$

$$w = \sqrt{\frac{z - a}{z - b}} \quad - \quad ۲۲۴$$

$$w = \lg z \quad - \quad ۲۲۵$$

$$z = w^2 + 2iw \quad - \quad ۲۲۶$$

$$z = 2 \operatorname{ch} \left\{ \frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \lg w + i\alpha \right\}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad - \quad ۲۲۷$$

$$w = K \int_0^z \frac{\xi^{2\alpha/\pi}}{(1 - \xi^2)^{\alpha/\pi}} d\xi + \alpha i \quad - \quad ۲۲۸$$

حيث :

$$K = \frac{(b - ai)^{\sqrt{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

وعندما  $b \rightarrow 0$  يكون  $w = a \sqrt{z^2 - 1}$

$$\frac{1}{6} \sqrt[3]{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad - \quad ۲۲۹$$

$$w = \sqrt{z^2 - 1} \quad - \quad ۲۳۰$$

$$w = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \quad - \quad ۲۳۱$$

## تمارين عامة

٢٣٤ - إذا كان لدينا ( في المستوي العقدي  $z$  ) نقطة  $k$  نقطة  $z_1, z_2, \dots, z_k$  وإذا كانت  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  أعداداً غير سالبة تحقق الشرط  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$  فعندئذ يقع العدد .

$$\zeta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_k z_k$$

في أصغر مضلع ( مغلق ) محدد بحوي النقط  $z_1, z_2, \dots, z_k$  .

هل يصح الأمر نفسه من أجل كل متتاليتين غير منتهيتين  $(z_n)$  ،  $(\alpha_n)$  يكون من أجلها  $\sum \alpha_n = 1$  والعدد  $\zeta = \sum \alpha_n z_n$  موجوداً ؟

٢٣٥ - إذا كان  $\alpha_n, z_n$  المعنى الوارد في المسألة السابقة فعندئذ يقع كل عدد  $\zeta$  يحقق الشرط :

$$\frac{\alpha_1}{\zeta - z_1} + \frac{\alpha_2}{\zeta - z_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{\zeta - z_k} = 0$$

في أصغر مضلع ( مغلق ) محدد بحوي النقط  $z_1, z_2, \dots, z_k$  .

٢٣٦ - برهن أن أصغر مضلع ( مغلق ) محدد بحوي جميع جذور تابع صحيح عادي ( كثير حدود )  $G(z)$  يحوي كذلك جميع جذور مشتقه .

٢٣٧ -- ليكن لدينا ( في المستوي العقدي  $z$  )  $n$  نقطة مفروضة

( $n \geq 4$ ) لا تقع أي أربع منها على محيط دائرة واحدة . وليكن  $L_\nu(z)$  تمثيلاً خطياً يكون من أجله  $L_\nu(z_\nu) = \infty$  ويكون لأصغر مضلع محدد  $\pi_\nu$  بجوى صور النقط المتبقية ، رأساً  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) فعندئذ يصبح مايلي :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 6(n-2) \quad (١)$$

(٢) لا يمكن أن يكون لكل مضلع  $\pi_n$  ستة رؤوس أو أكثر من ذلك .

(٣) إذا كان  $n < 12$  فعندئذ يكون من بين  $\pi_n$  مثلث أو شكل رباعي الاضلاع .

(٤) إذا لم يوجد في الحالة  $n \geq 12$  أي مثلث أو أي شكل رباعي فعندئذ يكون عدد الأشكال خماسية الاضلاع مساوياً ١٢ على الأقل .

٢٣٩ - برهن أن السلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha} \lg n}$$

متقاربة من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$  غير مساو للصفر .

٢٤٠ - إذا كانت  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  سلسلة قوى نصف قطر

تقاربها  $r > 0$  وإذا كانت  $(b_n)$  متتالية تحقق الشرط :

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \rightarrow \beta$$

وإذا كان  $|\beta| < r$  فعندئذ :

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{a_0 b_n a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0}{b_n} \rightarrow f(\beta) .$$

جد التابع التحليلي  $w(z)$  ضمن الشروط التالية :

$$w(0) = 0 : u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 - 240$$

$$u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x} - 241$$

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ حيث } \varphi \text{ تابع كيفي} - 242$$

٢٤٣ - عين قيمة التابع  $w = z^z = e^{z \lg z}$  في النقطة  $z = -e$  وذلك إذا فرضنا أن التابع  $w(z)$  يتغير بشكل مستمر على طول طريق في النصف العلوي من المستوي أو في النصف السفلي منه وإذا فرضنا أن  $\lg 1 = 0$ .

بوساطة نشر  $\frac{1}{\cos z}$  ونشر  $z \operatorname{ctg} z$  في سلاسل برهن صحة مايلي :

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} z^{2n-1} - 244$$

حيث  $|z| < \frac{\pi}{2}$  و  $B_n$  اعداد برنولي .

$$\lg \frac{\sin z}{z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n (2n)!} z^{2n}; |z| < \pi - 245$$

عين الحدود الستة الأولى في نشور التوابع التالية وعين ساحات تقاربها :

$$w = \frac{z}{\lg(1+z)} - 246$$

$$w = \frac{z}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} z} - 247$$

٢٤٨ - عين دائرة تقارب سلسلة القوى لكل من التابعين :



$$\frac{\cos 2\pi z^2}{\cos \pi z} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z}$$

انشر التوابع التالية في الساعات المذكورة بجانب كل منها .

$$|z| < 1 \quad ; \quad \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} - 249$$

$$|z| < 2 \quad ; \quad \frac{2}{(z^2-1)(z^2-4)^2} - 250$$

$$|z| > 2 \quad \text{التابع السابق نفسه من أجل} - 251$$

$$\frac{1}{z-2} \lg \frac{z-i}{z+i} - 252 \quad \text{عندما } |z| < 2 \text{ وذلك إذا فرضنا}$$

ان قيمة اللوغارتم من أجل  $z=2i$  حقيقية . كذلك عندما  $|z| > 2$

$$z^5 e^{\frac{1}{z}} - 253$$

$$e^{z+\frac{1}{z}} - 254$$

$$- 255 \quad \text{إذا لم يكن للسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ على محيط دائرة}$$

التقارب سوى نقطة شاذة وحيدة  $z_0$  وإذا كانت هذه النقطة الشاذة قطباً مضاعفاً من المرتبة  $m$  فعندئذ تصح العلاقة :

$$a_n = \frac{A n^{m-1}}{z_0^n} [1 + \varepsilon(n)]$$

حيث يسعى  $\varepsilon(n)$  إلى الصفر عندما يسمى  $n$  إلى اللانهاية وحيث  $A$  ثابت احسب تكاملات التوابع التالية على المنحنيات المذكورة بجانب كل

منها على ان يتم التكامل في الاتجاه الموجب .

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} \quad - \quad ٢٥٦$$

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y \quad \text{على الدائرة}$$

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)^2} \quad - \quad ٢٥٧$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \quad \text{على الاستروئيد}$$

$$\int \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} \quad - \quad ٢٥٨$$

$$|z| = 2 \quad \text{على الدائرة}$$

احسب التكاملات التالية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad - \quad ٢٥٩$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{(x^2+a^2)^2} \quad - \quad ٢٦٠$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1+x^{2n}} \quad - \quad ٢٦١$$

عندما  $m < n$  (  $m$  و  $n$  عددان صحيحان )

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + a} \quad - \quad ٢٦٢$$

عندما  $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi d\varphi}{1-2p\cos \varphi + p^2} \quad - \quad ٢٦٣$$

$|p| < 1$

احسب ، باستعمال دساتير كوشي ، التكاملات التالية الممتدة على المنحنيات المذكورة بجانب كل منها .

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^z}{z-2} dz \quad - \quad ٢٦٤$$

الممتد على (١) الدائرة  $|z|=3$

(٢) الدائرة  $|z|=1$

$$|z|=5 \text{ على الدائرة } \int \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz - 265$$

$$|z|=2 \text{ على الدائرة } \int \frac{e^{iz}}{z^3} dz - 266$$

$$|z|=1 \text{ على الدائرة } \int \frac{\sin 6z}{(z - \pi/6)^3} dz - 267$$

برهن صحة المتطابقات التالية :

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p} (1-x)^p}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi p (1-p)}{8 \sin \pi p} 2^p - 268$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\lg^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{\lg^2 a + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2} - 269$$

$a > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx = \pi (e^{-a} - \frac{1}{2}) - 270$$

$a > 0$

عين ، بالاستعانة بنظرية روشي ، عدد حلول كل من المعادلتين

التاليتين الواقعة ضمن الدائرة  $|z| < 1$

$$z^6 - 6z + 10 = 0 - 271$$

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0 - 272$$

- 273 - (الساحة العقدية) م - ١٨

كم حل يوجد لكل من المعادلتين التاليتين في كل ربع من ارباع  
المستوي .

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0 \quad - \quad ٢٧٣$$

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0 \quad - \quad ٢٧٤$$

٢٧٥ - برهن انه يوجد للمعادلة  $z = a e^z$  ، حيث  $0 < a < \frac{1}{e}$  ،

حل وحيد داخل الدائرة  $z \leq 1$

٢٧٦ - برهن أنه يوجد للمعادلة  $z^2 = a e^z$  ، حيث

$0 < a < \frac{1}{e}$  حلان داخل  $z < 1$  برهن كذلك أن هذين الحلين

حقيقيان ومن اشارتين مختلفتين

٢٧٧ - برهن أن جميع حلول المعادلة :

$$(z - a)^n - k^n (z - b)^n = 0$$

تقع على محيط دائرة

٢٧٨ - عين صورة النصف العلوي من المستوي  $z$  حسب التمثيل

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{عندما} \quad w = \frac{\pi}{2} \quad \text{وذلك إذا علمت أن} \quad \cos w = \operatorname{ch} a \cos z$$

٢٧٩ - إن التابع  $w = (1 + \frac{z}{n})^n$  ينقل المنطقة  $s_n$  إلى نصف

المستوي العلوي . عين  $s_n$  ثم عين  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  .

٢٨٠ - عين التمثيل الذي ينقل نصف الدائرة  $|z| < 1$  ،

إلى النصف العلوي من المستوي  $w$  على أن تنتقل

النقط  $z = 0, 1, -1$  إلى النقط  $w = 0, 1, -1$  .

الاجوبة

$$w = z^3 (1 - 2i) \quad - \quad ٢٤٠$$

$$w = \operatorname{ctg} z \quad - \quad ٢٤١$$

$$w = \alpha i \lg z + \beta i + \gamma \quad - \quad ٢٤٢$$

(حقيقية كيفية)

$$w = e^{-e(1+\pi i)} \quad - \quad ٢٤٣$$

$$w = e^{-e(1-\pi i)} \quad \text{يكون}$$

$$w = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} - \frac{z^3}{24} - \frac{19z^4}{720} - \frac{49z^5}{480} - \dots \quad - \quad ٢٤٦$$

$$w = 1 + \frac{z}{4} - \frac{4z^4}{45} + \frac{44}{945} z^6 - \frac{428}{14175} z^8 + \frac{10196}{46775} z^{10} + \dots \quad - \quad ٢٤٧$$

٢٤٨ - يمكن نشر كل من التابعين في المستوي كله .

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^{2v+1}}{4^v} \quad - \quad ٢٤٩$$

$$n < 0 \quad \text{من أجل} \quad a_n = 1 \quad \text{حيث} \quad \frac{1}{9} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{2n} \quad - \quad ٢٥٠$$

$$n > 0 \quad \text{من أجل} \quad a_n = \frac{3n+7}{4^{n+2}}$$

$$\frac{1}{9} \sum_1^{\infty} \frac{1 + (3n-7)4^{n-2}}{z^{2n}} \quad - \quad ٢٥١$$

$$\text{عندما } 1 < |z| < 2 \quad \text{يكون النشر} \quad - \quad ٢٥٢$$

$$a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{وعندما } |z| > 2 \text{ يكون :}$$

حيث :

$$c_{2n} = c_{2n+1} = -i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) 2^{2n-1}} \right)$$

$$a = -\frac{1}{2} \lg \frac{2-i}{2+i} \quad b_n = a + c_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+5}}{n!} \quad - 253$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + z^{-n}) \quad - 254$$

حيث :

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu! (n+\nu)!} \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

$$\frac{3\pi i}{64} \quad - 257 \quad \frac{-\pi i}{2} \quad - 256$$

$$\pi \sqrt{2} \quad - 259 \quad 0 \quad - 258$$

$$\frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} \quad - 261 \quad \frac{\pi}{2a} \quad - 260$$

$$\pi \frac{1+p^4}{1-p^2} \quad - 263 \quad \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad - 262$$

$$2\pi i \quad - 265 \quad \text{صفر (2)} \quad a^2 (1) \quad - 264$$

$$\frac{21 \pi i}{16} - 267$$

$$- \pi i - 266$$

$$5 - 272$$

$$0 - 271$$

273 - حل في كل ربع 274 - حل في كل ربع

278 - النصف العلوي من المستوي بمقاطع شاقولية بين النقط

$$n \pi + a i \text{ و } n \pi$$

279 -  $S_n$  هي الساحة داخل الزاوية الحادة المفتوحة نحو اليمين والتي

قياسها  $\frac{\pi}{n}$  ورأسها  $z = -n$  واحد اضلاعها على محور السينات . اما نهاية

$S_n$  عندما  $n \rightarrow \infty$  فهو شريط عرضه  $\pi$  .

$$w = \frac{2z}{1+z^2} - 280$$

$$w = \frac{1}{a} (z^2 - a^2) - 281$$