# الفصل الخامس

## نظرية الرواسب وتطبيقاتها

**تعريف :** لتكن $z = a$ نقطة شاذة منعزلة من النوع الأول للتابع $f(z)$ ( أي أن النقطة $a$ هي إما قطب أو نقطة شاذة أساسية للتابع ) . عندها يمكن نشر $f(z)$ في جوار $a$ وفق سلسلة لوران التالية :

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

( العدد الطبيعي $n$ منته إذا كانت $a$ قطباً للتابع $f(z)$ ، وغير منته إذا كانت $a$ نقطة شاذة اساسية ) .

نسمي الأمثال $c_{-1}$ راسب التابع $f(z)$ في النقطة الشاذة $z = a$ ونرمز له بـ $\operatorname{Res} f(a)$ أو بـ $\operatorname{Res}[f(z)]_{z=a}$ .

**حساب الرواسب :** إن إيجاد راسب التابع $f(z)$ بجوار $z = a$ يتم في الحالة العامة بنشر التابع في جوار هذه النقطة . أما إذا كانت $z = a$ قطباً من المرتبة $n$ للتابع $f(z)$ فيمكن عندئذ حساب الراسب بالدستور :

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z-a)^n f(z) \}$$

وإذا كانت $z = a$ قطباً بسيطاً للتابع ، وكان $f(z)$ هو حاصل قسمة تابعين تحليليين في هذه النقطة أي :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$(\psi'(a) \neq 0 \text{ ، } \psi(a) = 0 \text{ ، } \varphi(a) \neq 0)$ .

فان الدستور الأخير يعطي :

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

**الراسب في النقطة عند اللانهاية :** إذا كان $f(z)$ تابعاً قابلا للنشر حسب سلسلة لوران في المنطقة $|z| > R$ ، فان الراسب في النقطة $z = \infty$ يعطى بالدستور :

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_1$$

بفرض $c_1$ أمثـال $z^{-1}$ في نشر لوران للتابع $f(z)$ في جوار اللانهايه . إن:

$$\int_{C^+} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty)$$

حيث C محيط بسيط مغلق واقع في المنطقة $|z| > R$ ، شريطـة أن لايوجد خارجه نقاط شاذة عدا النقطة $z = \infty$ .

ليكن $f(z)$ تابعاً مستمراً على المحيط c لمنطقة و هولومورفياً داخل هذه الساحة باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة ( أقطاب أو نقاط شاذة اساسية ) . عندها يكون تكامل هذا التابع على C معيناً بالدستور .

$$\int_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k)$$

واذا كان تابعاً هولو مورفياً في المستوي كله باستثناء عدد منته من النقـاط الشاذة ( اقطاب أو نقاط شاذة أساسية ) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ فإنه يكون :

$$\operatorname{Res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k) = 0$$

نستخدم احياناً عند حساب بعض التكاملات التمهيدين التاليين :

**تمهيد ( آ ) :** إذا كان التابع $f(z)$ مستمراً في جوار النقطـة $z = a$ ( باستثناء النقطة a نفسها ) ، بحيث يسعى $(z-a) f(z)$ إلى الصفر مع $|z-a|$ ، فان التكامل $\int f(z)\, dz$ على أي قوس من محيط الدائرة التي مركزها a يسعى إلى الصفر مع نصف قطرها $z - a$ .

**تمهيد ( ب ) :** إذا كان $f(z)$ تابعاً مستمراً خارج الدائرة التي مركزها

في النقطة $a$ ، بحيث يسعى $(z-a)f(z)$ إلى الصفر ، عندما $z-a$ يسعى الى اللانهاية ، فان التكامل $\int f(z)\,dz$ على أي قوس من محيط هــذه الدائرة يسعى إلى الصفر مع مقلوب نصف قطرها $\frac{1}{|z-a|}$ .

**تمهيــد جوردان :** إذا كان $f(z)$ مستمراً في المنطقة $|z| \geqslant R$ ، $\operatorname{Im} z \geqslant -a$ ($a$ عدد حقيقي مثبت ) ، وكان $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ مهما كان $\operatorname{Arg} z$ ، فاننا نجد مهما كان العدد الموجب $m$ أن :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0$$

بفرض $C_R$ قوس محيط الدائرة $|z| = R$ الموجود في المنطقة المذكورة .

**مبدأ الدليل ونظرية روشيه :** ليكن $w = f(z)$ تابعاً هولومورفياً داخل الساحة $D$ التي محيطها $C$ ومستمراً في الساحة $\overline{D} = D \cup C$ ، ولنفرض أنــه $\forall z \in C$ فان $f(z) \neq 0$ . ليكن المنحني $\Gamma$ صورة $C$ في المستوي $(w)$ وفق التطبيق $w = f(z)$ . ان الفضل بين القيمتين النهائية والابتدائية لدليل $f(z)$ عندما ترسم $z$ المحيط $C$ مرة واحدة بالاتجاه الموجب يسمى تغير دليــل التابــع $f(z)$ . فلو رمزنا لهذا التغيير بـ $V[f(z), z \in C]$ لأمكننا التعبير عن مبدأ الدليل بالمساواة التالية :

$$V[f(z) \text{ و } z \in C] = 2\pi N$$

حيث $N$ هو عدد أصفار التابــع $f(z)$ في $D$ .

ومن التطبيقات المباشرة لمبدأ الدليل نظرية روشي ( Rouché ) التي نصها كما يلي : ليكن $f(z)$ ، $\varphi(z)$ تابعين هولومورفين داخل المنطقة $D$ التي محيطها $C$ ، ومستمرين في المنطقة $\overline{D} = D \cup C$ ، ومحققــين المــتراجحة $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| > 1$ على $C$ ؛ عندها يكون للتابعين $f(z)$ ، $f(z) + \varphi(z)$ عدد واحد من الاصفار داخل $C$ .

ويمكن تعميم مبدأ الدليل على حالة التوابع الميرومورفية على النحو التالي :

إن تغير دليل التابع $w = f(z)$ الميرومورفي في الساحة $D' \supset \bar{D}$ ( شريطة أن لايكون لهـذا التابع اصفار أو اقطاب على C ) يعطى بالدستور التالي :

$$V[\, f(z)\ ,\, z \in C\,] = 2\pi\,(N - P)$$

حيث N عدد الاصفار ، P عدد الاقطاب في D .

**ملاحظـة :** ينبغي ان نعتبر في هذه الدساتير الصفر المضاعف من المرتبة n ( القطب المضاعف من المرتبة p ) وكأنه n صفراً بسيطاً ( p قطباً بسيطاً ) .

★ ★ ★

# تمارين

أوجد في التمارين ١٣٨ – ١٣٩ رواسب التوابع في كل النقاط الشاذة المنعزلة وفي النقطة عند اللانهاية .

**١٣٨** – $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$

بما أن : $f(z) = \frac{1}{z^3(1 - z^2)}$ فإن لهذا التابع قطباً من المرتبة الثالثة هو $z = 0$ وقطبين بسيطين هما $z = 1$ ، $z = -1$ . لننشر $f(z)$ في جوار $z = 0$ ، فنجد :

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(1 - z^2)^{-1} = \frac{1}{z^3}(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n} + \dots) =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + z + \dots + z^{2n-3} + \dots$$

وبالتالي فإن : $\text{Res}\, f(0) = 1$

ولإيجاد $\text{Res}\, f(+1)$ ، $\text{Res}\, f(-1)$ نفرض $z - 1 = u$ ، $z + 1 = v$ على الترتيب ، ثم ننشر $f(1 + u)$ في جوار $u = 0$ و $f(v - 1)$ في جوار $v = 0$ ، فنجد $\text{Res}\, f(\pm 1) = + \frac{1}{2}$ .

أما $\text{Res}\, f(\infty)$ فهو أمثال $-u$ في نشر $f(\frac{1}{u})$ في جوار $u = 0$ .

وبما أن :

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{u^3}{1-\frac{1}{u^2}}=-\frac{u^5}{1-u^2}=-u^5(1+u^2+\dots)=-u^5-u^7-\dots$$

فإننا نستنتج أن :

$$\mathrm{Res}\, f(\infty)=0$$

**١٣٩** - $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ ( $n$ عدد طبيعي ) :

إن $z=-1$ هو قطب للتابع من المرتبة $n$ ، لذا فإن :

$$\mathrm{Res}\, f(-1)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}z^{2n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}\times$$

$$2n(2n-1)\dots(n+2)=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

ولحساب الراسب في اللانهاية ننشر $f\left(\frac{1}{u}\right)$ في جوار الصفر ، فنجد :

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{u^n}(1+u)^{-n}=\frac{1}{u^n}\Big[1-\frac{n}{1}u+\frac{n(n+1)}{2!}u^2$$

$$+\dots+(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)\dots 2n}{(n+1)!}u^{n+1}+\dots\Big]$$

لذا فإن :

$$\mathrm{Res}\, f(\infty)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=-\mathrm{Res}\, f(-1).$$

**١٤٠** - $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

إن لهذا التابع أقطاباً بسيطة في النقاط $z=\frac{1}{k\pi}$ حيث $(k=\pm 1,\pm 2,\dots)$.

لذا فإن :

$$\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{k\pi}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{k\pi}}-\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}}=(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2\pi^2}$$

لايجاد $\mathrm{Res}\, f(\infty)$ ننشر $f\left(\frac{1}{u}\right)$ في جوار $u = o$ فنجد :

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} + \frac{u}{6} + \frac{7}{360} u^3 + \cdots$$

$$\mathrm{Res}\, f(\infty) = -\frac{1}{6}$$

**١٤١** — أوجد راسبي فرعي التابـع :

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1 - z}$$

**الحل** : في النقطة $z = 1$ .

إن $\mathrm{Res}\, f(1) = \left[\sqrt{z}\right]_{z=1}$

ولما كان للتابع $\sqrt{z}$ في كل نقطة $x$ من المحور الحقيقي قيمتان هما $\sqrt{x}$ ، $-\sqrt{x}$ ، فان الراسبين $+1$ ، $-1$ .

**١٤٢** — أوجد رواسب فروع التابعين :

$$f(z) = \log \frac{z - \alpha}{z - \beta} \qquad (١)$$

$$g(z) = e^z \log \frac{z - \alpha}{z - \beta} \qquad (٢)$$

**الحل** : نعوض في هذين التابعين $z = \frac{1}{u}$ ، ثم ننشر في جـــوار $u = o$ .

إن أمثال $u$ في نشر التابـع ( 1 ) هي $\beta - \alpha$ وفي نشر التابـع ( 2 ) هي :

$$\beta - \alpha + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{1!\,2} + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{2!\,3} + \cdots + \frac{\beta^n - \alpha^n}{(n-1)!\,n} + \cdots = e^\beta - e^\alpha$$

لذا فان :

$\operatorname{Res} f(\infty) = \alpha - \beta$ من أجل كل فروع التابع $f(z)$

$\operatorname{Res} g(\infty) = e^{\alpha} - e^{\beta}$ من أجل كل فروع التابع $g(z)$

**١٤٣** - أوجد رواسب فروع التابع $f(z) = z^n \log \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$

( n عدد صحيح ) في النقطة $z = o$ والنقطة $z = \infty$ ( $\alpha \neq o$ ، $\beta \neq o$ ).

من الواضح أنه إذا كان $n \geqslant o$ فان $\operatorname{Res} f(o) = o$

أما إذا كان $n = -1$ ( $z = o$ قطب بسيط ) فان :

$$\operatorname{Res} f(o) = \lim_{z \to o} \log \frac{z-\alpha}{z-\beta} = \log \frac{\alpha}{\beta} .$$

وإذا كان $n \leqslant -2$ فان :

$$\operatorname{Res} f(o) = \frac{1}{(-n-1)!} \lim_{z \to o} \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}} \log \frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}).$$

ولايجاد الراسب عند النقطة $z = \infty$ نعوض $z = \dfrac{1}{u}$ في $f(z)$ فنجد .

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^n} \log \frac{1-\alpha u}{1-\beta u}$$

فاذا كان $n \geqslant o$ غدا هذا الراسب هو أمثال $-u^{n+1}$ في نشر اللغاريتم في جوار $u = o$ وباجراء هذا النشر نجد :

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$$

أما إذا كان $n = -1$ فإن الراسب في اللانهاية هو نظير أمثال الحد الثابت في نشر $\log \dfrac{1-\alpha u}{1-\beta u}$ في جوار $u = o$ ولكن هذا الحد هو $2k\pi i$

لذا فإننا نجد في الحالة $n = -1$ أن :

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -2k\pi i$$

وأخيراً إذا كان $n \leqslant -2$ ، فإن أصغر قوة لـ $u$ في نشر التابع $f(\frac{1}{u})$ هي $-n$ ، $(-n \geqslant 2)$ ، وبالتالي فعندما $n \leqslant -2$ نجد أن :

$$\operatorname{Res} f(\infty) = 0 \cdot$$

١٤٤ – أوجد $\operatorname{Res}[\varphi(z) f(z)]_{z=a}$ ، بفرض $\varphi(z)$ تابعاً هولومورفيا في النقطة $a$ وأن للتابع $f(z)$ في هذه النقطة .

(١) قطباً بسيطاً راسب التابع فيه يساوي $A$

(٢) قطباً من المرتبة $k$ ، وأن القسم الرئيسي للتابع هو :

$$\frac{C_{-1}}{z-a} + \cdots + \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$$

الحل : (١) في هذه الحالة

$$\operatorname{Res}[\varphi(a) f(a)] = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \varphi(z) = \lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \lim_{z \to a} \varphi(z) = A \varphi(a)$$

(٢) بما أن $z = a$ هو قطب من المرتبة $k$ فان :

$$\operatorname{Res}[\varphi(a) f(a)] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z) \varphi(z) \right\} .$$

لدينا :

$$(z-a)^k f(z) \varphi(z) = (z-a)^k \sum_{n=-k}^{n=+\infty} c_n (z-a)^{+n} \cdot \varphi(z) =$$

$$= \varphi(z) \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k}$$

واستناداً الى دستور اشتقاق الجداء ، يمكننا أن نكتب :

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ \varphi(z) \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} \right] =$$

$$= \varphi(z)\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k} + \frac{k-1}{1!}\varphi'(z)\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}$$

$$+\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\varphi''(z)\frac{d^{k-3}}{dz^{k-3}}\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}+\dots$$

$$+\varphi^{(k-1)}(z)\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}$$

لذا فان :

$$\text{Res}\,[\varphi(a)\,f(a)] = \frac{1}{(k-1)!}[\varphi(a)\,c_{-1}(k-1)!+$$

$$+\varphi'(a)\frac{k-1}{1!}c_{-2}(k-2)!+$$

$$\varphi''(a)\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\;c_{-3}(k-3)!+\dots+\varphi^{(k-1)}(a)\,c_{-k}] =$$

$$= c_{-1}\varphi(a) + \frac{c_{-2}\,\varphi'(a)}{2!} + \frac{c_{-3}\,\varphi''(a)}{2!} + \dots + \frac{c_{-k}\,\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}\,.$$

**١٤٥** أوجد $\text{Res}\left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$ مع العلم بأن $\varphi(z)$ ، **تابع هولو مورفي في جوار النقطة a ، وأن :**

(١) a صفر من المرتبة m للتابع $f(z)$ أو

(٢) a قطب من المرتبة n للتابع $f(z)$

**حالة خاصة** : أوجد في نفس الشروط $\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]$

**الحـــل** : (١) إن $z = a$ هو صفر بسيط للتابع $\frac{f(z)}{f'(z)}$ . لنفرض

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k\,.$$

عندها يمكننا أن نكتب :

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = (z-a)\psi(z)$$

حيث :

$$\psi(z) = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k (z-a)^{k-m}}{\sum_{k=m}^{\infty} k\, \alpha_k (z-a)^{k-m}}$$

وبالتالي فإن : $\psi(a) = \frac{1}{m} \neq o$ .

أن :

$$\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-a)\,\psi(z)}$$

لذا فاننا نجد في النتيجة :

$$\text{Res}\left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a} = \text{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{(z-a)\,\psi(z)}\right]_{z=a} =$$

$$= \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = m\,\varphi(a)$$

( ٢ ) عندما تكون النقطة a قطباً من المرتبة n لِـ f(z) ، فاننا نجد الراسب باعادة الحسابات الواردة في ( ١ ) شريطة أن نستبدل بالعـدد الطبيعي m العدد n - . عندها نجد أنه في هذه الحالة يكون :

$$\text{Res}\left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a} = -n\,\varphi(a)$$

**الحالة الخاصة** : في هـــذه الحالة $\varphi(z) \equiv 1$ ، وبالتالي فان $\varphi(a) = 1$ ، لذا نجد أن :

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a} = n \text{ ،}$$

عندما تكون النقطة a صفراً من المرتبة n للتابع f (z) ، كما نجد أن :

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a} = -n \text{ ،}$$

عندما تكون النقطة a قطباً من المرتبة n للتابع f (z) .

## حساب التكاملات

### ١ ـ حساب تكاملات بعض التوابع وحيدة القيمة

**١٤٦** – احسب التكامل $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$ ، بفرض C محيط الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 2x$ .

**الحل** : إن التابع المكامل $\frac{1}{z^4+1}$ هولومورفي على المحيط C وداخله باستثناء النقطتين $z = e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$ الموجودتين داخل C واللتين تشكلان قطبين بسيطين للتابع . وبالتالي فان :

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[ \operatorname{Res} f\left(e^{+i\frac{\pi}{4}}\right) + \operatorname{Res} f\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \right].$$

ولما كان :

$$\operatorname{Res} f\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right) = \left[\frac{1}{4Z^3}\right]_{z=e^{\pm i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{\mp i\frac{3\pi}{4}}}{4}$$

فاننا نجد :

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = \pi i \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{+i\frac{3\pi}{4}}}{2} = \pi i \cos\frac{3\pi}{4} = -i\frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

**١٤٧** - احسب التكامل :

$I = \int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ ، بفرض C محيط الدائرة $|z| = 2$ .

**الحل** - إن للتابع المكامل $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ خمسة اقطاب بسيطة داخل C . فاذا رمزنا لمجموع رواسب هذا التابع في هذه النقاط بـ S فإن :

$$I = 2\pi i\, S$$

من المعلوم أن :

$$S + \text{Res}\, f(3) + \text{Res}\, f(\infty) = 0 ;$$

ولما كان :

$$\text{Res}\, f(3) = \lim_{z\to 3} \frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{242} ,$$

$$\text{Res}\, f(\infty) = 0 ,$$

( تأكد من صحة هذه المساواة ! ) فإن :

$$S = -\frac{1}{242} .$$

لذا فإننا ، نجد في النتيجة :

$$I = \int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -\frac{\pi i}{121} .$$

**١٤٨** - احسب قيمة التكامل المحدد :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\, a \cos \varphi + a^2}$$

بفرض a عدداً عقدياً ، $( |a| \neq 1 )$ .

**الحل** : نفرض $z = e^{i\varphi}$ . لما كان .

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2z}(z^2+1) \text{ و } d\varphi = \frac{1}{i}\,\frac{dz}{z} .$$

فإن صيغة التكامل تغدو على الشكل التالي :

$$I = i \int_\gamma \frac{dz}{az^2 - (a^2+1)\, z + a}$$

بفرض $\gamma$ محيط الدائرة $|z| = 1$ . إن التابع المكامل $f(z) = \frac{1}{az^2 - (a^2+1)\, z + a}$ هولورفي على المحيط $\gamma$ وداخله الا في النقطة $z = \frac{1}{a}$ ( في الحالة $|a| > 1$ ) أو النقطة $z = a$ ( في الحالة $|a| < 1$ ) .

وفي الحالة الأولى تشكل النقطة $\frac{1}{a}$ قطباً بسيطاً للتابع ، بينما تشكل النقطة a قطباً بسيطاً للتابع في الحالة الثانية . لدينا :

$$\operatorname{Res} f(a^{\pm 1}) = \left[ \frac{1}{2\, a\, z - (a^2 + 1)} \right]_{z = a^{\pm 1}} = \frac{1}{\pm (a^2 - 1)} ,$$

لذا فان :

$$I = i \cdot 2\pi i \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2}$$

في الحالة $|a| < 1$ ، كما أن :

$$I = i \cdot 2\pi i \frac{1}{-(a^2 - 1)} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}$$

في الحالة $|a| > 1$ .

**١٤٩** – احسب قيمة التكامل المحدد :

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cdot \cos(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi$$

بفرض n عدداً صحيحاً أو صفراً .

**الحل** : لنرمز بـ J للتكامل المحدد :

$$J = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cdot \sin(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi$$

إن :

$$I - iJ = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} e^{-i(n\varphi - \sin\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \cdot e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} d\varphi$$

فاذا فرضنا $z = e^{i\varphi}$ ، نجد أن :

$$I - iJ = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$$

حيث رمزنا بـ $\gamma$ المحيط الدائري $|z| = 1$ .

إن التابع المكامل $f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}$ هولومورفي على المحيط $\gamma$ وداخله عندما $n + 1 \leqslant 0$ ( أي عندما $n < 0$ ) ، لذا نجد في هذه الحالة استناداً إلى نظرية كوشي أن

$$I - iJ = 0$$

وبالتالي فعندما $n < 0$ يكون :

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cdot \cos(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = 0 .$$

أما إذا كان $n + 1 > 0$ (أو $n \geqslant 0$ ) ، فان التابع $f(z)$ هولومورفي على $\gamma$ وداخله باستثناء النقطة $z = 0$ التي تمثل قطباً مضاعفاً لـ $f(z)$ من المرتبة $n + 1$ . لذا نجد في هذه الحالة أن :

$$I - iJ = \frac{1}{i} 2\pi i \operatorname{Res} f(o) = 2\pi \frac{1}{n!} \lim_{z \to o} \frac{d^n}{dz^n} e^z = \frac{2\pi}{n!}$$

أو :

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{2\pi}{n!}$$

**نتيجة** : نلاحظ مما سبق أنه مهما كان العدد الصحيح n ، فان :

$$J = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \sin(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = o .$$

( أوجد هذه النتيجة مباشرة ) .

**ملاحظة** : كان بامكاننا إيجاد قيمة التكامل $\int_\gamma$ بتطبيق دستور كوشي على التابع $e^z$ الهولومورفي في جوار النقطة $z = o$ والذي يخولنا كتابة المساواة التالية :

$$\lim_{z \to o} \frac{d^n}{dz^n} e^z = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{(z - o)^{n+1}} dz$$

أي أن :

$$\frac{2\pi}{n!} = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{e^z}{z^{n+1}} dz .$$

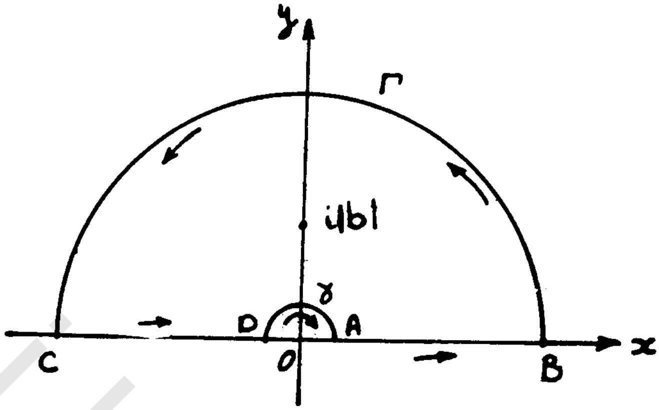
**١٥٠** – احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x(x^2 + b^2)^2}$$

بفرض b ، a عددين حقيقيين ، $(a > o)$ .

**الحل** : لنختر التابع : $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)^2}$ ، ولنكامله على المحيط ABCDA ( الشكل ١٠ ) ، إن هذا التابع هولومورفي على هذا المحيط

وداخله ( مهما كان نصف القطر $OA = r$ صغيراً ونصف القطر $OB = R$




( شكل ١٠ )

كبيراً ) باستثناء النقطة $z = |b| i$ التي تشكل قطباً مضاعفاً من المرتبة الثانية لهذا التابع . إن راسب $f(z)$ في هذه النقطة هو :

$$\operatorname{Res} f(|b| i) = \lim_{z \to i|b|} \frac{d}{dz} \frac{e^{iaz}}{z(z+i|b|)^2} = -\frac{e^{-|ab|}}{4 b^4}(2 + |ab|).$$

وبتطبيق نظرية الرواسب ، يمكننا أن نكتب :

$$\int_{AB} f(z)\, dz + \int_{\Gamma} f(z)\, dz + \int_{CD} f(z)\, dz + \int_{\gamma} f(z)\, dz = -i\pi \frac{e^{-|ab|}}{2 b^4}(2 + |ab|). \tag{1}$$

$$\int_{AB} f(z)\, dz = \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)^2}\, dx \tag{2}$$

$$\int_{CD} f(z)\, dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)}\, dx \tag{3}$$

لنجعل $r \to O$ ، $R \to \infty$ ، فنجد أن التكامل ( 2 ) ينتهي إلى التكامل المطلوب :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)^2}\, dx$$

كما ينتهي التكامل (3) إلى التكامل :

$$-\int_0^{-\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)^2}\, dx = -\int_0^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x(x^2+b^2)^2}\, dx$$

أما التكامل على نصف الدائرة $\gamma$ فنجريه بعد نشر التابع $f(z)$ في جوار الصفر وفق سلسلة لوران التالية :

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[1 + iaz + \frac{(iaz)^2}{2} + \cdots\right] \cdot \frac{1}{b^4}\left(1 - \frac{2z^2}{b^2} + \cdots\right)$$

لذا فان :

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{b^4}\int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma P(z)dz = \frac{1}{b^4}\int_\pi^0 \frac{r e^{i\varphi} i d\varphi}{r e^{i\varphi}} + O(r) = -\frac{i\pi}{b^4} + O(r)$$

بفرض $P(z)$ تابعاً مستمراً في النقطة $z = o$ ، $O(r)$ تابعاً لامتناهياً في الصغر عندما $r \to o$ .

إن التابع $Q(z)$ المعين بالمساواة

$$f(z) = Q(z) \cdot e^{iaz}$$

يحقق على $\Gamma$ المتراجحة :

$$|Q(z)| = \left|\frac{1}{z(z^2+b^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{R(R^2-b^2)^2}$$

لذا فان $|Q(z)| \to o$ عندما $R \to \infty$ ، وبالتالي فيمكننا استناداً الى تمهيد جوردان ان نكتب :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = o$$

وبالرجوع إلى المساواة (1) وجعل $r \to o$ ، $R \to \infty$ فيها ، نجد :

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{e^{-iax}}{x(x^2+b^2)^2}\,dx = -i\pi\left[\frac{e^{-|ab|}}{2\,b^4}(2+|ab|) - \frac{1}{b^4}\right]$$

أو :

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4\,b^4}\left[2-(2+|ab|)\,e^{-|ab|}\right]$$

**١٥١** – احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \quad , \ (o < a < 1)$$

( ١ ) باستخدام نظرية الرواسب .

( ٢ ) استناداً الى التكاملات الأولرية .

**الحل** : ( ١ ) لنأخذ التابع :

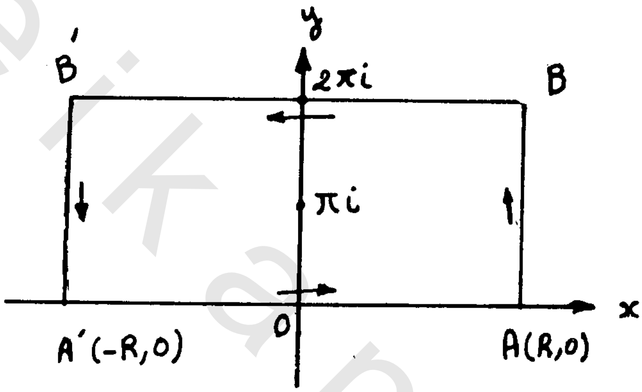
$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^{z}}$$

ولنكامله على المحيط $A'A\,BB'$ ( الشكل ١١ ) . إن هذا التابع هولومورفي على هذا المحيط وداخله ( مهما كانت $R$ فاصلة النقطة $A$ ) باستثناء النقطة $z = \pi i$ التي تشكل قطباً بسيطاً للتابع ، حيث الراسب يساوي :

$$\operatorname{Res} f(\pi i) = \left[ \frac{e^{az}}{e^{z}} \right]_{z=\pi i} = -e^{a\pi i}$$

وبتطبيق نظرية الرواسب يمكننا أن نكتب :

$$\int_{A'A} f(z)dz + \int_{AB} f(z)\, dz + \int_{BB'} f(z)\, dz + \int_{B'A'} f(z)\, dz = -\, 2\pi i e^{a\pi i} \quad (1)$$




( شكل ١١ )

من الواضح أن :

$$\int_{A'A} f(z)\, dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx \,.$$

$$\int_{BB'} f(z)\, dz = \int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\, dx = -\, e^{2a\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx$$

أما التكاملان $\int_{AB}$ ، $\int_{B'A'}$ فيسعيان الى الصفر مع $\frac{1}{R}$ ، وذلـك لأنه عندما تتزايد R بلا تناه ، فيمكن اعتبار كل من AB ، B' A' قوسين من دائرة مركزها O ونصف قطرها R كبير جداً . وبالاضافة إلى هذا ، فيمكننا أن نكتب أنه على AB :

$$|z f(z)| = \left|(R+iy) \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \sqrt{R^2+y^2}\, \frac{e^{aR}}{e^R-1} =$$

$$= \sqrt{R^2+y^2}\, \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}}$$

وعلى $B'A'$ :

$$|z f(z)| = \left|(-R+iy) \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leqslant \sqrt{R^2+y^2}\, \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}$$

ولما كان $|z f(z)|$ يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ في كلا الحالين ، فاننا نحكم ، استناداً إلى التمهيد (ب) :

أن التكاملين $\int_{AB}$ ، $\int_{B'A}$ يسعيان كذلك إلى الصفر . وهكذا يمكننا كتابة المساواة ( 1 ) على الشكل :

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + O\left(\frac{1}{R}\right) = -2\pi i\, e^{a\pi i}$$

ولو جعلنا الآن $R \to \infty$ ، فاننا نجد :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot \qquad (2)$$

(٢) لنجر تغيير المتحول u بالمتحول x وفق الدستور $e^x = \frac{u}{1-u}$ ،فنجد

$$I = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{-a}\, du$$

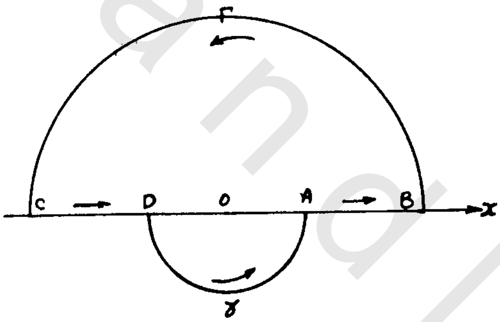
ولما كان $o < a < 1$ ، فإن لهذا التكامل معنى ويساوي :

$$I = B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

**١٥٢** - احسب قيمة التكامل :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

**الحـــل** : لنأخذ التابع $f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$ ولتـــكامله على المحيط $AB\,\Gamma\,CD\,\gamma\,A$ ( الشكل ١٢ ) إن هذا التابع هولومورفي على هـــذا المحيط وداخله باستثناء النقطة $z = o$ التي تشكل قطباً بسيطاً لهـــذا التابع حيث الراسب :




( شكل ١٢ )

$$\operatorname{Res} f(o) = \lim_{z \to o} \frac{e^{2iz} - 1}{z} = 2i$$

وتطبيق نظرية الرواسب ، يمكننـــا أن نكتب ( بفرض $R$ ، $r$ نصفي قطري نصفي الدائرتين $\Gamma$ ، $\gamma$ ) :

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx + \int_{\gamma} f(z)dz = -4\pi \qquad (1)$$

وإذا لاحظنا أن :

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\,dx = \int_{r}^{R} \frac{e^{-2ix}-1}{x^2}\,dx$$

أي أن مجموع التكاملين الأول والثالث في المساواة ( 1 ) يساوي :

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{2ix}-1+e^{-2ix}-1}{x^2}\,dx = -4 \int_{r}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

فانه يمكننا إعادة كتابة ( 1 ) على الشكل التالي :

$$-4\int_{r}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz = -4\pi \qquad (1')$$

إن التكامل $\int_{\Gamma}$ يسعى إلى الصفر ، وذلك لأنه على $\Gamma$ يكون :

$$|z f(z)| = \left| \frac{e^{2iz}-1}{z} \right| = \left| \frac{e^{2iR(\cos\Theta + i\sin\Theta)}-1}{Re^{i\Theta}} \right| \leqslant \frac{e^{-2R\sin\Theta}+1}{R}$$

ومن الواضح أنه مهما كانت $\Theta$ ( $o \leqslant \Theta \leqslant \pi$ ) فان :

$$\lim_{R\to\infty} |z f(z)| = o$$

وبالتالي ، يمكننا أن نكتب استناداً إلى التمهيد ( ب ) أن :

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

لننتقل الآن الى التكامل $\int_{\gamma}$ . إذا نشرنا التابع المكامل وفق سلسلة لوران في جوار $z = o$ ، نجد أن :

$$f(z) = \frac{2iz + \frac{(2iz)^2}{2} + \frac{(2iz)^3}{6} + \cdots}{z^2} = \frac{2i}{z} + P(z)$$

بفرض $P(z)$ تابعاً مستمراً في النقطة $z = o$ ، وبالتالي فإن

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2i\int_{\gamma}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma} P(z)\,dz = 2i\int_{\pi}^{2\pi}\frac{re^{i\varphi}i\,d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) =$$
$$= -2\pi + O(r)$$

وهكذا ، فانه يمكن إعادة كتابة (١) على الشكل التالي :

$$-4\int_{r}^{R}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = -2\pi + O\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

وبجعل $r \to o$ ، $R \to \infty$ ، نجد أن :

$$\int_{o}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

## ٢ - حساب تكاملات بعض التوابع متعددة القيم

**١٥٣** - احسب قيمة التكامل :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$$

بفرض أن $\sqrt{1} = +1$ ، وأن $\Gamma$ هو القطع المكافىء $y^2 = x$ الذي

يتم السير عليه بحيث تتزايد قيم y .

**الحل** : لنرسم مستقيماً معادلة $x = a$ $(a > 1)$ ، فيتشكل محيط مغلق BOCAB . إن التابع المكامل .

$f(z) = \frac{1}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ هولوموفي على هـذا المحيط وداخله باستثناء النقطتين $e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$ اللتين تشكلان قطبين بسيطين للتابع .

لتكن M صورة النقطة z في المستوي ( z ) ، ولنفرض أن :

$$z - i = \varrho_1 e^{i(\theta_1 + 2k_1 \pi)}$$

$$z + i = \varrho_2 e^{i(\theta_2 + 2k_2 \pi)}$$

عندها يكون :

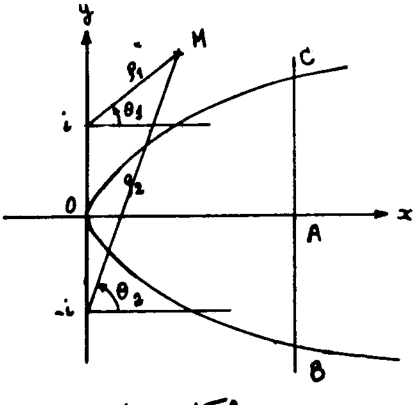
$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}\, e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad e^{ik\pi}$$

لنفرض الآن في المساواة الأخيرة $z = o$ ، عندها يأخذ $\sqrt{1+z^2}$ القيمة $+1$ فرضاً ، ويغدو $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ ، $\theta_1 = -\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ . فاذا عوضنا في المساواة الأخيرة نجد :

$$+1 = 1 \,.\, e^{ik\pi}$$

وكي تتحقق هذه المساواة ، يكفي أن نأخذ $k=o$ ؛ لذا فانه يتعين علينا أن نعتبر .

$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\varrho_1\varrho_2}\, e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$




( شكل ١٣ )

يمكننا الآن أن نكتب استناداً إلى نظرية الرواسب :

$$\int_{BOCAB} f(z)\,dz = \int_{BOC} f(z)\,dz + \int_{CAB} f(z)\,dz =$$

$$= -2\pi i\left[\operatorname{Res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \operatorname{Res} f\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right] \quad (1)$$

علما بأن :

$$\operatorname{Res} f\left(e^{\frac{\pm i\pi}{4}}\right) = \lim_{z \to e^{\pm i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3\sqrt{z^2+1}}$$

فإذا لاحظنا أن في النقطة $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ :

$$\varrho_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \varrho_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \Theta_1 = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1),\ \Theta_2 =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1),\ \Theta_1 - \Theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

وفي النقطة $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ :

$$\varrho_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \varrho_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \Theta_1 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1),\ \Theta_2 =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1),\ \Theta_1 - \Theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

وجدنا (بفرض $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)$ ) أن :

$$\operatorname{Res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \operatorname{Res} f\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}} +$$

$$+ \frac{1}{4e^{-i\frac{3\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}} =$$

$$= -\frac{e^{ia}}{4\sqrt{2}} - \frac{e^{-ia}}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\;\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\;\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}} = -\frac{1}{4}\;\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\,.$$

وهكذا يمكننا أن نكتب ( 1 ) على الشكل :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{BOC} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{CAB} f(z)\,dz = \frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}\,. \qquad (2)$$

لو جعلنا الآن $a \to \infty$ ، فاننا نجد أنه :

$$\lim_{a\to\infty}\int_{BOC} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

ويمكننا استناداً الى التمهيد (ب) أن نجزم بأن :

$$\lim_{a\to\infty}\int_{CAB} f(z)\,dz = 0$$

وذلك لأنه يمكن اعتبار القطعة المستقيمة CAB عندما $a \to \infty$ قوساً من دائرة مركزها O ونصف قطرها R لامتناه في الكـــبر ، ولأن :

$$\lim_{R\to\infty}|z\,f(z)| = \lim_{R\to\infty}\left|\frac{z}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}\right| \leqslant \lim_{R\to\infty}\frac{R}{(R^4-1)\sqrt{R^2-1}} = 0$$

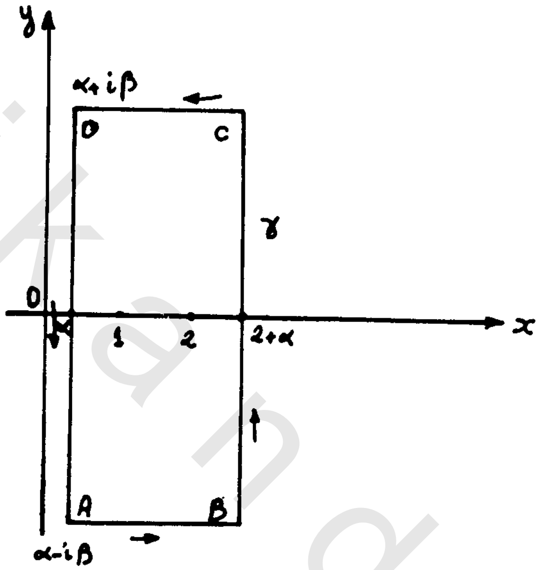
إن هذا يجعلنا نستنتج من (2) المساواة التالية .

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}\,.$$

١٥٤ – احسب قيمة التكامل .

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{a^z \sin \pi z}$$

بفرض أن $a > o$ ، $a^z = e^{z\log a}$ ، وإن C هو المستقيم $x = \alpha$ ،
( $o < \alpha < 1$ ) الذي يتم السير عليه بحيث تتزايد قيم y .




( شكل ١٣ )

الحل : لنرسم المستطيل $\gamma$ المشكل من المستقيمات $x = \alpha$ ، $x = 2 + \alpha$ ، $y = \alpha + i\beta$ ، $y = \alpha - i\beta$ ( $\beta > o$ ) ( انظر الى الشكل ١٣ ) .

إن التابع المكامل $f(z) = \frac{1}{e^{z\log a}\sin \pi z}$ هولومورفي على المحيط $\gamma$ وداخله ، باستثناء النقطتين $z = 1$ ، $z = 2$ ، اللتين تشكلان قطبين بسيطين للتابع $f(z)$ . إن الراسبين في هذين القطبين هما :

$$\text{Res}\, f(1) = \left[\frac{1}{e^{z\log a}\pi\cos\pi z}\right]_{z=1} = \frac{-1}{a\,\pi},$$

$$\text{Res}\, f(2) = \left[\frac{1}{e^{z\log a}\,\pi\cos\pi z}\right]_{z=2} = \frac{1}{a^2\pi}$$

يمكننا أن نكتب استناداً إلى نظرية الرواسب :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{DA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z) + \int_{BC} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz =$$

$$= 2\,\pi\, i\left(-\frac{1}{a\pi} + \frac{1}{a^2\pi}\right),$$

بفرض :

$$\int_{DA} f(z)\,dz = \int_{\beta}^{-\beta} \frac{i dy}{e^{(\alpha+iy)\log a}\sin\pi(\alpha+iy)},$$

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{2+\alpha} \frac{dx}{e^{(x-i\beta)\log a}\sin\pi(x-i\beta)},$$

$$\int_{BC} f(z)\,dz = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{i\,dy}{e^{(2+\alpha+iy)\log a}\sin\pi(2+\alpha+iy)} = -\frac{1}{a^2}\int_{DA} f(z)dz,$$

$$\int_{CD} f(z)\,dz = \int_{2+\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{e^{(x+i\beta)\log a}\sin\pi(x+i\beta)}$$

لنجعل $\beta \longrightarrow \infty$ ، فنجد أن :

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{DA} f(z)\,dz = -\int_{C} f(z)\,dz,$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{BC} f(z)\,dz = +\frac{1}{a^2}\int_{C} f(z)\,dz.$$

سنبين الآن أن :

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{AB} f(z)\,dz = o$$

بما أن التابع $f(z)$ مستمر على AB ، فيمكننا أن نكتب المتراجحة التالية :

$$\int_{\alpha}^{2+\alpha} \frac{dx}{e^{(x-i\beta)\log a}\sin\pi(x-i\beta)} < 2\max_{\text{على } AB}$$

$$\frac{2}{e^{x\log a}\left[\sin^2\pi x\, ch^2\pi\beta+\cos^2\pi x\, sh^2\pi\beta\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ولكن الطرف الأيمن من هذه المتراجحة يسعى الى الصفر عندما $\beta \to \infty$ ، وبالتالي فإن الطرف الايسر كذلك يسعى إلى الصفر عندما $\beta \to \infty$ .

ويمكننا بأتباع هذه الطريقة نفسها إثبات أن :

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{CD} f(z)\,dz = 0\ .$$

وهكذا ، فإننا نجد أخيراً أن

$$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{a\pi}+\frac{1}{a^2\pi}\right)$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{a^z\sin\pi z}=\frac{1}{\pi(1+a)}$$

**١٥٥** – برهن على صحة المساواة :

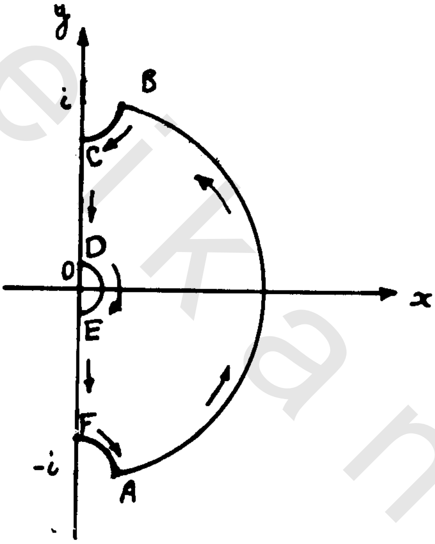
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^a\varphi\cos b\varphi\,d\varphi=\frac{\pi\,\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\,\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}$$

بفرض $b > a > -1$ .

**الحل** . لنختر التابع

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}$$

ولنكامله على المحيط ABCDEFA ، بفرض أن $\widehat{AB}$ قوس من دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 ، وأن $\widehat{BC}$ ، $\widehat{DE}$ ، $\widehat{FA}$ اقواس من دوائر مراكزها $i$ ، O ، $-i$ على الترتيب وانصاف أقطارها صغيرة وتساوي r . ( علل سبب اختيارنا لهذا التابع ولهذا المحيط ) . إن التابع f (z) هولومورفي على المحيط المذكور وداخله ، لذا يمكننا أن نكتب استناداً إلى نظرية كوشي ان :




( شكل ١٤ )

$$\int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{CD} + \int_{\widehat{DE}} + \int_{EF} + \int_{\widehat{FA}} = 0 . \qquad (1)$$

$$(1) \int_{\widehat{AB}} f(z)\,dz = i \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{+\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^a\, e^{ib\varphi}\, d\varphi = 2^a i$$

$$\times \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi\,(\cos b\varphi + i \sin b\varphi)\, d\varphi .$$

$$(2) \quad \int_{CD} f(z)\,dz = \int_{1-r}^{r} \left( \varrho\, e^{i\frac{\pi}{2}} + \varrho^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{a} \varrho^{b-1} e^{ib\frac{\pi}{2}}\, d\varrho =$$

$$= - e^{i\frac{\pi}{2}(b-a)} \int_{r}^{1-r} \varrho^{b-a-1} (1-\varrho^{2})^{a}\, d\varrho$$

$$(3) \quad \int_{EF} f(z)\,dz = e^{-i\frac{\pi}{2}(b-a)} \int_{r}^{1-r} \varrho^{b-a-1} (1-\varrho^{2})^{a}\, d\varrho$$

وإذا جعلنا الآن $r \to o$ ، فإن $\varepsilon \to o$ ، ونجد عند ذلك أن :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = 2^{a}\, i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{a}\varphi \,( \cos b\varphi + i \sin b\varphi )\, d\varphi$$

$$\lim_{r \to o} \int_{CD} f(z)\,dz = - e^{i\frac{\pi}{2}(b-a)} \int_{0}^{1} \varrho^{b-a-1} (1-\varrho^{2})^{a}\, d\varrho$$

ولو أجرينا في التكامل الأخير تغيير المتحول $\varrho = \sqrt{t}$ ، فإننا نستنتج أن :

$$\lim_{r \to o} \int_{CD} f(z)\,dz = -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(b-a)} \int_{0}^{1} t^{\frac{b-a}{2}-1} (1-t)^{a}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(b-a)}\, B\left(\frac{b-a}{2}, a+1\right)$$

ونجد بصورة مماثلة أن :

$$\lim_{r \to o} \int_{EF} f(z)\,dz = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(b-a)}\, B\left(\frac{b-a}{2}, a+1\right)$$

ومن السهل التأكد من أن التكاملات الثلاثة $\int\limits_{\overset{\frown}{BC}}$ ، $\int\limits_{\overset{\frown}{DE}}$ ، $\int\limits_{\overset{\frown}{FA}}$ تسعى إلى الصفر مع r . لنثبت ذلك مثلاً من أجل التكامل $\int\limits_{\overset{\frown}{DE}}$ ، إن :

$$|(z-o)\, f(z)| = |z^b (z + \frac{1}{z})^a| = |z^{b-a}| \cdot |(z^2+1)^a| =$$

$$= |z|^{b-a} \cdot |z^2+1|^a \leqslant |z|^{b-a} \cdot (|z^2|+1)^a = r^{b-a}(r^2+1)^a .$$

وإذا جعلنا $r \to o$ نجد ( بعد ملاحظة أنـــه $b-a > o$ فرضاً ) أن :

$$\lim_{|z-o| \to o} |(z-o)\, f(z)| = o$$

وبالتالي ، نجد استناداً إلى التمهيد ( أ ) أن .

$$\lim_{r \to o} \int\limits_{\overset{\frown}{DE}} f(z)\, dz = o$$

ونبرهن بصورة مماثلة على أن $\int\limits_{\overset{\frown}{BC}}$ ، $\int\limits_{\overset{\frown}{FA}}$ يسعيان إلى الصفر مع r

, وهكذا نرى أنه عندما $r \longrightarrow o$ ( وبالتالي $\varepsilon \longrightarrow o$ ) تغدو المساواة (1) على الشكل

$$2^a i \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \cos b\varphi d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \sin b\, \varphi\, b\varphi \right]$$

$$- \frac{1}{2} B\left( \frac{b-a}{2}, a+1 \right) \left[ e^{i \frac{\pi}{2}(b-a)} - e^{-i \frac{\pi}{2}(b-a)} \right] = o$$

فإذا لاحظنا أن التكاملين الواردين في هذه المساواة هما تكاملان لتابعين أحدهما زوجي والآخر فردي ، أمكننا أن نكتب :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \cos b\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2^{a+1}} B\left(\frac{b-a}{2}, a+1\right) \sin\frac{\pi}{2}(b-a) \quad (2)$$

يمكن كتابة الطرف الأيمن من هذه المساواة ، استناداً إلى الدستور :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

كما يلي :

$$\frac{1}{2^{a+1}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)} \sin\frac{\pi}{2}(b-a)$$

ولكن :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

إذن :

$$\Gamma\left(\frac{b-a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}(b-a)}$$

وهكذا ، فانه يمكن كتابة المساواة ( 2 ) على الشكل .

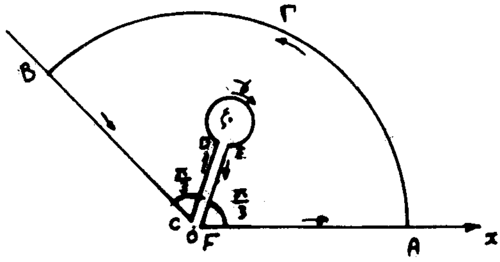
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \cos b\,\varphi \, d\,\varphi = \frac{\pi\,\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}$$

وهو المطلوب :

**١٥٦** - اثبت صحة العلاقة :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

وذلك بكاملة التابع $\frac{1}{\sqrt{z^3+1}}$ على محيط مناسب .




( شكل - ١٥ )

**الحل** : لنختر الساحة المحصورة بين المحور ox والمحور الذي يصنع معه زاوية قدرها $\frac{2\pi}{3}$ والقوس الدائري $\Gamma$ الذي مركز o مبدأ الاحداثيات ونصف قطره R ( R > 1 ) . إن التابع المكامل $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^3+1}}$ ليس هولومورفياً داخل هذه الساحة ، وذلك بسبب وجود النقطة $\zeta = e^{i\frac{\pi}{3}}$ التي تشكل نقطة حرجة جبرية ( نقطة تفرع ) للتابع . ولكننا إذا أجرينا مقطعاً يصل النقطة o بالنقطة الحرجة ( الشكل - ١٥ ) ، فان فرعي التابع f (z) يغدوان هولومورفيين على المحيط الناتج $FA\Gamma BCD\gamma EF$ وداخله ولما لم يكن للتابع داخل هذه الساحة ( أو خارجها ) نقاط شاذة منعزلة ( اقطاب أو نقاط شاذة أساسية ). فانه يمكننا أن نكتب استناداً إلى نظرية الرواسب ما يلي :

$$\int_{FA} + \int_{\Gamma} + \int_{BC} + \int_{CD} - \int_{\gamma} + \int_{EF} = 0 \qquad (1)$$

إن للتابع f (z) قيمتين ( أو تعينين أو فرعين ) داخل هذا المحيط . سنختار من هاتين القيمتين تلك القيمة التي تغدو موجبة على FA ، أي

أننا سنفرض $f(z) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ على FA . من الواضح أنه على BC :

$z = \varrho e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، $z^3+1 = \varrho^3+1$ . ولكن $\sqrt{z^3+1}$ يجب أن يساوي على BC المقدار $-\sqrt{\varrho^3+1}$ . وذلك لأنه عند الوصول إلى C نكون قد درنا دورة تامة حول النقطة الحرجة ع ، وبالتالي فانه قيمتي f (z) في المقطتين F ، C يجب أن تكونا متناظرتين . ولما كانت قيمة f ( z ) في النقطة F هي + ١ فرضاً ، فانه يلزم أن تكون قيمة f (z) هي ١ − في النقطة C ، وهذا لايتم إلا إذا افترضنا أن قيمة التابع على CB هي $-\sqrt{\varrho^3+1}$ .

كذلك فمن الواضح أنه على CD يكون : $z = \varrho e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $\sqrt{z^3+1} = -\sqrt{-\varrho^3+1}$ وأنه على EF يكون : $z = \varrho e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $\sqrt{z^3+1} = +\sqrt{-\varrho^3+1}$ ( علل سبب وجود إشارتي + ، − قبل الجذرين الحقيقيين )

هذا وإن التكاملين $\int_\Gamma$ ، $\int_\gamma$ يسعيان إلى الصفر عندما $R \to \infty$ ، $r \to 0$ ( r نصف قطر الدائرة $\gamma$ ) . وذلك لأنه على $\Gamma$ :

$$\left| \frac{z}{\sqrt{z^3+1}} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{|z^3+1|}} \leqslant \frac{|z|}{\sqrt{|z^3|-1}} = \frac{R}{\sqrt{|z|^3-1}} = \frac{R}{\sqrt{R^3-1}}$$

وعلى $\gamma$ :

$$\left| \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{z^3+1}} \right| = \left| \frac{(z - e^{i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(z+1)^{\frac{1}{2}} (z - e^{-i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}} \right| = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{|z+1|^{\frac{1}{2}} \cdot |z - e^{-i\frac{\pi}{3}}|^{\frac{1}{2}}},$$

وبالتالي فان :

$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{z}{\sqrt{z^3+1}}\right| = o \Longrightarrow \int_{\Gamma} f(z)\,dz = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\lim_{r\to o}\left|\frac{z-e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{z^3+1}}\right| = \frac{o}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3}} = o \Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = O(r)$$

يمكننا بعد هذا كتابة المساواة (1) على الشكل التالي

$$\int_{0}^{R}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + O\left(\frac{1}{R}\right) + \int_{R}^{0}\frac{d\left(\varrho e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)}{-\sqrt{\varrho^3+1}} + \int_{0}^{1-r}\frac{d\left(\varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{-\sqrt{1-\varrho^3}} + O(r) +$$

$$+\int_{1-r}^{0}\frac{d\left(\varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\sqrt{1-\varrho^3}} = o$$

واذا جعلنا الآن $r \to o$ ، $R \to \infty$ ، فاننا نجد ( بعد أن نستبدل $x$ بـ $\varrho$ )

$$\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

وبملاحظة أن :

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$$

نجد المطلوب

**ملاحظة** : يمكن اثبات صحة العلاقة المطلوبة استناداً إلى التكاملات الاولرية . فاذا أجرينا في التكامل $\int_0^\infty$ تبديل المتحول $x^3 = \frac{t}{1-t}$ ، وفي التكامل $\int_0^1$ تغيير المتحول $x^3 = u$ ، فاننا نجد :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right),$$

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3}\int_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

واستناداً إلى الدستور :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

والدستور :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

الذي ينتج عنه أن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 2\,\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

نجد المطلوب .

**١٥٧** - احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x)(1+x^2)}dx$$

اعتماداً على طريقة الرواسب .

**الحل** : لحساب هذا التكامل استناداً الى نظرية الرواسب ، نختار التابع

$f(z) = \dfrac{z^{\sqrt{3}}}{(z+1)(z^2+1)}$ والمحيط الممثل بالشكل (١٦) . إن للتابع

$f(z)$ عدداً غير منته من الفروع الهرلومورفيـــة على المحيط المذكور وداخله ( باستثناء النقاط الثلاث $z=-1$ ، $z=\pm i$ التي تشكل أقطاباً بسيطة للتابع داخل الساحة ) ، وذلـــك لأنه إذا رمزنا بـ $\varrho$ ، $\Theta$ لقياس ودليل العدد العقدي $z$ ، فإن :

$$f(z) = \frac{\varrho^{\sqrt{3}}\, e^{\sqrt{3}(\Theta+2k\pi)i}}{(z+1)(z^2+1)} ,$$

حيث يقابل كل عدد صحيح $k$ فرع للتابع .

لنأخذ الفرع الذي يأخذ قيماً حقيقية على الحافة العليا $AB$ المقطع ( أي المقـــابل لِ $k=0$ ) . فإذا طبقنا نظرية الرواسب يمكننا أن نكتب :

$$\int_{AB} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz - \int f(z)\,dz = 2\pi i \times$$
$$\times \left[ \operatorname{Res} f(-1) + \operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i) \right] . \qquad (1)$$

(١) على $AB$ : $\varrho = x$ ، $\Theta = 0$ ، $z = x$ ، إذن :

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{r}^{R} \frac{x^{\sqrt{3}}}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

(٢) على $CD$ : $\varrho = x$ ، $\Theta = 2\pi$ ، $z = x$ ، إذن :

$$\int_{CD} = \int_{R}^{r} \frac{x^{\sqrt{3}}\, e^{2\pi\sqrt{3}\, i}}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

(٣) على $\Gamma$ :

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^{\sqrt{3}+1}}{(z+1)(z^2+1)} \right| \leqslant \frac{R^{\sqrt{3}+1}}{(R-1)(R^2-1)}$$

وبالتالي فإن $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = O\left(\frac{1}{R}\right)$ ، وذلك لأنه $\lim_{R\to\infty} [zf(z)] = o$

(٤) على $\gamma$ :

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^{\sqrt{3}+1}}{(z+1)(z^2+1)} \right| \leqslant \frac{r^{\sqrt{3}+1}}{(1-r)(1-r^2)}$$

وبالتالي فإن $\int_{\gamma} f(z)\,dz = o(r)$ ، وذلك لأن $\lim_{r\to o} |zf(z)| = o$

ولحساب $\operatorname{Res} f(-1)$ نلاحظ أن في النقطة $z = -1$ :

$$\varrho = 1, \quad \Theta = \pi \quad , z^{\sqrt{3}} = e^{i\pi\sqrt{3}}$$

لذا ، فإن :

$$\operatorname{Res} f(-1) = \left[ \frac{z^{\sqrt{3}}}{z^2+1} \right]_{z=1} = \frac{e^{i\pi\sqrt{3}}}{2} .$$

وبما أنه في النقطة $z = +i$ :

$$\varrho = 1 \text{ و } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ و } z^{\sqrt{3}} = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}i}$$

وفي النقطة $z = -i$ :

$$\varrho = 1 , \ \Theta = \frac{3\pi}{2} \text{ و } z^{\sqrt{3}} = e^{\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}i}$$

فإننا نستنتج أن :

$$\operatorname{Res} f(+i) = \left[ \frac{z^{\sqrt{3}}}{(z+1)(z+i)} \right]_{z=+i} = \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i}}{2(i-1)} ,$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \left[ \frac{z^{\sqrt{3}}}{(z+1)(z-i)} \right]_{z=-i} = \frac{e^{\frac{3\sqrt{3}\pi}{2} i}}{-2(i+1)} .$$

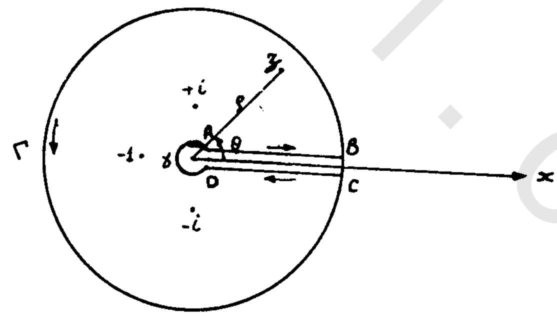
لنعوض في (١) فنجد :

$$\int_r^R \frac{x^{\sqrt{3}}}{(a+1)(x^2+1)} dx + O\left(\frac{1}{R}\right) + e^{2\pi\sqrt{3} i} \int_R^r \frac{x^{\sqrt{3}}}{(x+1)(x^2+1)} dx -$$

$$-O\left(\frac{1}{r}\right) = 2\pi i \left[ \frac{1}{2} e^{\pi\sqrt{3} i} + \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i}}{i-1} - \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{3\sqrt{3}\pi}{2} i}}{i+1} \right] =$$

$$= \pi i e^{\pi\sqrt{3} i} \left[ 1 \; \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i} - e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i}}{2i} - \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i} + e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2} i}}{2} \right] =$$

$$= \pi i e^{\pi\sqrt{3} i} \left( 1 - \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \right) .$$




( شكل - ١٦ )

لنجعل $r \to o$ ، $R \to \infty$ في هذه المساواة ، فنجد :

$$I\left(1 - e^{2\pi\sqrt{3}\, i}\right) = \pi\, i\, e^{\pi\sqrt{3}\, i}\left(1 - \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right).$$

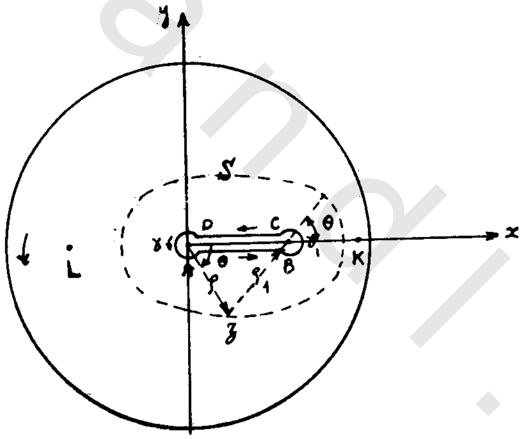
وبضرب طرفي المساواة بِ $e^{-\pi\sqrt{3}\, i}$ نستنتج أن :

$$I = \frac{\pi}{2}\;\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - 1}{\sin \pi\sqrt{3}}.$$

**١٥٨** – احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \sqrt[5]{x^2\,(1-x)^3}\; dx$$

**الحـــل** : نختار التابع :




( الشكل – ١٧ )

$$f(z) = \sqrt[5]{z^2\,(1-z)^3}$$

الذي له خمسة فروع . إن كل فرع من هذه الفروع وحيـــد القيمة خارج القطعة المستقيمة $(o\,,\,1)$ . وفي الحقيقة فاذا فرضنا أن $(\varrho\,,\,\Theta)$

( $\varrho_1$ ، $\Theta_1$ ) هما قياس ودليل $z$ ، $1-z$ على الترتيب ، كان :

$$z = \varrho\, e^{i(\Theta + 2k\pi)} , \quad 1 - z = \varrho_1\, e^{i(\Theta_1 + 2k_1\pi)}$$

وبالتالي فان :

$$f(z) = \sqrt[5]{\varrho^2 \varrho_1^3}\; e^{i\frac{2\Theta + 3\Theta_1}{5}} \cdot e^{i\frac{4k + 6k_1}{5}\pi}$$

فلو أخذنا الفرع المقابل لِـ $k = k_1 = 0$ ، أي الفرع .

$$f(z) = \sqrt[5]{\varrho^2 \varrho_1^3}\; e^{i\frac{2\Theta + 3\Theta_1}{5}} \qquad (1)$$

ودرنا دورة كاملة باتجاه ( بعكس اتجاه ) عقارب الساعة على المحيط S ( الشكل ١٧ ) ، فإن كلا من الزاويتين $\Theta$ ، $\Theta_1$ تنقص ( تزداد ) $2\pi$ ، وبالتالي فإن $\arg f(z) = \frac{2\Theta + 3\Theta_1}{5}$ ينقص ( يزداد ) $2\pi$، لذا فإن $f(z)$ يعود ويأخذ قيمته الأولى .

إن نظرية الرواسب تمكننا من كتابة المساواة التالية :

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz . \qquad (2)$$

(١) على $AB$ :

$$\varrho = x , \quad \varrho_1 = 1 - x , \quad \Theta = 0 , \quad \Theta_1 = 0$$

وبالتعويض في (1) نجد :

$$f(z) = \sqrt[5]{x^2 (1-x)^3} \,.$$

لذا فإن :

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^1 \sqrt[5]{x^2 (1-x)^3}\; dx$$

(٢) على CD :

$$\varrho = x\ ,\ \varrho_1 = 1 - x\ ,\ \Theta = 0\ ,\ \Theta_1 = 2\pi\ ,$$

إذن :

$$f(z) = \sqrt[5]{x^2 (1-x)^3}\ e^{i \frac{6\pi}{5}} ,$$

$$\int_{CD} f(z)\, dz = e^{i \frac{6\pi}{5}} \int_1^0 \sqrt[5]{x^2 (1-x)^3}\, dx .$$

(٣) إن التكاملين $\int_{\gamma}$ ، $\int_{\gamma_1}$ يسعيان إلى الصفر مع r ( نصف قطر $\gamma$ ) ، $r_1$ ( نصف قطر $\gamma_1$ ) ، وذلك لأنه على $\gamma$ :

$$\lim_{r \to 0} |z f(z)| = \lim_{r \to 0} r^{\frac{7}{5}} |1-z|^{\frac{3}{5}} = 0 \times 1 = 0 ,$$

وعلى $\gamma_1$ :

$$\lim_{r_1 \to 0} |(z-1) f(z)| = \lim_{r_1 \to 0} r_1^{\frac{8}{5}} |z|^{\frac{2}{5}} = 0 \times 1 = 0 .$$

(٤) حساب $\int_{\Gamma}$ :

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) .$$

وللحصول على $\operatorname{Res} f(\infty)$ ، ننشر $f(z)$ في جوار $z = \infty$ وفق سلسلة لوران فنجد :

$$f(z) = \sqrt[5]{z^2 (1-z)^3} = \sqrt[5]{z^5 \left(\frac{1}{z} - 1\right)^3} = (-1)^{\frac{3}{5}} z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{5}} =$$

$$= (-1)^{\frac{3}{5}} z \left(1 - \frac{3}{5z} - \frac{3}{25 z^2} - \dots\right)$$

ولما كان $\text{Res}\, f(\infty)$ هو أمثـال $\frac{1}{z}$ في هذا النشر مضروبـاً باشارة ـ فإن :

$$\text{Res}\, f(\infty) = (-1)^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{3}{25} ,$$

مع العلم بأن $(-1)^{\frac{3}{5}}$ يتعين إستناداً الى الفرع المختار (1) للتابـع المفروض بالشكل التالي :

لنأخذ نقطة k فصلها x ($x > 1$) على المحور الحقيقي . في هذه النقطة $z = x$ ، إذن :

$$f(z) = \sqrt[5]{x^2(1-x)^3}$$

واستناداً الى التعيين المختار ، ففي k :

$$\varrho = x \ , \ \varrho_1 = x - 1 \ , \ \Theta = 0 \ , \ \Theta_1 = \pi$$

وبالتالي ، فإن قيمة $f(z)$ في هذه النقطة هي :

$$f(z) = \sqrt[5]{x^2(x-1)^3}\, e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

وبمقارنة عبارتي $f(z)$ الأخيرتين ، نجد أن :

$$(-1)^{\frac{3}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{5}} .$$

وهكذا ، فإننا نستنتج أن :

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = -2\pi i \cdot \frac{3}{25}\, e^{i\frac{3\pi}{5}} = -\frac{6\pi}{25}\, i\, e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

وبالرجوع إلى (2) ، وجعل $r \to 0$ ، نجد في النتيجة :

$$I\left(1-e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)=-\frac{6\pi}{25}i\,e^{\frac{3\pi}{5}i}$$ .

وبضرب طرفي هذه المساواة بـ $e^{-\frac{3\pi}{5}i}$ وتقسيمها على $2i$ ، نجد :

$$I\,\frac{e^{\frac{3\pi}{5}i}-e^{-\frac{3\pi}{5}i}}{2i}=\frac{3\pi}{25}$$

أو :

$$I=\int_0^1\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}\,dx=\frac{3\pi}{25\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{3\pi}{25\sin\frac{2\pi}{5}}\ .$$

ملاحظة ١ . كان بالامكان تعيين : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ بأخذ نقطة L على نصف المحور الحقيقي السالب ومقارنة قيمتي $f(z)$ في هذه النقطة وهما :

$$\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}\ ،\ \sqrt[5]{(-x)^2(1-x)^3}\,.\,e^{-\frac{2}{5}\pi i}.$$

عندها نجد أن :

$$(-1)^{\frac{2}{5}}\,.\,e^{-\frac{2}{5}\pi i}=1$$

أو

$$(-1)^{\frac{2}{5}}=e^{+\frac{2}{5}\pi i}$$

وهـــذا يعني أن $-1$ تساوي $e^{+\pi i}$ وفق الفرع الذي اخترناه وبالتالي فإن :

$$(-1)^{\frac{3}{5}}=e^{+\frac{3}{5}\pi i}$$

**ملاحظة ٢** : يمكن التحقق من صحة النتيجة باستخدام التكاملات الأولرية . في الحقيقة إن :

$$I = \int_0^1 x^{\frac{7}{5}-1}(1-x)^{\frac{8}{5}-1}dx = B(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}) = \frac{\Gamma(\frac{7}{5})\Gamma(\frac{8}{5})}{\Gamma(3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\Gamma(\frac{2}{5}) \cdot \frac{3}{5}\Gamma(\frac{3}{5})}{2!} = \frac{1}{2!}\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}} =$$

$$= \frac{3\pi}{25\sin\frac{2\pi}{5}} .$$

**١٥٩** - أوجد قيمة التكامل الحقيقي :

$$\int_0^\infty \frac{\log x \cdot dx}{(x+a)^2+b^2} ,$$

استناداً إلى نظرية الرواسب ، ( $b$ ، $a$ عددان موجبان ) .

**الحل** : نختار التابع $f(z) = \frac{\mathrm{Log}^2 z}{(z+a)^2+b^2}$ ، والمحيط الممثل ( بالشكل ١٨ ) . إن :

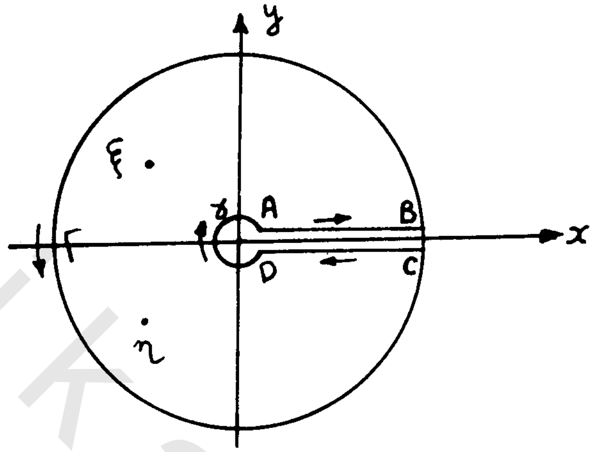
$$\mathrm{Log}\, z = \log \varrho + i(\Theta + 2k\pi)$$

حيث ( $\Theta$ ، $\varrho$ ) هما قياس ودليل $z$ ، $k$ عدد صحيح أو صفر .

لنختر فرع $\mathrm{Log}\, z$ الذي يساوي $\log x$ على الحافة العليا $AB$ للمقطع ( أي نأخذ الفرع المقابل لـ $k = o$ ) .

إن كل فرع من فروع التابع $\mathrm{Log}\, z$ ( وبوجه خاص الفرع المختار ) هولومورفي على محيط الساحة هذه وداخلها باستثناء النقطتين

$z = -a \pm ib$ اللتين تشكلان قطبين بسيطين للتابع . وعلى هذا ، فإن نظرية الرواسب تعطي :




( شكل ١٨ )

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res} f(\zeta) + \operatorname{Res} f(\eta)] \qquad (1)$$

بفرض $\zeta$ ، $\eta$ القطبين البسيطين $-a + ib$ ، $-a - ib$ .

(١) على $AB$ :

$$\varrho = x\ ,\ \Theta = o\ ,\ z = x \Longrightarrow \operatorname{Log} z = \log x\ ,$$

إذن :

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{\log^2 x}{(x+a)^2 + b^2}\,dx$$

(وذلك بفرض $r$ ، $R$ نصف قطري الدائرة الصغيرة $\gamma$ والدائرة الكبيرة $\Gamma$) .

(٢) على $CD$ :

$$\varrho = x\ ,\ \Theta = 2\pi\ ,\ z = x \Longrightarrow \operatorname{Log} z = \log x + 2\pi i$$

إذن :

$$\int_{CD} f(z)\, dz = \int_{R}^{\cdot} \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2 + b^2}\, dx$$

(٣) إن التكاملين $\int_{\Gamma}$ ، $\int_{\gamma}$ يسعيان إلى الصفر مع $\frac{1}{R}$ ، r ، وذلك لأنه

على $\Gamma$ يكون ( بفرض $o < \Theta < 2\pi$ ) :

$$|z f(z)| = R \frac{\log R + i\Theta^{\ 2}}{(z+a)^2 + b^2} \leqslant R \frac{\log^2 R + 4\pi^2}{(R-a)^2 - b^2}.$$

كما أنه على $\gamma$ :

$$|z f(z)| = r \frac{\log r + i\Theta^{\ 2}}{(z+a)^2 + b^2} \leqslant r \frac{\log^2 r + 4\pi^2}{|(z+a)^2 + b^2|}$$

ولما كان من الواضح أن :

$$\lim_{R \to \infty} R \frac{\log^2 R + 4\pi^2}{(R\ \ a)^2 - b^2} = o$$

$$\lim_{r \to o} r \frac{\log^2 r + 4\pi^2}{|(z+a)^2 + b^2|} = \frac{\lim\limits_{r \to o} [\, r(\log^2 r + 4\pi^2)\,]}{a^2 + b^2} = o$$

فإن التكاملين المذكورين يسعيان حقاً الى الصفر .

أما الراسبان فهما :

$$\mathrm{Res}\, f(\zeta) = \left[ \frac{\log^2 z}{2(z+a)} \right]_{z=-a+bi} = \frac{1}{2bi} \{ \log l + i(\pi - \varphi) \}^2 ,$$

$$\mathrm{Res}\, f(\eta) = \left[ \frac{\log^2 z}{2(z+a)} \right]_{z=-a-bi} = -\frac{1}{2bi} \{ \log l + i(\pi + \varphi) \}^2$$

بفرض : $l=\sqrt{a^2+b^2}$ ، $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$ .

وبالرجوع إلى (1) نجد :

$$\int_r^R \frac{\log^2 x}{(x+a)^2+b^2}\,dx + O\left(\frac{1}{R}\right) + \int_R^r \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx + O(r) =$$

$$= \frac{\pi}{b}\,4\,\varphi\,(\pi - i\log l)\,.$$

وبجعل $R \longrightarrow \infty$ ، $r \longrightarrow o$ نكتب المساواة الاخيرة كما يلي :

$$4\,\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} - 4\,\pi\,i \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{4\,\pi\varphi}{b}(\pi - i\log l) \quad (2)$$

وبمطابقة القسمين التخيليين في الطرفين الأيسر والأيمن نستنتج أن :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{\varphi\,\log l}{b} = \frac{\log\sqrt{a^2+b^2}}{b}\,\text{arc tg}\,\frac{b}{a}\,.$$

**ملاحظة** : يمكننا أن نستنتج من (2) كذلك أن .

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{\varphi}{b} = \frac{1}{b}\,\text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

ويمكن ايجاد هذا التكامل بسهولة تامة مباشرة لأن .

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\left[\text{arc tg}\,\frac{x+a}{b}\right]_0^\infty = \frac{1}{b}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{a}{b}\right] =$$

$$= \frac{1}{b}\,\text{arc ctg}\,\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\,\text{arc tg}\,\frac{b}{a}\,.$$

**١٦٠** – أوجد قيمتي التكاملين :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^4} dx \text{ ،} K = \int_0^1 \frac{y}{1 + y^4} \log \frac{1 + y}{1 - y} dy$$

وذلك بمكاملة التابع $f(z) = \frac{z \operatorname{arc\,tg} z}{1 + z^4}$ على طول محيط مناسب

هل يمكنك إيجاد قيمة J مباشرة ؟

**الحل** . نختار المحيط كما في الشكل (١٩) . إن $f(z)$ هولومورفي على هذا المحيط وداخله باستثناء النقطة $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ التي تشكل قطباً بسيطاً للتابع .

من المعلوم أن :

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{i - z}{i + z} .$$

فإذا فرضنا :

$$i - z = \varrho_1 e^{i(\Theta_1 + 2k_1\pi)} ,$$

$$i + z = \varrho_2 e^{i(\Theta_2 + 2k_2\pi)} ,$$

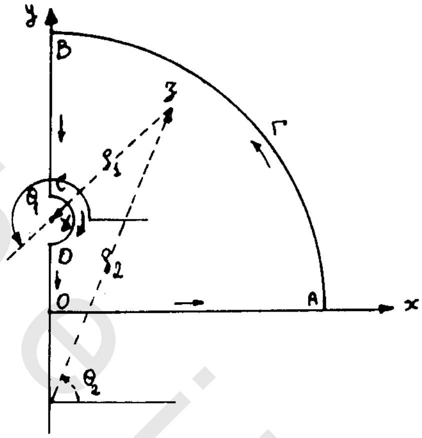
نتج أن :

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \left[ \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + i(\Theta_1 - \Theta_2) \right] + k\pi$$

لنأخذ الفرع المقابل لـ $k = o$ . عندها نجد :

(١) على OA :

$$\int_{OA} f(z)\, dz = \int_o^R \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^4} dx$$




( شكل ١٩ )

بفرض R نصف قطر ربع الدائرة $\Gamma$

ولوجعلنا $R \to \infty$ لوجدنا أن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{OA} f(z)\,dz = \frac{1}{2} J$$

(٢) على BC :

$$z = iy\ ,\ \varrho_1 = y-1\ ,\ \varrho_2 = y+1$$

$$\Theta_1 = \frac{3\pi}{2}\ ,\ \Theta_2 = \frac{\pi}{2}\ .$$

إذن نجد بفرض r نصف قطر نصف الدائرة الصغيرة $\gamma$ :

$$\int_{BC} f(z)\,dz = \int_{R}^{1+r} \frac{iy}{1+y^4}\cdot\frac{1}{2i}\left[\ \log\frac{y-1}{y+1} + i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right] d\,(iy) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_{R}^{1+r}\frac{y\,dy}{1+y^4} - \frac{1}{2i}\int_{R}^{1+r}\frac{y}{1+y^4}\log\frac{y-1}{y+1}\,dy$$

ولو جعلنا $R \to \infty$ ، $r \to o$ ، فإننا نجد أن :

$$\lim_{r\to o\,,\,R\to\infty}\int_{BC} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{4}\left[\text{arc tg } y^2\right]_{\infty}^{1} - \frac{1}{2i}\int_{\infty}^{1}\frac{y}{1+y^4}\log\frac{y-1}{y+1}\,dy$$

ولو أجرينا في التكامل الأخير من الطرف الأيمن تغيير المتحول t بالمتحول y وفق الدستور $y = \frac{1}{t}$ ، لوجدنا :

$$\lim_{r\to o,\, R\to\infty} \int_{BC} f(z)\,dz = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2i}\int_o^1 \frac{t}{1+t^4}\log\frac{1-t}{1+t}\,dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2i}K = \frac{\pi^2}{16} + \frac{K}{2}i$$

(٣) على $DO$ :

$$z = i\,y \text{ ، } \varrho_1 = 1 - y \text{ ، } \varrho_2 = 1 + y \text{ ، } \Theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ، } \Theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ ،}$$

إذن :

$$\int_{DO} f(z)\,dz = \int_{1-r}^{o} \frac{i\,y}{1+y^4}\cdot\frac{1}{2i}\log\frac{1-y}{1+y}\,d(i\,y)$$

وبجعل $r \to o$ نستنتج أن :

$$\lim_{r\to o}\int_{DO} f(z)\,dz = \frac{1}{2i}\int_o^1 \frac{y}{1+y^4}\log\frac{1-y}{1+y}\,dy = \frac{K}{2}\,i$$

(٤) إن التكاملـــين $\int_{\Gamma}$ ، $\int_{\gamma}$ يسعيان إلى الصفر مع $\frac{1}{R}$ ، $r$ ؛

فعلى $\Gamma$ :

$$\lim_{R\to\infty} z\,f(z) = \lim_{R\to\infty} \frac{z^2}{1+z^4}\,\text{arc tg}\,z \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+1}\,\lim_{R\to\infty}\frac{R^2}{R^4-1} = o$$

وعلى $\gamma$ :

$$\lim_{r\to o} (z-i)\,f(z) = \lim_{z\to i} \frac{r\,z}{1+z^4}\cdot\frac{1}{2i}\left[\log\frac{r}{\varrho_2} + i\,(\Theta_1-\Theta_2)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{z\to i}\left|\frac{rz}{1+z^4}\cdot\frac{1}{2i}\left[\log\frac{r}{\varrho_2} + i\,\pi\right]\right. =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{rz}{1+z^4} \cdot \frac{1}{2i} \sqrt{\log^2 \frac{r}{\varrho_2} + \pi^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{r \to o} \sqrt{\left( r \log \frac{r}{\varrho_2} \right)^2 + r^2 \pi^2} \, .$$

ولما كان $\lim_{r \to o} r \log r = o$ ، $\lim_{r \to o} \varrho_2 = 2$ ، فإن المقدار الأخير يسعى الى الصفر مع $r$ .

لنحسب الآن الراسب في النقطة $e^{i\frac{\pi}{4}}$ . إن

$$\operatorname{Res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \left[ \frac{\operatorname{arc\,tg} z}{4z^2} \right]_{z = e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{2i} \left[ \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + i(\Theta_1 - \Theta_2) \right], \quad (1)$$

حيث :

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \frac{\pi}{2}, \ \varrho_1 = 2 \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}, \ \varrho_2 = \sqrt{4 - \varrho_1^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad (2)$$

وبتعويض ( 2 ) في ( 1 ) ، نجد بعد اجراء الاختصارات اللازمة :

$$\operatorname{Res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2\pi i} \left[ -\frac{\pi i}{8} \log \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{8} \right] \quad (3)$$

إن نظرية الرواسب الأساسية تمكننا من كتابة المساواة التالية :

$$\int_{OA} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{BC} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{DO} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \quad (4)$$

وبالانتقال الى النهاية ( وذلك بجعل $o \to r$ ، $R \to \infty$ ) تأخذ المساواة ( 4 ) ، استناداً إلى ماتقدم ، الشكل التالي :

$$\frac{1}{2} J + \left( \frac{\pi^2}{16} + \frac{K}{2} i \right) + \frac{K}{2} i = -\frac{\pi i}{8} \log \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{8}$$

وبمطابقة القسمين الحقيقي والتخيلي في طرفي هذه المساواة ، نجـد في النهاية :

$$J = \frac{\pi^2}{8} , K = -\frac{\pi}{8} \log \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} \log ( 3 + 2\sqrt{2} )$$

**ايجاد قيمة J مباشرة :**

إذا أجرينا تغيير المتحول $x = \frac{1}{u}$ ، وجدنا أن :

$$\frac{1}{2} J = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^4} dx = \int_0^\infty \frac{u \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{u}}{1+u^4} du = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}}{1+x^4} dx$$

ومن هذا نستنتج أن :

$$J = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \left( \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \right) dx .$$

ولكن :

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

إذن :

$$J = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4} \left[ \operatorname{ar\,tg} x^2 \right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}$$

وهذا هو الجواب نفسه الذي حصلنا عليه باستخدام نظرية الرواسب .

**١٦١** – ليكن $f(z)$ تابعاً كسريا ليس له أقطاب على المنحني غير المغلق $C$ الذي مبدؤه $a$ ومنتهاه $b$ ( الشكل ٢٠ ) . برهن على صحة التكامل :

$$\int_{C} f(z)\,dz = \sum \operatorname{Res}\left[\, f(z)\,\operatorname{Log}\frac{z-b}{z-a}\,\right] +$$

$$+ \operatorname{Res}\left[f(z)\operatorname{Log}\frac{z-b}{z-a}\right]_{z=\infty}$$

حيث يسري الجمع $\sum$ على كل اقطاب التابع $f(z)$ المغايرة لِ $\infty$ ، علماً بأن اختيار فرع التابع اللوغارتيمي خارج $C$ اختياري .

**الحل** : لنرسم دائرة $\Gamma$ مركزها $o$ ونصف قطرها $R$ كبير بحيث يحوي كل اقطاب التابع $f(z)$ ( باستثناء اللانهاية طبعاً ) ، ولنختر التابع $F(z) = f(z)\operatorname{Log}\frac{z-b}{z-a}$ . فاذا أحطنـا القوس $C$ بالمحيط المغلق $AB\,\gamma_b\,CD\,\gamma_a$ ( بحيث لايحوي داخلة أقطاباًللتابع $f(z)$)، غدا التابع $F(z)$ (وبعبارةأدقأيفرعمنفروعه ) هولومورفياًعلى هذا المحيط وعلى $\Gamma$ وفي المنطقة المحصورة بينها . وبتطبيق نظرية الرواسب العامة ، يمكننا أن نكتب :

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} F(z)\,dz + \int_{\gamma_b} F(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{CD}} F(z)\,dz +$$

$$+ \int_{\gamma_a} F(z)\,dz + 2\pi i \sum \operatorname{Res} F(z) \qquad (1)$$

حيث يسري الجمع $\sum$ على كل أقطـاب التابع $F(z)$ التي هي أقطاب التابع $f(z)$ .

من المعلوم أن :

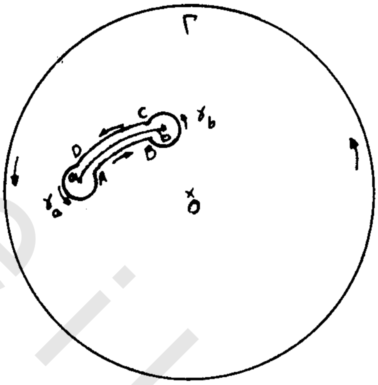
$$F(z)\,dz = -2\pi i \,\mathrm{Res}\left[ f(z)\mathrm{Log}\frac{z-b}{z-c} \right]_{z=\infty} \tag{2}$$

وبالاضافة الى ذلك ، فعندما يسعى نصفا قطري الدائرتين $\gamma_a$ ، $\gamma_b$ الى الصفر ، فإنه يمكننا أن نستنتج بسهولة أن :

$$\lim_{z\to a} \int_{\gamma_a} F(z)\,dz = o \tag{3}$$

$$\lim_{z\to b} \int_{\gamma_b} F(z)\,dz = o \tag{4}$$

وذلك استناداً الى التمهيد( أ ).




( شكل ٢٠ )

وعند ذلك نجد ، بفرض أننا أخترنا ذلك الفرع من $\mathrm{Log}\frac{z-b}{z-a}$ الذي يساوي $\log\frac{z-b}{z-a}$ على الحافة السفلى AB للمقطع :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(z)\,dz \longrightarrow \int_C f(z)\log\frac{z-b}{z-a}\,dz \,, \tag{5}$$

$$\int_{\overset{\frown}{CD}} F(z)\,dz \longrightarrow -\int_C f(z)\left[\log\frac{z-b}{z-a} + 2\pi i\right] dz \tag{6}$$

وبالانتقال الى النهاية بجعل $r \longrightarrow o$ في العلاقة (1) ، ووضع (2) ، (3) ، (4) ، (5) ، (6) في أعتبارنا ، نستنتج بعد التقسيم على $2\pi i$ أن :

$$\int_C f(z)\,dz = \sum \mathrm{Res}\left[ f(z)\mathrm{Log}\frac{z-b}{z-a}\right] +$$

$$+ \mathrm{Res}\left[ f(z)\,\mathrm{Log}\frac{z-b}{z-a}\right]_{z=\infty}$$

وهو المطلوب .

## ١٦٢ - أوجد قيمة التكامل :

$$I_n = \int_{C_n} \frac{dz}{(10z - 81)\sqrt{z^2 - 9z + 18}}$$

بفرض $C_n$ محيط الدائرة $|2z - n| = n$ ، حيث n عدد صحيح اكبر من الواحد ، وذلك عندما يُسار على هذا المحيط مرة واحدة بالاتجاه الموجب بدءاً من o ، حيث قيمة الجذر هي $+3\sqrt{2}$

الحل : إن للتابع المكامل $f(z) = \frac{1}{(10z-81)\sqrt{z^2 - 9z + 18}}$ ثلاث نقاط شاذة في المستوى هي النقطتان الحرجتان الجبريتان $z = 3$ ، $z = 6$ ، والقطب البسيط $z = 8,1$ .

نلاحظ قبل كل شيء أن $I_2 = o$ ، وذلك لأن $C_2$ هو محيط دائرة مركزها $(1 , o)$ ونصف قطرها 1 ، وبالتالي فإن تعيين التابع $f(z)$ هولومورفي على المحيط $C_2$ وداخله .

أما $I_3$ ، $I_6$ فهما غير معينين وذلك لأن $C_3$ ، $C_6$ يمران بالنقطتين الحرجتين $z = 3$ ، $z = 6$ .

كذلك فإن $I_4 = I_5$ ، وذلك لأن تعيين $f(z)$ هولومورفي بين $C_4$ ، $C_5$ . وللسبب ذاته نحكم بأن :

$$I_7 = I_8 \text{ ، } I_9 = I_{10} = \ldots \quad (I_4 \neq I_7 \text{ ، } I_4 \neq I_9 \text{ ؛ } I_7 \neq I_9)$$

لنفرض :

$$z - 3 = \varrho_1 e^{i(\Theta_1 + 2k_1\pi)} \text{ ، } z - 6 = \varrho_2 e^{i(\Theta_2 + 2k_2\pi)}$$

$$\sqrt{z^2 - 9z + 18} = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}\; e^{i\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}} \cdot e^{ik\pi}$$

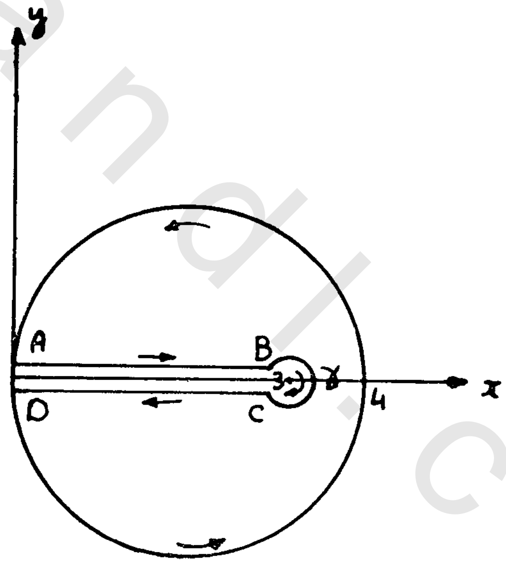
وإذا فرضنا أن قيمة الجذر في النقطة D مساوية $3\sqrt{2}$ حيث

$$\varrho_1 = 3 \,,\; \varrho_2 = 6 \,,\; \Theta_1 = \Theta_2 = -\pi$$

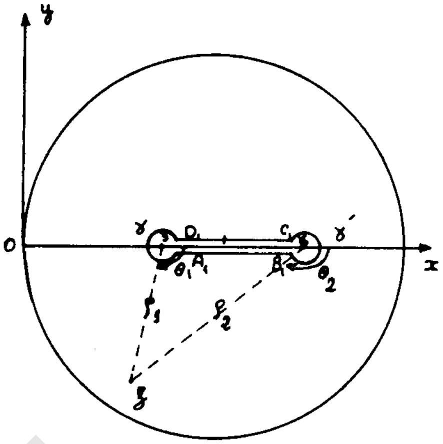
فإنه يجب أن يكون :

$$+3\sqrt{2} = \sqrt{3 \times 6}\;\; e^{i\frac{-\pi-\pi}{2}} \cdot e^{ik\pi} = -3\sqrt{2}\, e^{ik\pi}$$

لذا فإن k أي عدد صحيح فردي ، وليكن 1 مثلاً ، وبالتالي فإن :




( شكل ٢١ )




( شكل ٢٢ )

$$\sqrt{z^2-9z+18} = \sqrt{\varrho_1\varrho_2}\, e^{i\frac{\Theta_1+\Theta_2+2\pi}{2}} \qquad (1)$$

(١) حساب $I_4$ :

يمكننا أن نكتب استناداً الى نظرية كوشي ( الشكل ٢١ ) أن :

$$\int_{C_4} f(z)\,dz \int_{AB} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz = o \qquad (2)$$

( أ ) على $AB$ :

$$\varrho_1 = 3 - x \text{ ، } \varrho_2 = 6 - x \text{ ، } \Theta_1 = \pi ,\ \Theta_2 = -\pi \text{ ، } z = x$$

إذن :

$$\sqrt{z^2-9z+18} = -\sqrt{3-x\,(6-x)}$$

وبالتالي فاذا رمزنا بـ $r$ لنصف قطر الدائرة $\gamma$ ، كان :

$$\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_0^{3-r} \frac{dx}{(10x-81)\sqrt{(3-x)(6-x)}}$$

(ب) على CD :

$$\varrho_1 = 3 - x \,,\ \varrho_2 = 6 - x \,,\ \Theta_1 = -\pi \,,\ \Theta_2 = -\pi \,,\ z = x$$

وبالتالي فان :

$$\int_{CD} f(z)\,dz = + \int_{3-r}^{0} \frac{dx}{(10x - 81)\sqrt{(3-x)(6-x)}} = \int_{AB} f(z)dz$$

(ﺣ) إن $\int_{\gamma}$ يسعى الى الصفر مع $|z-3|$ ، وذلك لأننا نرى بسهولة أن :

$$\lim_{z \to 3} \left| \frac{z-3}{(10z-81)\sqrt{z^2 - 9z + 81}} \right| = \lim_{z \to 3} \left| \frac{\sqrt{z-3}}{(10z-81)\sqrt{z-6}} \right| = 0$$

فإذا رجعنا إلى (2) وجعلنا فيها $r \to 0$ ، استنتجنا أن :

$$I_1 = \int_{c_1} f(z)\,dz = 2\int_{0}^{3} \frac{dx}{(10x-81)\sqrt{(3-x)(6-x)}}$$

ولايجاد قيمة هذا التكامل حقيقياً ، نجري أولاً تبديـــل المتحول $x - 8,1 = \frac{1}{t}$ ، عندها نجد تكاملاً من الشكل :

$$\int_{-\frac{1}{8,1}}^{-\frac{1}{5,1}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2,1}\right)\left(t + \frac{1}{5,1}\right)}}$$

ولايجاد قيمة هذا التكامل الأخير نتبع دستور أولر ونضع :

$$\sqrt{\left(t+\frac{1}{2,1}\right)\left(t+\frac{1}{5,1}\right)} = u\left(t+\frac{1}{2,1}\right)$$

فيتحول التكامل الأخير الى تكامل محدد لتابع عادي كسري من الشكل

$\int \frac{du}{u^2-1}$ وهو تكامل مألوف . وهكذا فاننا نجد في النهاية أن :

$$I_4 = I_5 = \frac{2}{3\sqrt{119}} \log \frac{\sqrt{34} - \sqrt{7}}{\sqrt{34} + \sqrt{7}} .$$

(٢) — حساب $I_7$ :

يمكن حساب $I_7$ ( أو $I_8$ ) بتطبيق نظرية كوشي على المحيط المؤلف من $C_7$ ( أو $C_8$ ) و $A_1 B_1 \gamma' C_1 D_1 \gamma$ ( الشكل ٢٢ ) ، وذلك لأن $f(z)$ هولوموروفي على هذا المحيط وداخله ؛ فإذا فعلنا ذلك توصلنا إلى النتيجة التالية :

$$I_7 = I_8 = 2\, e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_3^6 \frac{dx}{(10x - 81)\sqrt{(x-3)(6-x)}} \qquad (3)$$

وهكذا فإن حساب $I_7$ ( أو $I_8$ ) يؤول إلى حساب هذا التكامل الحقيقي .

ولكنه يمكننا الحصول على الجواب بطريقة أسرع ، دون اللجوء إلى حساب تكاملات ، الأمر الذي يستهلك جهداً ووقتاً أكبر .

لهذا الغرض نرسم المحيط $C_9$ . إن التابع $f(z)$ هولوموروفي في المنطقة المحدودة بالمحيطين $C_9$ و $C_7$ ( وعلى هذين المحيطين ) باستثناء النقطة $z = 8,1$ التي تشكل قطباً بسيطاً لهذا التابع . لذا يمكننا أن نكتب استناداً إلى النظرية العامة في الرواسب أن :

$$\int_{C_9} f(z)\, dz = \int_{C_7} f(z)\, dz + 2\pi i \operatorname{Res} f\,(8,1)$$

لكن :

$$\int_{C_9} f(z)\, dz = -\, 2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) \qquad (4)$$

إذن :

$$\int_{C_7} f(z)\,dz = -\,2\pi i\,[\,\mathrm{Res}\,f(\infty) + \mathrm{Res}\,f(8,1)\,] \qquad (5)$$

لحساب الراسب في النقطة $z = 8,1$ نلاحظ أنه في هذه النقطة :

$$\varrho_1 = 5,1\ ,\ \varrho_2 = 2,1\ ,\ \Theta_1 = \Theta_2 = 0\ .$$

لذا فاننا نستنتج استناداً إلى دستور حساب الراسب في القطب البسيط ، واعتماداً على ( 1 ) أن :

$$\mathrm{Res}\,f(8,1) = \frac{1}{10\sqrt{5,1 \times 2,1\, e^{i\pi}}} = -\,\frac{1}{3\sqrt{119}} \qquad (6)$$

أما الراسب في اللانهاية فهو كما نعلم نظير أمثال $\frac{1}{z}$ في نشر $f(z)$ في جوار $z = \infty$ . وبما أن :

$$f(z) = \frac{1}{10\,z^2\,(1 - \frac{8,1}{z})(1 - \frac{3}{z})^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{6}{z})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{10\,z^2}\,(1 + \frac{8,1}{z} +$$

$$+ \cdots)\,(1 + \frac{3}{2z} + \cdots)\,(1 + \frac{3}{z} + \cdots)$$

فاننا نستنتج أن :

$$\mathrm{Res}\,f(\infty) = 0 \qquad (7)$$

وبالرجوع الى ( 5 ) ، ووضع ( 6 ) ، ( 7 ) في اعتبارنا نجد في النهاية أن :

$$I_7 = I_8 = \frac{2\pi i}{3\sqrt{119}} \qquad (8)$$

(٣) حساب $I_9$ .

إذا رجعنا الى المساواة ( 4 ) ووضعنا في اعتبارنــــا ( 7 ) ووجدنا أن :

$$I_9 = I_{10} = I_{11} = \ldots = o .$$

**نتيجة** : إذا قارنا ( 3 ) ، ( 8 ) ، نستنتج أن :

$$\int_3^6 \frac{dx}{(10x - 81)\sqrt{(x-3)(6-x)}} = \frac{-\pi}{3\sqrt{119}}$$

## توزع اصفار التابع . نظرية روشي (Rouché)

**١٦٣** – اثبت صحة النظرية التالية[١] استناداً إلى نظرية روشي :

إن للمعادلة :

$$C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_{n-1} z + C_n = o \quad (C_0 \neq o , n \geqslant 1)$$

n جذراً في المستوي العقدي .

**الحل** : لنفرض

$$f(z) = C_0 z^n ; g(z) = C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n$$

ولنختر عـــدداً R كبيراًبحيث يكون $|f(z)| > |g(z)|$ على المحيط الدائري $|z| = R$ إن هـــذا ممكن لأن $|f(z)| = |C_0| R^n$ ، $|g(z)| \leqslant |C_1| R^{n-1} + \ldots + |C_n|$ ، ولأن $R^n$ يتزايد بصورة أسرع من تزايد أي كثير حدود من المرتبة $(n - 1)$ . عند ذلك يكون عدد جذور المعادلة المفروضة ( استناداً إلى نظرية روشي ) في الدائرة $|z| < R$ مساوياً عـدد أصفار $z^n$ أي n هذا ، ولما كان :

---

(١) تسمى هذه النظرية عادة النظرية الأساسية في الجبر

$C_0 z^n + \dots + C_n \to \infty$ ، عندما $z \to \infty$ فإنه يمكننا تكبير R (عند الضرورة) بحيث نضمن عدم وجود جذور للمعادلة خارج الدائرة .

١٦٤ — جد عدد جذور المعادلات التالية داخل المحيط الدائري $|z| = 1$

(١) $\quad (1) \quad z^8 - 5 z^5 - 2 z + 1 = 0$

(٢) $\quad (2) \quad z^9 - 2 z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$

**الحل** : (١) نفرض $f(z) = -5 z^5 + 1$ ، $g(z) = z^8 - 2 z$ .

من الواضح أنه عندما يكون $|z| = 1$ ، نجد :

$$|f(z)| \geqslant |5 z^5| - 1 = 5|z|^5 - 1 = 5 - 1 = 4 ,$$
$$|g(z)| \leqslant |z|^8 + 2|z| = 3$$

لذا فإن $|f(z)| > |g(z)|$ على المحيط $|z| = 1$ ، وبالتالي فإن عدد جذور المعادلة

$$f(z) + g(z) \equiv z^8 - 5 z^5 - 2 z + 1 = 0$$

داخل المحيط المذكور يساوي عدد جذور المعادلة $f(z) = 0$ أي المعادلة

$$5 z^5 = 1$$

داخل هذا المحيط . ومن الواضح أن هذا العدد هو 5

(٢) نفرض $f(z) = -8 z - 2$ ، $g(z) = z^9 - 2 z^6 + z^2$ .

عندما $|z| = 1$ ، يكون

$$|f(z)| \geqslant |-8z| - 2 = 6 ,$$
$$|g(z)| \leqslant |z|^9 + 2|z|^6 + |z|^2 = 1 + 2 + 1 = 4$$

لذا ، فإن $|f(z)| > |g(z)|$ . ولما كان للمعادلة $f(z) = 0$ داخل المحيط $|z| = 1$ جذر واحد ، فان المعادلة (1) داخل هذا المحيط جذراً واحداً كذلك .

**١٦٥** – برهن أنه إذا كانت المتراجحة .

$$|a_k z^k| > |a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n|$$

محققة في جميع نقاط محيط C ، فإن لكثير الحدود .

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \qquad (1)$$

k صفراً داخل هـذا المحيط عندما تكون النقطة $z = 0$ واقعـة داخل هذا المحيط ، بينما لايكون لكثير الحدود هـذا أي صفر إذا وقعت هذه النقطة خارج المحيط C .

**الحل** : إذا فرضنا أن :

$$f(z) = a_k z^k, \quad g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n$$

فانـه يكون لدينا فرضاً $|f(z)| > |g(z)|$ على المحيط C . لذا فان عدد اصفار كثير الحدود (1) داخل C يساوي عدد أصفار التابع $a_k z^k$ داخل هذا المحيط . ولكن للتابع $a_k z^k$ k صفراً في النقطـة $z = 0$ ، وبالتالي فاذا وقعت هذه النقطة داخل C ، كان لكثير الحدود (1) k جذراً داخل C . أما إذا وقعت هذه النقطة خارج C ، فانـه لايكون لكثير الحدود هذا أي صفر داخل C .

**١٦٦** – ما هو عدد جذور المعادلة :

$$z^4 - 8z + 10 = 0$$

في الحلقة الدائرية $1 < |z| < 3$ ؟

**الحل** : نفرض

$$f(z) = z^4 + 10 \text{ و } g(z) = -8z .$$

لدينا على المحيط $|z| = 1$ :

$$|f(z)| \geqslant 10 - |z|^4 = 9 ,$$
$$|g(z)| = |-8z| = 8$$

أي أنه على هذا المحيط

$$|f(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي فإن عدد جذور المعادلة المفروضة داخل المحيط الدائري $|z| = 1$ يساوي عدد جذور المعادلة $z^4 + 10 = 0$ داخل هذا المحيط ، وهذا العدد يساوي وضوحاً الصفر .

وبالاضافة إلى هذا ، فعندما $|z| = 3$ ، نجد :

$$|f(z)| \geqslant |z|^4 - 10 = 71 \quad \text{و} \quad |g(z)| = 24$$

وبالتالي فـــإن عدد جذور المعادلة المفروضة داخل المحيط الدائري $|z| = 3$ يساوي عـــدد جذور المعادلة $z^4 + 10 = 0$ داخل هذا المحيط ، وهذا العدد يساوي وضوحاً 4 .

لذا ، فإن عدد جذور المعادلة المفروضة في الحلقة الدائرية $1 < |z| < 3$ هو 4.

**١٦٧** - اثبت أنه يوجد المعادلة :

$$z = \lambda - e^{-z} \quad (\lambda > 1)$$

جذر واحد ( حقيقي ) في نصف المستوي الأيمن .

**الحل** : لنشكل محيطاً مؤلفاً من القطعة المستقيمة $(-iR , iR)$ ومن النصف الأيمن من الدائرة $|z| = R$ ، ولنفرض :

$$f(z) = z - \lambda \; ; \; g(z) = e^{-z}$$

لدينا على القطعة المستقيمة حيث $z = iy$ :

$$|f(z)| = |\lambda - iy| \geqslant \lambda > 1 \; ; \; |g(z)| = |e^{-iy}| = 1 ,$$

كذلك فعلى نصف الدائرة $|z| = R$ يكون $\operatorname{Re} z = x > o$ فاذا اخترنا $R$ كبيراً بشكل كافٍ ($R > \lambda + 1$)، نجد :

$$|f(z)| \geqslant |z| - \lambda = R - \lambda > 1 ; |g(z)| = e^{-x} \leqslant 1 .$$

وبالتالي فان نظرية روشي قابلة للتطبيق ، ويكون للمعادلة المفروضة داخل أي محيط من النمط الذي حددناه ، عدد من الجذور يساوي عدد جذور المعادلة $z - \lambda = o$، أي جذر واحد . وبالتالي فانه يوجد في نصف المستوي الأيمن كله جذر وحيد للمعادلة هذه

إن هذا الجذر الوحيد حقيقي ، وذلك لأنه إذا كتبنا المعادلة على الشكل

$$z + e^{-z} = \lambda$$

فإن الطرف الأيسر يساوي 1 ($\lambda > 1$) عندما $z = o$ وعندما $z = x \longrightarrow \infty$ يتزايد هذا الطرف بلا تناه . وبالتالي فإننا نجد قطعاً جذراً $z = x$ يجعل الطرف الأيسر مساوياً لِ $\lambda$ .

**١٦٨** – برهن أن مهما كان $\varrho$ ($\varrho > o$) صغيراً ، فإن جميع أصفار التابع

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots + \frac{1}{n!\,z^n}$$

تقع في الدائرة $|z| < \varrho$ ، عندما تأخذ $n$ قيماً كبيراً بشكل كافٍ

**الحل** : من الواضح أن متوالية التوابع $f_n(z)$ تتقارب إلى التابع $e^{\frac{1}{z}}$ اينما كان في المستوي العقدي ، باستثناء النقطة $z = o$ ، لأنها نقطة شاذة

أساسية للتابع $e^{\frac{1}{z}}$ ) وبالتالي فإنه يوافق العددَ المفروض $\varepsilon > o$ عددٌ صحيح موجب N بحيث تتحقق المتراجحة $\varepsilon > \left| f_n(z) - e^{\frac{1}{z}} \right|$ عندما $n > N$ ، وذلك في أي دائرة K ( وعلى محيطها C ) ، شريطة أن يكون مركز الدائرة $z \neq o$ ، وأن تكون غير حاوية على النقطة $z = o$ في داخلها أو على محيطها .

لنختر الآن العدد $\varepsilon$ المفروض سلفاً بحيث يحقق المتراجحة $\varepsilon < \min\limits_{z \varepsilon c} \left| e^{\frac{1}{z}} \right|$ عندما يكون على المحيط C :

$$\left| f_n(z) - e^{\frac{1}{z}} \right| < \left| e^{\frac{1}{z}} \right|$$

واستناداً إلى نظرية روشي ، نرى أن عدد اصفار التابع $(f_n(z) - e^{\frac{1}{z}}) + e^{\frac{1}{z}} = f_n(z)$ في الدائرة K يساوي عدد أصفار التابع $e^{\frac{1}{z}}$ في هذه الدائرة ، أي يساوي صفراً .

ولما كان من الممكن أن تكون K أية دائرة في المستوي مركزها أية نقطة ( باستثناء النقطة $z = o$ ) شريطة أن لاتحوي K النقطة $z = o$ داخلها او على محيطها ، فان جميع اصفار التابع $f_n\left(\frac{1}{z}\right)$ تقع في دائرة ( هي الدائرة الوحيدة الباقية من المستوي بعد طرح كل الدوائر K منه ) مركزها $z = o$ ونصف قطرها $\varrho$ لامتناه في الصغر .

**١٦٩** – ليكن $f(z)$ تابعاً هولومورفياً في النقطة $z = a$ ، ولنفرض تابعاً آخر $F(z)$ معرفاً بالدستور :

$$F(z) = z - a - \omega f(z) \qquad (1)$$

(١) اثبت ، باستخدام نظرية روشي ، أنه عندما يكون $|\omega|$ صغيراً بشكل كافٍ ، فانه يوجد دائرة K مركزها النقطة $z = a$ ، يكون للتابع $F(z)$ فيها صفر وحيد $\zeta$ ( وبسيط ) .

(٢) برهن أنه إذا كان $\Phi(z)$ تابعاً هولومورفياً ما في الدائرة K وعلى محيطها C ، فاننا نجد الدستورين التاليين ، بفرض $|\omega|$ صغيراً بشكل كافٍ ، $f(a) \neq o$ :

أ –
$$\frac{\Phi(\zeta)}{1-\omega f'(\zeta)} = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{ \Phi(a) [ f(a) ]^n \}$$

ب –
$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \Phi'(a) [ f(a) ]^n \}$$

**الحل** : ( أ ) لننظر في التابعين $z - a$ ، $-\omega f(z)$ ، ولنختر دائرة نصف قطرها عدد صغير موجب ويساوي $\varepsilon$ ، ومركزها $z = a$ .
لما كان $f(z)$ هولومورفياً في النقطة $z = a$ فان قياسه محدود في الدائرة $|z-a| < \varepsilon$ ، وبالتالي يمكننا اختيار $|\omega|$ صغيراً بشكل كافٍ بحيث تتحقق المتراجحة $|-\omega f(z)| < \varepsilon$ على C محيط الدائرة المفروضة . ولما كان على هذا المحيط $|z-a| = \varepsilon$ ، فانه يمكن كتابة المتراجحة الاخيرة على C بالشكل :

$$|-\omega f(z)| < |z-a|$$

واستناداً الى نظرية روشي ، يكون عدد أصفار التابع $z - a$ في K يساوي عدد اصفار التابع

$$(z-a) + [-\omega f(z)] = F(z)$$

في K ، أي أن للتابع $F(z)$ صفراً واحداً فقط ( وبسيطاً ) في K وذلك عندما يكون $|\omega|$ صغيراً بشكل كافٍ .

أ – وجدنا في الطلب الأول أنه عندما يكون $|\omega|$ صغيراً بشكل كافٍ ، فإننا نجد دائرة K مركزها $z = a$ يكون للتابع $F(z)$ فيها صفر وحيد وبسيط $\zeta$ . ولما كان $f(a) \neq o$ ، فإن $\zeta \neq a$ .

إن التابع $\frac{\Phi(z)}{F(z)}$ هولومورفي في الدائرة K وعلى محيطها باستثناء النقطة $z = \zeta$ التي تشكل قطباً بسيطاً لهذا التابع . فإذا طبقنا نظرية الرواسب الأساسية ، أمكننا ان نكتب :

$$\frac{\Phi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(z)}{F(z)} \, dz \tag{4}$$

لكن :

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z - a - \omega f(z)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega f(z)}{z - a}}$$

ولما كان $\left| \frac{\omega f(z)}{z - a} \right| < 1$ من أجل قيم صغيرة بشكل كافٍ لِـ $|\omega|$ ،

فإنه يمكننا أن ننشر الكسر الأخير وفق السلسلة الآتية المتقاربة بانتظام ( في المنطقة المعينة بالمتراجحة $\left| \frac{\omega f(z)}{z - a} \right| < 1$ )

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n [f(z)]^n}{(z - a)^n} \tag{5}$$

وبضرب طرفي ( 5 ) بالتابع $\Phi(z)$ ، نجد المساواة

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \frac{\Phi(z)}{z-a} \sum \omega^n \frac{(f(z))^n}{(z-a)^n}$$

أو المساواة التي طرفها الأيمن هو سلسلة متقاربة بانتظام

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \sum^{\infty} \omega^n \frac{\Phi(z)[f(z)]^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad (6)$$

( لماذا ؟ ) . من المعلوم أنه يمكننا مكاملة هذا النوع من السلاسل حداً حداً ؛ عندها نجد باستخدام ( 4 ) أن :

$$\frac{\Phi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \int_c \frac{\Phi(z)[f(z)]^n}{(z-a)^{n+1}} dz$$

وهذه المساواة يمكن كتابتها استناداً الى الدستور :

$$\frac{d^n}{da^n} \psi(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{\psi(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

( $\psi(z)$ تابع هولومورفي في المنطقة المغلقة المحدودة بالمحيط C ، a نقطة من المنطقة ) ، على الشكل التالي :

$$\frac{\Phi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{ \Phi(a)[f(a)]^n \} \qquad (7)$$

أو على الشكل :

$$\frac{\Phi(\zeta)}{1-\omega f'(\zeta)} = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{ \Phi(a)[f(a)]^n \} \qquad (7')$$

ب ـ نفرض :

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \psi(z)$$

عند ذلك نجد ، استناداً إلى ( 7 ) ، أن :

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{ \psi(a) [1 - \omega f'(a)][f(a)]^n \} \qquad (8)$$

إن امثال $\omega^n$ في الطرف الأيمن من هذه المساواة هي :

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{ \psi(a) [f(a)]^n \} - \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \psi(a) f'(a) [f(a)]^n \} =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \psi'(a) [f(a)]^n + n \psi(a) f'(a) [f(a)]^{n-1} \} -$$

$$- \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \psi(a) f'(a) [f(a)]^n \} =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \psi'(a) [f(a)]^n \}$$

وهكذا ، يمكننا كتابة ( 8 ) على الشكل :

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \psi'(a) [f(a)]^n \} = \psi(a) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dn^{n-1}} \{ \psi'(a) [f(a)]^n \} .$$

علماً بأن الرمز $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}} f(x)$ يعني $\int f(x)\, dx$ .

إذا استبدلنا الآن بالرمز $\psi$ الرمز $\Phi$ ، علماً بأن التابعين $\psi$ ، $\Phi$ لهما المواصفات عينها ( لماذا ؟ ) نحصل على الدستور المطلوب وهو :

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ \Phi'(a) [f(a)]^n \} .$$

# مسائل للحل

١ - أوجد اقطاب التابع $f(z)=\operatorname{ctg} z^2$ ومراتب هـــذه الاقطاب احسب بعد ذلك رواسب هذا التابع في هذه الأقطاب .

٢ - أوجد رواسب التوابع التالية في كل النقاط الشاذة المنعزلة وفي النقطة عند اللانهاية :

(أ) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ ، (ب) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$ ، (ح) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ ،

(د) $f(z)=\operatorname{tg} z$ ، (ه) $f(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$ ، (و) $f(z)=z^n\sin\dfrac{1}{z}$ ( n

عدد طبيعي ) ، (ز) $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ ، (ح) $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$

٣ - أوجد رواسب فروع التوابع التالية في النقاط المقابلة التالية :

(أ) $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ في النقطة $z=1$

(ب) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ في النقطة $z=\infty$ .

(ح) $\operatorname{Log} z \sin\dfrac{1}{z-1}$ في النقطة $z=1$

(د) $\dfrac{\operatorname{Arc\,tg} z}{z}$ في النقطتين $z=0$ ، $z=\infty$ .

٤ – إذا كان نشر التابع $f(z)$ في جوار اللانهاية هو :

$$f(z) = C_0 + \frac{C_1}{z} + \dots$$

فأوجد $\operatorname{Res}\left(\{f(z)\}^2\right)_{z=\infty}$ .

٥ – إذا كان للتابع $\varphi(z)$ في النقطــة $a$ قطب من المرتبة الأولى حيث الراسب $A$ ، وكان للتابع $f(\xi)$ في الــلانهاية قطب من المرتبة الأولى ، وكان القسم الأساسي لـ $f(\xi)$ في اللانهاية هو $B\xi$ . فأوجد $\operatorname{Res}\{f[\varphi(a)]\}$ .

٦ – احسب التكامــل $\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ ، بفرض $C$ هو المحيط الدائري $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

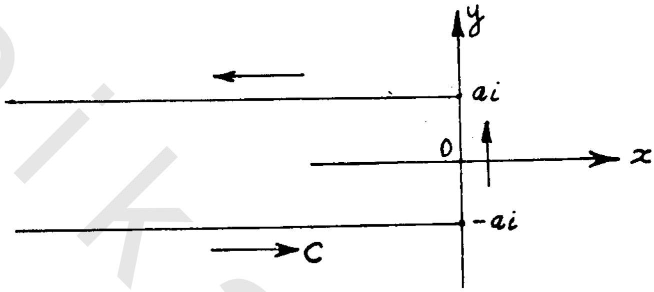
٧ – احسب التكامــل $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$ ، بفرض $C$ هو المحيط الدائري $|z| = r$ .

٨ – احسب التكامــل $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{zg(z)}$ ، إذا كان $C$ محيطاً لمنطقة $G$ تحوي النقطة $z = o$ ، وكان التابع $f(z)$ هولومورفيــاً في المنطقة المغلقة $G$ ، وكان التابع $\frac{1}{g(z)}$ هولومورفياً على $C$ ، وليس له في المنطقة $G$ نقاط شاذة غير الاقطــاب البسيطة $a_1$ ، $a_2$ ، ... ، $a_n$ ( $a_k \neq o$ ، مهما كانت $k$ ) .

٩ – احسب التكامــل $I = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$ ، بفرض

C هو المحيط الدائري $|z| = r \neq 1$ .

١٠ احسب التكامل $\frac{1}{2\pi i} \int_{c} \frac{e^{z}\, dz}{\cos z}$ ، بفرض C هو المحيط الوارد في الشكل ( ٢٢ ) .




( الشكل ٢٣ )

١١ احسب التكامل $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$ $(a > b > o)$

١٢ - احسب التكامل $\int_{0}^{2\pi} \mathrm{ctg}\,(x + a)\, dx$ ، بفرض a عدداً عقدياً ، $\mathrm{Im}\, a \neq o$ .

١٣ - أحسب التكامل : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ .

١٤ - أحسب التكامل : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x\, dx}{x^2 + 4x + 20}$ .

١٥ - أحسب التكامل : $\int_0^{\pi} \frac{\cos m x}{5 - 4 \cos x} dx$ ( m عدد صحيح موجب ) .

١٦ - احسب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$

**إرشاد** : أوجد من التكامل $\int_c \frac{e^{3iz} - 3 e^{iz} + 2}{z^3} dz$ ، بفرض C هو المحيط الوارد في الشكل ( ١٠ ) .

١٧ - احسب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{x^p} dx$ بفرض $( p > \frac{1}{2} )$

١٨ - ليكن f (z) تابعاً كسرياً ليس له أقطاب على القسم الموجب من المحور الحقيقي . برهن أنه إذا كان :

$$\lim_{z \to o} [ z^p f (z) ] = \lim_{z \to \infty} [ z^p f (z) ] = o$$

فإن :

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \sum_{k=1}^{n} \text{Res} [ ( - z )^{p-1} f (z) ]$$

بفرض $\alpha_1$ ، $\alpha_2$ ، ... ، $\alpha_n$ هي أقطاب التابع f (z) .

**إرشاد** : استعن بالتكامل :

$$\int_c ( -z)^{p-1} f(z)dz \ , \ [ (-z)^{P-1} = e^{(p-1) \log(-z)} ]$$

بفرض C هو المحيط الوارد في الشكل ( ١٦ ) .

١٩ - احسب التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ بفرض $1 > p > 0$

٢٠ - احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

٢١ - احسب التكاملين .

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad , \quad J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

استنتج قيمتي تكاملي فرينيل ( Fresnel ) التاليين :

$$K = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx \quad , \quad L = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$$

٢٢ - احسب التكامل :

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad , \quad ( n = 2 , 3 , \ldots )$$

**إرشاد** : استعن بالتكامل .

$$\int_c \frac{dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$$

بفرض C محيطاً مؤلفاً من مقاطع وفق انصاف الاقطار الشعاعية للنقاط $1$ ، $\omega$ ، $\omega^2$ ، ... ، $\omega^{n-1}$ حيث $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ، ومن المحيط الدائري $|z| = R$ .

٢٣ – احسب التكامل $\int_{o}^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx$

٢٤ – احسب التكامل $\int_{o}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)[\log^2 x+(2n+1)^2\pi^2]}$

بفرض $a > o$ ، $n$ عدداً طبيعياً .

**تمهيد** : استعن بالتكامل :

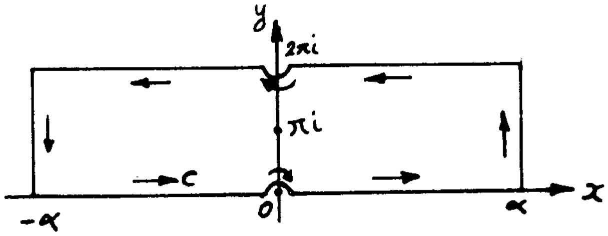
$$\int_{c} \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Log} z-(2n+1)\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Log} z-(2n-1)\pi i}+\dots+\frac{1}{\operatorname{Log} z+(2n-1)\pi i}\right] dz$$

بفرض C هو المحيط الوارد في الشكل ( ١٦ ) ، وأن الفرع المختار للتابع $\operatorname{Log} z$ هو بحيث :

$$o \leqslant \arg z < 2\pi \quad , \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i \arg z$$

٢٥ – أوجد قيمة التكامل $\int_{o}^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x} dx$ ، بفرض a عدد حقيقياً

**إرشاد** : استعن بالتكامل $\int_{c} \frac{e^{aiz}\, dz}{\operatorname{sh} z}$ ، بفرض C هو المحيط الوارد في الشكل ( ٢٤ )




شكل ( ٢٤ )

٢٦ – احسب التكامل $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ch}\, a x}{\text{ch}\, \pi x} dx$

بفرض $-\pi < a < \pi$

**إرشاد** : استعن بالتكامل $\int_{c} \frac{e^{az}}{\text{ch}\pi z} dz$ ، حيث C هو محيط المستطيل :

$$o \leqslant \text{Im}\, z \leqslant 1 \quad , \quad -\alpha \leqslant \text{Re}\, z \leqslant \alpha$$

٢٧ – أوجد قيمتي التكاملين :

(a) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} dz ,$$

(b) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{t^z \, dz}{z^{n+1}} \qquad ( t^z = e^{z \log t} )$$

بفرض n عدداً طبيعياً ، $t > o$ ، وإن $C_1$ هو المستقيم $\text{Re}\, z = \alpha > o$ الذي يسار عليه من الأسفل إلى الأعلى ، علماً بأننا اخترنا $\alpha$ بشكل تصبح فيه كل النقاط الشاذة للتابع المكامل على يسار $C_1$ .

٢٨ – احسب :

$$\int_{o}^{\infty} dt \int_{C_1} \frac{e^{z-\frac{at}{z}}}{z^2}\, dz \qquad (a > o)$$

بفرض $C_1$ هو المستقيم الوارد في التمرين السابق .

**إرشاد** : غير ترتيب المكاملة .

٢٩ - احسب التكامـــل $\int_{C} \frac{\operatorname{Log}(z-1)}{z^2}\, dz$ ، بفرض C محيط دائري مركـــزه o ونصف قطره 2 نفرض أننا بـدأنا السير من النقطة $z = 2$ وأن قيمة اللوغارتيم في هذه النقطة يساوي الصفر

٣٠ - ليكن $f(z)$ تابعـــاً المتحول العقدي z نفرض أن هذا التابع وحيد القيمة ولا يقبل الا عدداً منتهياً من النقاط الشاذة في المستوي كله . نفرض كذلك بأنه إذا كانت هـذه النقاط الشاذة حقيقية ، فإن قياس كل منها اكبر من 1 .

(١) برهن على صحة المساواة .

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \pi \sum R$$

بفرض أننا أخذنا القيمة الموجبة للجذر ، وأن $\sum R$ هو مجموع رواسب التوابع $f(z)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ في النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ وفي النقطة $z=\infty$.

اذكر فرع الجذر الذي اخترته في هذا الحساب ، وأشر كذلك إلى المقطع الذي يجعل هذا الفرع وحيد القيمة .

(٢) نفرض $f(x) = x^n$ ( n عدد طبيعي ) أحسب في هـذه الحالة قيمة التكامل باستخدام الطريقة السابقة

(٣) تحقق من صحة النتيجة الحاصلة باستخدام الطرق الابتدائيـة في الحساب التكاملي

٣١ - أوجد استناداً إلى نظرية روشي عدد جذور المعادلة :

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

داخل الدائرة $|z| < 1$

٣٢ – ما عدد جذور المعادلة :

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

الموجودة في الدائرة $|z| < 1$ وفي الحلقة الدائرية $1 < |z| < 2$ ؟

٢٠٤ - ما عـدد جذور المعـادلة : $e^z = a z^n$ الموجودة في الدائرة $|z| < R$ ، بفرض n عدداً طبيعياً ، $|a| > \frac{e^R}{R^n}$ ؟

٣٣ - برهن أنه إذا كان $|\rho| < 1$ ، فإن كثير الحدود

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

ليس له جذور في الدائرة $|z| < \rho$ من أجل قيم كبيرة بشكل كافٍ للعدد الطبيعي n

٣٤ – انشر وفق سلسلة قوى بالنسبـة لـ $\omega$ كلا من فرعي التابع $z(\omega)$ المعين بالمعادلة $\omega = 2z + z^2$ ( إن $z(0) = 0$ من أجل الفرع الأول $z(0) = -2$ من أجل الفرع الثاني ).

٣٥ - أنشر وفق قوى $\omega$ التابع $z = z(\omega)$ المعـــين في جوار $\omega = o$ بمعادلة كبلر .

$$z - a = \omega \sin z \qquad (a \neq o, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots) .$$

٢٦ - ليكن $f(z)$ ، $\varphi(z)$ تابعين هولومورفـــين في جوار النقطة $a$ ، $C$ محيط دائري مركزه في $a$ ونصف قطره $r$ ، تتحقق في جميع نقاطه المتراجحة

$$|\alpha f(z) + \beta \varphi(z)| < r .$$

برهن أنه إذا كان $\Phi(\zeta)$ تابعاً هولومورفيا للجذر الوحيد للمعادلة .

$$z - a - \alpha f(z) - \beta \varphi(z) = o$$

فإن :

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum \frac{\alpha^m \beta^n}{m!\, n!} \frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}} \{ \Phi'(a) [f(a)]^m [\varphi(a)]^n \}$$

حيث يمتد الجمع على كل قيم $m$ ، $n$ ، باستثناء $m = n = o$ .

★ ★ ★

# الأجوبة

١ – للتابع اقطاب من المرتبة الأولى هي : $z = \pm\sqrt{\pm k\pi}$ ، حيث k عدد طبيعي كما أن للتابع قطب من المرتبة الثانية هو $z = 0$ .

$$\text{Res}\, f(\pm\sqrt{\pm k\pi}) = \pm\frac{1}{2\sqrt{\pm k\pi}} \;;\; \text{Res}\, f(0) = 0$$

٢ –

(أ) $\text{Res}\, f(i) = -\frac{i}{4}$ ، $\text{Res}\, f(-i) = \frac{i}{4}$ ، $\text{Res}\, f(\infty) = 0$

(ب) $\text{Res}\, f(0) = 1$ ، $\text{Res}\, f(\pm 1) = -\frac{1}{2}$ ، $\text{Res}\, f(\infty) = 0$

(حـ) $\text{Res}\, f(-1) = 2\sin 2$ ، $\text{Res}\, f(\infty) = -2\sin 2$

(د) $\text{Res}\, f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1$ ، $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(هـ) $\text{Res}\, f(k^2\pi^2) = (-1)^k\, 2k^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \dots)$.

(و) $\text{Res}\, f(0) = 0$ إذا كان $n < 0$ أو كان $n > 0$ وفردياً ؛

$\text{Res}\, f(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$ إذا كان $n = 0$ أو كان $n > 0$ وزوجياً

(ز) $\text{Res}\, f(0) = -\text{Res}\, f(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

(خ) $\text{Res}\, f(-3) = -\text{Res}\, f(\infty) =$

$$= -\sin 2 \cdot \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{(2n-1)!\,(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!} \right]$$

٣ –

(أ) $2\ ;\ o$ ، (ب) $\pm \frac{(a-b)^2}{8}$ ، (حـ) ١) $2^{k\pi i} + \frac{1}{2.3!} - \frac{1}{4.5!} + \cdots$ إذا كان $\text{Log}\, 1 = 2k\pi i$ ، ٢) $-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3.4!} - \frac{1}{5.6!} + \cdots$ ( من أجل جميع الفروع ) .

(د) $\text{Res}\, f(o) = k\pi$ إذا كان $\text{Arc tg}\, o = k\pi$ ؛
$\text{Res}\, f(\infty) = -\frac{(2k+1)\pi}{2}$ إذا كان $\text{Arc tg}\, \infty = \frac{(2k+1)\pi}{2}$

٤ – $-2C_oC_1$ ، ٥ – $AB$ ، ٦ – $-2\pi i$ ، ٧ – $1$ ،

٨ – $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_k)}{a_k\, g'(a_k)} + \frac{f(o)}{g(o)}$ .

٩ – $I = o$ إذا كان $r < 1$ ؛ $I = \pm 1$ إذا كان $r > 1$ ( تتبع الاشارة فرع التابع المكامل ) .

١٠ – $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$ ، ١١ – $\frac{\sqrt{2}\, a\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ ، ١٢ – $-2\pi i\, \text{sign Im} a$

١٣ – $-\frac{\pi}{27}$ ، ١٤ – $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2 + \sin 2)$ ، ١٥ – $\frac{\pi}{3 . 2^m}$

١٦ – $\frac{3\pi}{8}$ ، ١٧ – $\frac{1}{p-1}\, \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos\frac{\pi}{2p}$ ( عندما $p = 1$ يصبح الجواب $\frac{\pi}{2}$ ) .

١٩ - $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ ، ٢٠ - $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$ ، ٢١ - $I=J=2K=2L=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

٢٢ - $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$ ، ٢٣ - $\pi$

٢٤ - $\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\pi}{2a}\sum_{k=o}^{2n}(-1)^k\frac{2k+1}{\log^2 a+(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}-\frac{1}{1+a^2}\right\}$

٢٥ - $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi a}{2}$ ، ٢٦ - $\frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$

٢٧ - (a) $\frac{t^n}{n!}$

(b) - $\frac{\log^n t}{n!}$ إذا كان $t>1$ ؛ o إذا كان $t<1$ ؛ أما إذا كان $t=1$ فإن قيمة التكامل تساوي o عندما $n<1$ وتساوي $\frac{1}{2}$ عندما $n=1$ ( القيمة الأساسية ) .

٢٨ $\frac{2\pi i}{a}$ ، ٢٩ - $\pi i$ .

٣٠ - (٢) إن قيمة التكامل هي : $\pi\frac{n!}{2^n(\frac{n}{2}!)^2}$ عندما يكون n زوجياً .

$\pi\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(\frac{n+1}{2}!)^2}$ عندما يكون n فردياً .

(٣) نكتب التكامل بالشكل $\int_{0}^{1} + \int_{-1}^{0}$ ثم نغير المتحول في احدى هذين التكاملين ، ونرد التكامل الحاصل إلى تكامل أولر من النوع الأول .

٣١ – أربعة جذور ، ٣٢ – في الدائرة جذر واحد ، وفي الحلقة ثلاثة جذور ، ٣٣ – عدد الجذور هو n :

٣٤ – $$z = \frac{1}{2}\,\omega + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{2^{2n-1}\,.\,n!}\,\omega^n \;;$$

$$z = -2 - \frac{1}{2}\,\omega + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{2^{2n-1}\,.\,n!}\,\omega^n \,.$$

٣٥ – $$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\,(\sin^n a)\,.$$

★ ★ ★