الفصل السادس

التمديد التحليلي Analytic Continuation

١ ـ نظرية المطابقة في التوابع الهولومورفية : إذا كان لدينا تابعان هولومورفيان في ساحة G وكانت قيم هذين التابعين من أجل مجموعة غير منتهية من النقاط E متساوية وكان لـ E نقطة تجمع واحدة على الأقل منتمية لـ G فعندئذ يكون التابعان متساويين أينما كان في الساحة G .

٢ ـ لايمكن لتابع $f(z)$ هولومورفي في ساحة G أن يكون له سوى عدد منته من المواضع a في كل ساحة مغلقة ومحدودة G' جزئية من G مالم يكن التابع $f(z)$ مطابقاً لـ a . (الموضع a لتابع $f(z)$ هوذاك الموضع z_0 الذي يكون من أجله $a = f(z_0)$) .

٣ ـ اذا كان التابع $f(z)$ هولومورفياً في ساحة G فعندئذ يمكننا أن نحيط كل نقطة z_0 من G بدائرة صغيرة على شكل تكون فيه قيمة التابع في كل نقطة من هذه الدائرة غير مساوية لقيمته في مركزها z_0 باستثناء الحالة التي يكون فيها للتابع $f(z)$ القيمة نفسها في كل G . وينتج من هذا ان أصفار التابع $f(z)$ منعزلة في G .

٤ ـ إذا كان التابعان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هولومورفيين في G وإذا كانت قيمتا هذين التابعين في نقطة z_0 من G متساويتين وكانت كذلك قيم جميع مشتقاتهما في هذه النقطة متساوية فعندئذ يكون هذان التابعان متطابقين في G .

مبدأ التمديد التحليلي :

٥ ـ نظرية : لنفرض أن تابعاً $f_1(z)$ هولومورفي في ساحة G_1 ولنكن

G_2 ساحة تشترك مع G_1 بساحة جزئية g ولا تشترك معها في سوى ذلك . فاذا وجد تابع آخر $f_2(z)$ هولومورفي في G_2 ويتطابق مع $f_1(z)$ في g فعندئذ يكون هذا التابع وحيداً .

ندعو كلاً من $f_1(z)$ و $f_2(z)$ امتداداً تحليلياً للآخر كما أنهما يعتبران عناصر لتابع واحد $F(z)$ هولومورفي في الساحة الكلية .

٦ – نظرية : إذا أمكن تمديد تابع لمتحول حقيقي x (معرف على قطعة من المحور الحقيقي k) إلى الساحة المركبة (أي إذا أمكن الوصول إلى تابع مركب هولومورفي في ساحة k ويتطابق مع التابع الأصلي على طول هذه القطعة) فعندئذ لايوجد سوى شكل وحيد لهذا التمديد .

إن كل تابع حقيقي عادي $P(x)/Q(x)$ [$P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود في x] قابل للتمدد إلى المستوي المركب كله باستثناء النقط التي تعدم مخرجه ويكون $F(z) = P(z)/Q(z)$ هو امتداده كما . أن e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ قابلة للتمديد إلى المستوي المركب كله وتكون امتدادات هذه هي e^z ، $\sin z$ ، $\cos z$.

٧ – إذا كان $f_1(z)$ هولومورفياً في ساحة G_1 وإذا كانت z_1 نقطة ما من G_1 فعندئذ يمكننا أن ننشر $f_1(z)$ في سلسلة قوى حول z_1 ، وأما نصف قطر تقارب هذه السلسلة فانه قد يكون غير محدود ، وبالتالي يكون التابع هولومورفياً في المستوي المركب كله ، أو يكون محدوداً . فاذا ما حاولنا في الحالة الثانية تمديد السلسلة تحليلياً إلى خارج دائرة التقارب فعندئذ نجد أنه لايمكن ان تمتد إلى جميع الاتجاهات وانه يوجد على محيط هذه الدائرة نقطة شاذة واحدة على الأقل للتابع الممثل بالسلسلة المذكورة .

وإذا كان تمديد السلسلة غير ممكن في أي اتجاه فعندئذ نقول عن التابع المفروض انه غير قابل للامتداد ويكون محيط دائرة التقارب المفروضة الحد الطبيعي للسلسلة .

٨ – اذا كانت G ساحة بسيطة الترابط وكان $f_o(z) = \sum a_n (z - z_o)^n$ عنصراً لتابع تحليلي في z_o من G ، واذا استطعنا ان نمدد $f_o(z)$ بدءاً من z_o وعلى

طول كل طريق ينتمي لـ G فعندئذ يعطينا هذا التمديد تابعاً هولومورفياً وحيد القيمة في الساحة G كلها (نسمي كل منحن مستمر مقيس طريقاً) .

٩ ــ مبدأ التناظر (مبدأ schwarz) : ليكن f (z) تابعاً هولومورفياً على جانب من مجال (a , b) من المحور الحقيقي وعلى قطعة المجـــال نفسها ولنفرض أن قيم التابع على طول هذه القطعة حقيقية فعندئذ يكون التابع قابلاً للتمديد عبر (a , b) ويأخـــذ في النقط المتناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي قيماً مركبة مترافقة .

* * *

تمارين

١٧٠ ـ لتكن لدينا المطابقة $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ التي تصح ، كما نعلم ، من أجل القيم الحقيقية لـ z برهن انها تصح كذلك من أجل القيم المركبة لـ z .

الحل : ليكن لدينا التابع $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ ولتكن G ساحة ما من المستوي المركب تحوي قطعة من المحور الحقيقي .

لما كان كل من $\sin z$ و $\cos z$ هولومورفياً في G فإن $F(z)$ هولومورفي كذلك . وبما أن $F(z) = 0$ على طول المحور الحقيقي فإن $F(z)$ يطابق الصفر في G ومنه ينتج أن $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ من أجل جميع قيم z في G وحيث أن G كيفية فإن العلاقة المذكورة تصح من أجل جميع القيم المركبة لـ z .

١٧١ ـ برهن أن التابع :

$$F_1(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$$

هولومورفي في الساحة $|z| < 1$. أوجد بعد ذلك التابع الذي يمثل جميع تمديداته التحليلية الممكنة .

الحل : نجد بسهولة (اختبار النسبة) أن السلسلة متقاربة عندما $|z| < 1$ ولذا فإن هذه السلسلة تمثل تابعاً هولومورفياً في الساحة المذكورة . ان مجموع هذه السلسلة ، عندما $|z| < 1$ ، هو $F_2(z) = \dfrac{z}{1+z}$. ولكن

هذا التابع هولومورفي من اجـل جميع نقط المستوي باستثناء $z = -1$

كما انه يكون $F_2(z) = F_1(z)$ داخل الدائرة $|z| = 1$ ولذا فـإن

$F_2(z)$ هو التابع المطلوب .

١٧٢ – برهن أن التابـع المعرف بالعلاقة $F_1(z)=\int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt$

هولومورفي في نصف المستوي $R(z) > 0$. أوجد بعد ذلـك امتداده

التحليلي إلى النصف الآخر من المستوي

الحل : بالتـكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M t^3 \; e^{-zt}\, dt$$

$$\lim_{M\to\infty} \Big\{ (t^3)\Big(\frac{e^{-zt}}{-z}\Big) - (3t^2)\Big(\frac{e^{-zt}}{z^2}\Big) + (6t)\Big(\frac{e^{-zt}}{-z^3}\Big) - 6\Big(\frac{e^{-zt}}{z^4}\Big)\Big\}\Big|_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \Big\{ \frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6Me^{-Mz}}{z^3} - \frac{6e^{-Mz}}{z^4} \Big\}$$

وهذه النهاية تساوي $\frac{6}{z^4}$ إذا كان $R(z) > 0$

إلا أن التابع $F_2(z) = \frac{6}{z^4}$ هولومورفي في المستوي كلـه باستثناء

$z = 0$ كما أن $F_2(z) = F_1(z)$ من أجل نصف المستوي الأيمن ولذلك

نرى أن $F_2(z)$ هو الامتداد التحليلي المطلوب .

١٧٣ – هل التـــابـع $F(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ المعرف على المحور الحقيقي $-\infty < x < +\infty$ قابل للتمديد إلى الساحة المركبة .

الحل : لايمكن تمديد التابـع المفروض إلى الساحة المركبة لأنه غير قابل للاشتقاق في النقطة $x = o$.

أو نقول : إذا كان $x > o$ فإن $F(x) = x$ قابل للتمديد ويكون $F(z) = z$ هو امتداده ، كذلك إذا كان $x < o$ فان $F(x) = -x$ قابل للتمديد و يكون امتداده هو $F(z) = -z$ ولكن لايمكن تمديـد تابـع ما بشكلين مختلفين .

١٧٤ – هل التابع الحقيقي $F(x)$ المعرف في المجـال $-1 < x < 1$ والذي يســاوي $e^{-\frac{1}{x^2}}$ من أجل $x \neq o$ ويساوي o من أجـــل $x = o$ قابل للتمديد إلى الساحة المركبة (ليلاحظ أن التابع $f(x)$ ذو مشتقات مستمرة من أية مرتبة كانت وذلك في جميـع نقاط المجال المعرف به).

الحل : لايمكن إيجاد تابـع هولوموري في ساحة G يحوي القطعـة $-1 < x < +1$ ويتفق مع $f(x)$ على طول هذه القطعة لأن التابـع المرشح ليمثل هذا الأمتداد هو e^{-1/z^2} ، كما يتضح من قيم التابـع من أجـل $o < x < +1$ ، ولكن هذا التابع ذو نقطة شاذة أساسية في الموضع o .

١٧٥ – إذا كانت $g_o, g_1, \dots, g_n, \dots$ متتالية من الأعـــداد الصحيحة الموجبة وإذا كان كل حد من حدود هذه المتتالية أكبر أو يساوي 2 فعندئذ تمثل السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{g_0 g_1 \ldots g_n}}{1 - z^{g_0 g_1 \ldots g_n}}$$

تابعاً هولومورفياً في الساحة $|z| < 1$ غير قابل للتمديد عبر دائرة الوحدة مطلقاً .

الحل : من الواضح أن هذه السلسلة تمثل تابعاً هولومورفياً في الساحة $|z| < 1$ لأنه إذا كان $|z| \leqslant \varrho < 1$ فان :

$$\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| \leqslant \frac{1}{1 - \varrho^n} \varrho^n \leqslant \frac{1}{1 - \varrho} \varrho^n$$

منه نلاحظ أن السلسلة تكون متقاربة إذا كان $|z| < 1$ ، وبالتالي تمثل تابعاً هولومورفياً .

ولدراسة تمديد هذا التابع نفرض ζ جذراً للعدد 1 من المرتبة $g_0 g_1 \ldots g_p$ (حيث p عدد ثابت أكبر أو يساوي الصفر) أي :

$$\zeta^{g_0 g_1 \ldots g_p} = 1$$

لنضع :

$$z = \varrho \zeta \qquad (0 < \varrho < 1)$$

فعندئذ يكون :

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^{g_0 \ldots g_n}}{1 - z^{g_0 \ldots g_n}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\varrho^{g_0 \ldots g_n}}{1 - \varrho^{g_0 \ldots g_n}}$$

وإذا جعلنا $\varrho \to 1 +$ فإننا نلاحظ أن هذه السلسلة تسعى إلى $+\infty$.

وأما مجموع الحدود الأولى من السلسلة والتي عددها p فإنه يشكل تابعاً عادياً هولومورفياً ولذلك فإنها تبقى محدودة عندما $z \to \zeta$.

وهكذا نرى أن ξ موضع شاذ للتابع $f(z)$. وبما أن النقاط ξ كثيفة على $|z| = 1$ فانه لايمكن للتابع $f(z)$ ان يكون قابلاً للتمديد عبر دائرة لوحدة .

١٧٦ – لنفرض $f(z)$ تابعاً مستمراً في ساحة G وانه ، بغض النظر عن خط مضلعي k منتم لـ G ، قابل للاشتقاق في الساحة نفسها برهن أنه لابد أن يكون هذا التابع تحليلياً في نقاط هذا الخط المضلعي (يمكن لطرفي k أن تقع على محيط G) .

الحل : لتكن z_0 نقطة ما من k ولتكن C دائرة مركزها z_0 واقعة في G وتقطع k في نقطتين (لا أكثر ولا أقل) فعندئـذ تتجزأ الساحة المحدودة بـ C إلى ساحتين جزئيتين G_1 ; G_2 لنرمز لمحيط الأولى بـ C_1 ولمحيط الثانية بـ C_2 .

وبما أن التابع $f(z)$ هولومورفي في داخل الساحة G_1 (المحاطة بقوس دائري وبعدد محدود من القطع المستقيمة) ومستمر على هذه الساحة مع محيطها فإنه يكون استناداً إلى دستور كوشي (ص ٩٣) وبفرض أن z نقطة من G_1 :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = f(z) \quad , \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0$$

أي أن :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad (1)$$

بطريقة مماثلة يمكن برهان صحة هذه العلاقة من أجل كل نقطة z داخل G_2 .

ولكننا نعلم أن كل تكامل من الشكل :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

حيث C طريق كيفي و $\varphi(z)$ تابع مستمر على هذا الطريق ، يمثل تابعاً $f(z)$ هولومورفياً في كل ساحة G لاتحوي اية نقطة من C .

ولذلك فإن $f(z)$ تحليلي في z_0 وهو المطلوب .

١٧٧ – لنفرض $f_1(z)$ تابعاً هولومورفياً في ساحة G_1 و $f_2(z)$ تابعاً هولومورفياً في ساحة G_2 ولنفرض أن هاتين الساحتين متصادمتان وفق خط مضلعي k ، نقصد بذلك أن نقاط هذا الخط المضلعي هي نقاط حديه لكل من الساحتين . ولنفرض كذلك أن لـ f_1 , f_2 قيماً حدية متساوية من أجل جميع نقاط k . برهن أن كلاً من هذين التابعين امتداد تحليلي للآخر .

الحل : إن قيم التابع f_1 على k تشكل تابعاً مستمراً لأنه إذا كان $f(z)$ تابعاً مستمراً على الساحة الداخلية لطريق مغلق خال من النقط المضاعفة C ويقبل في كل نقطة حدية ζ قيمة حدية $f(\zeta)$ فإن القيم الحدية $f(\zeta)$ تشكل تابعاً مستمراً على C . ولبرهان ذلك يكفي أن نعود إلى تعريف الاستمرار على منحن وإلى تعريف القيمة الحدية (القيمة الحدية لتابع في نقطة حدية ζ هي القيمة $f_1(\zeta)$ التي تجعل من التابع $f(z)$ مستمراً في ζ من داخل الساحة المعرف بها) .

وبذلك تكون شروط المسألة السابقة محققة والتابع $f_1(z)$ امتداد تحليلي لـ $f_2(z)$ وبالعكس .

١٧٨ - ليكن التابع المعرّف بالسلسلة .

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

والمطلوب إثبات أن هذا التابع كثير قيم وذلك بوساطة تمديده تحليلياً بدءاً من النقطة O وعلى طول دائرة حول النقطة 1 + في الاتجاه السالب حتى نعود ثانية إلى النقطة O .

الحل : لتكن ... , z_1 , z_2 رؤوس مضلع منتظم على الدائرة $|z-1|=1$ وليكن p عدد رؤوس هذا المضلع $p > 6$ ولتكن النقطة O أحد هذه الرؤوس فعندئذ يكون :

$$z_n = 1 - e^{\frac{-2\nu\pi i}{p}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

لننشر التابع المفروض حول z_1 . من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

$$F^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k} \quad (k > 1)$$

وبالتالي يكون هذا النشر .

$$F(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-z_1}{1-z_1} \right)^n =$$

$$= F(z_1) + F\left(\frac{z-z_1}{1-z_1} \right)$$

ولما كان $|1-z_1| = 1$ فإن نصف القطر لدائرة تقارب النشر الأخير مساو للواحد ثانية وبالتالي تقع النقطة z_2 داخل دائرة التقارب الجديدة

($|z_2 - z_1| < 1$ لأن عدد أضلاع المضلع أكثر من 6) .

وبما أن :

$$\frac{d}{dz} F\left(\frac{z - z_1}{1 - z_1}\right) = \frac{1}{1 - z_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - z}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} F\left(\frac{z - z_1}{1 - z_1}\right) = \frac{(k-1)!}{(1 - z)^k}$$

فان النشر في الموضع z_2 يكون :

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + F\left(\frac{z - z_2}{1 - z_2}\right)$$

وبتكرار العملية p مرة نصل الى النشر التالي في الموضع $z_p = z_o = o$:

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + \cdots + F\left(\frac{z_p - z_{p-1}}{1 - z_{p-1}}\right) + F\left(\frac{z - z_p}{1 - z_p}\right)$$

وبما أن السلسلة الواردة في هذا النشر (الحـد الأخير من العبارة الأخيرة) مطابقة لـ $F(z)$ فانه ينتج أن التابـع $F(z)$ قابـل للتمديد حول $z = 1$ وان قيمته تزداد بعد عودته الى نقطة البدء بالثابت الاضافي :

$$F(z_1) + F\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - z_1}\right) + \ldots + F\left(\frac{z_p - z_{p-1}}{1 - z_{p-1}}\right)$$

لحساب هذا التابـع نلاحظ :

$$\frac{z_\nu - z_{\nu-1}}{1 - z_{\nu-1}} = \frac{e^{\frac{-2(\nu-1)\pi i}{p}} - e^{\frac{-2\nu\pi i}{p}}}{e^{\frac{-2(\nu-1)\pi i}{p}}} = 1 - e^{\frac{-2\pi i}{p}} = z_1$$

وبالتالي يكون الثابت الاضافي مساوياً $p F(z_1)$ أي :

$$p\left(1 - e^{\frac{-2\pi i}{p}}\right)\left[1 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_1^2}{3} + \cdots\right]$$

وبما أنه يلزم أن تكون القيمة مستقلة عن p فإننا نحصل عليها بجعل p تسعى إلى ∞ عندئذ يسعى z_1 إلى الصفر وتكون الثابتة مساوية $2\pi i$.

۱۷۹ – لانعلم عن سلسلة القوى $f(z) = \sum a_n z^n$ سوى أن التابع $f(z)$ الذي يمثلها ذو نقطة شاذة وحيدة z_0 على محيط دائرة التقارب وأن هذه النقطة الشاذة قطب بسيط . والمطلوب البرهان أن :

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \longrightarrow r \quad \text{و} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \longrightarrow z_0$$

بفرض أن r نصف قطر تقارب السلسلة :

الحل : لتكن c قيمة الراسب عند القطب z_0 فعندئذ يكون التابع $f(z) - \frac{c}{z - z_0}$ تحليلياً في z_0 وبالتالي يكون هذا تابعاً هولومورفياً في دائرة $|z| < R$ حيث $R > |z_0| = r$.

لنضع الآن : $$f(z) - \frac{c}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

فعندئذ يكون بشكل خاص :

$$b_n z_0^n \longrightarrow 0$$

ولكن بما أن :

$$\frac{c}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{c}{z_0^{\,n+1}} \right) z^n$$

فاننا نجد بسهولة أن :

$$a_n = b_n - \frac{c}{z_0^{\,n+1}}$$

ومنه :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1} z_o^{n+1} - c}{b_{n+1} z_o^{n+2} - c} z_o \longrightarrow z_o$$

وهو المطلوب الأول ومنه ينتج مباشرة المطلوب الثاني

١٨٠ – (١) برهن أن السلسلة :

$$F_1(z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \cdots$$

متقاربة من أجل $|z| < 1$

(٢) وان السلسلة :

$$F_2(z) = \frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}\lg 2 + \left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^3 + \cdots$$

متقاربة من أجل $|z-i| < \sqrt{2}$

(٣) برهن أن كلاً من $F_1(z)$ و $F_2(z)$ امتداد تحليلي للآخر .

(٤) ماهو التابع الذي يمثل جميع التمديدات التحليلية الممكنة لـ $F_1(z)$.

الحل : يمكن بسهولة استناداً إلى اختبار النسبة التحقق من صحة الطلبين الأول والثاني .

ولبرهان الطلب الثالث نلاحظ أن الموضع $z = o$ يقع داخل دائرة تقارب السلسلة الثانية ولذلك يمكن نشر التابع $F_2(z)$ في جوار $z = o$ من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$F_2(0) = \frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{i}{1-i} + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{i-1}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}\lg 2 - \lg \frac{1}{1-i} = 0$$

$$F'_2(z) = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1-i}\left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

$$F_2^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$$

وبالتالي يكون نشر $F_2(z)$ بجوار $z=0$ هو :

$$z + \frac{z^2}{2} + \cdots$$

وهذه هي السلسلة الأولى . واستناداً إلى نظرية التمديدات التحليلية وإلى أن دائرتي التقارب مشتركتان بساحة جزئية مشتركة فإنه يمكن اعتبار كل من التابعين $F_1(z)$ و $F_2(z)$ امتداداً تحليلياً للآخر .

ولبرهان الطلب الرابع نلاحظ أن $F_1(z) = -\lg(1-z)$ من أجل $|z| < 1$ ولكن التابع $-\lg(1-z)$ هولومورفي في المستوي المركب كله باستثناء $z = 1$ ولذلك يمكن اعتباره ممثلاً لجميع الامتدادات التحليلية الممكنة لـ $F_1(z)$.

★ ★ ★

تمارين للحل

١٨١ - برهن أن $F_1(z) = \int_0^\infty (1+t)\, e^{-zt}\, dt$ لا يتقارب إلا إذا كان $R(z) > 0$.

(٢) أوجـد الامتـــداد التحليلي لـ $F_1(z)$ إلى النصف الأيسر من المستوي .

١٨٢ - أوجد ساحة تقارب :

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-(z+1)^2 t}\, dt$$

(٢) أوجد قيمة الامتداد التحليلي لـ $F_1(z)$ في الموضع $z = 2-4i$

١٨٣ - برهن أن السلسلة :

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^4}{1-z^8} + \cdots$$

تساوي $z/(1-z)$ عندما $|z| < 1$ وتساوي $1/(z-1)$ عندما $|z| > 1$.

ناقش هذه النتيجة وفق وجهة نظر التمديد التحليلي .

١٨٤ - برهن أنه لا يمكن أبداً تمديد السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ تحليليـــاً إلى خارج الدائرة $|z| = 1$.

١٨٥ – لنفرض أن نصف قطر تقارب السلسلة $F(z)=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^{n+1}$ مساوياً 1 . فإذا وضعنا $z=\frac{\xi}{1-\xi}$ ثم نشرنا كل حد $a_n z^{n+1}$ حسب سلسلة قوى في ξ ثم رتبنا السلسلة المضاعفة حسب قوى ξ كذلك فعندئذ نحصل على سلسلة $F_1(\xi)$. ما هي أمثال السلسلة وما هو نصف قطر تقاربها . كيف يمكن من جهة أخرى الحصول على نصف تقارب $F_1(\xi)$ انطلاقاً من الخواص التحليلية للتابع $F(z)$ ما هي أعظم قيمة لنصف قطر التقارب وما هي أصغر قيمة له .

١٨٦ – ما هو ، ضمن شروط المسألة السابقة ، الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع $f(z)$ الممثل بالسلسلة $F(z)$ في $|z| < 1$ تحليلياً في $z=1$.

١٨٧ – برهن ، بوساطـــة المسألتين السابقتين أن التابعين الممثلين بالسلسلتين :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \text{و} \quad \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$$

تحليليان في $+1$.

١٨٨ – ليكن $f(z)$ تابعاً هولومورفياً في النقطة $z=o$ ومحققاً في جوار هذه النقطة المعادلة .

$$f(2z) = 2f(z) \cdot f'(z)$$

بين أن $f(z)$ قابل للتمديد في كل المستوي

١٨٩ – برهن أن سلاسل القوى التالية غير قابلة للتمديد مطلقاً .

(1) $\sum_{n=o}^{\infty} z^{2^n}$

(2) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)}$

(3) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$

(4) $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$

الأجوبة ١٨١- $\frac{z+1}{z^2}$

١٨٢ - (١) $R(z+1)^2 > o$ (٢) $\frac{-7+24i}{625}$

١٨٥ - $\frac{1}{2} \leqslant \varrho \leqslant +\infty$

* * *