الفصل الثالث

التوابع المركبة - نهاية تابع - الاستمرار - الاشتقاق

١ - ليكن المستوي المركب (x, y) الذي تقع فيه مجموعة النقاط E $(z = x + iy)$ ولنتصور مستوياً مركباً آخر نرمز له بـ (X, Y) تقع فيه مجموعة النقاط H : $(Z = X + iY)$ إن كل تطبيق للمجموعة E في H يعرف Z كتابع لـ z ونكتب .

$$Z = f(z)$$

٢ - التابع الوحيد التعيين (الوحيد القيمة) اذا قابل كل قيمة لـ z من E قيمة وحيدة من H قلنا إن التابع وحيد التعيين .

٣ - التابع الكثير التعيينات : إذا قابل كل قيمة لـ z من E أكثر من قيمة واحدة لـ Z من H قلنا إن التابع كثير التعيينات أو متعدد القيم .

٤ - نهاية تابع : إذا كان $f(z)$ وحيد التعيين على مجموعة ما E و z_0 نقطة تجمع لـ E ولنفرض أنه من الممكن أن نجد من أجل كل عدد ε ، مهما كان صغيراً ، عدداً δ بحيث يكون :

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

من أجل قيم z التي تحقق $|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$

قلنا إن $f(z)$ يسعى نحو A عندما يسعى z نحو z_0 بشكل كيفي ونرمز لذلك بالشكل :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

٥ – يمكن تعميم نظريات النهايات للتوابع الحقيقية على التوابع المركبة ونكتب :

اذا كان $f(z) \longrightarrow l_1$, $g(z) \longrightarrow l_2'$ فان $f(z) + g(z) \longrightarrow l_1 + l_2$

$$f(z) \cdot g(z) \longrightarrow l_1 \cdot l_2 \quad , \quad \frac{1}{f(z)} \longrightarrow l_1$$

وذلك عندما $z \longrightarrow z_0$ وعندما يكون $f(z_0) \neq 0$.

٦ – الاستمرار : اذا كان $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين ضمن منطقة ما D و z_0 نقطة من هذه المنطقة فاذا أمكن إيجاد عدد $\delta > 0$ من أجل كل $\varepsilon > 0$ مهما كان صغيراً بحيث يكون :

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{من أجل} \quad |z - z_0| < \delta$$

فاننا نقول إن $f(z)$ تابع مستمر في النقطة z_0 .

إذا كان التابع $f(z)$ مستمراً في كل نقطة من نقاط منطقة ما D قلنا إن التابع $f(z)$ مستمر في هذه المنطقة .

٧ – يمكن تعميم نظريات استمرار التوابع الحقيقية على التوابع المركبة بالشكل الذي عممنا فيه نظريات النهايات .

٨ – الاستمرار المنتظم : نقول عن التابع $f(z)$ إنه تابع مستمر بانتظام ضمن منطقة مستمرة فيما اذا تمكنا من أن نجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ مهما كان صغيراً عدداً $\eta(\varepsilon)$ تابعاً لـ ε فقط بحيث يكون :

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

وذلك من أجل كل زوج (z , z') من نقاط المنطقة المفروضة تحققان المتراجحة :

$$|z - z'| < \eta(\varepsilon)$$

يبرهن أنه إذا كان التابع $f(z)$ مستمراً في كل نقطة من نقاط منطقة مستمرة فانه يكون مستمراً بانتظام ضمن هذه المنطقة .

٩ – اشتقاق التوابع المركبة : يعرف مشتق التابع المركب كتعريف مشتق التابع الحقيقي فنقول : إذا كانت النهاية :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

موجودة وتساوي A عندما يسعى h نحو الصفر بشكل كيفي فاننا نقول إن A يمثل مشتق التابع $f(z)$ في النقطة z_0 .

١٠ – نظرية كوشي - ريمان : إن الشرط اللازم والكافي ليكون التابع المركب الوحيد التعيين :

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) .$$

قابلاً للاشتقاق في النقطة z_0 هو :

آ – أن تكون المشتقات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ موجودة ومستمرة في جوار ما لـ z_0 .

ب – أن تتحقق شروط كوشي ريمان :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

نقول عن التابعين u ، v المحققين للشرطين (١) بتابعين متوافقين مترافقين .

يعطي مشتق التابع $f(z)$ باحدى العلاقات التالية :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

١١ – التابع التحليلي : نقول عن تابع ما $f(z)$ إنه تحليلي في النقطة z_0 إذا حقق الشروط التالية :

١ – اذا كان معرفاً في منطقة تحوي النقطة z_0 .

٢ – اذا كان وحيد التعيين في النقطة z_0 .

٣ – اذا كان قابلا للاشتقاق في النقطة z_0 .

ونقول عن التابع $f(z)$ إنه تحليلي في المنطقة D فيما إذا كان تحليلياً في كل نقطة من نقاط D ماعدا عدد محدود من نقاطها .

١٢ – التابع المنتظم (الهولوموري) : إذا كان التابع $f(z)$ تابعاً تحليلياً في كل نقطة من نقاط منطقة ما D من المستوي المركب قلنا إن هذا التابع تابع منتظم في المنطقة D .

١٣ - السلاسل التامة : تسمى بسلسلة تامة للمتحول z كل سلسلة من الشكل :

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

وتسمى بسلسلة القياسات للسلسلة (2) السلسلة :

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n| |z|^n \tag{3}$$

وهي سلسلة حقيقية موجبة لها نصف قطر تقارب ϱ معرف بالعلاقة :

$$\varrho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}}$$

وتكون السلسلة (3) متقاربة إذا كان $\varrho > |z|$ ومتباعدة إذا كان $\varrho < |z|$ ، إذا كانت السلسلة (3) متقاربة فان السلسلة (2) تكون متقاربة مطلقاً .

١٤ - نظرية آبل : اذا كانت السلسلة (2) متقاربة من أجل $z = z_0$ فانها تكون متقاربة مطلقاً من أجل $|z| < |z_0|$.

تكون السلسلة التامة متقاربة من أجل $\varrho > |z|$ ومتباعدة من أجل $\varrho < |z|$ ونسمي ϱ أيضاً بنصف قطر تقارب السلسلة (2) .

١٥ - التقارب المنتظم : نقول عن السلسلة (2) إنها متقاربة بانتظام فيما إذا امكن ايجاد عدد طبيعي N من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، مهما كان صغيراً ، بحيث يكون :

$$R_p = \left| \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n \right| < \varepsilon \qquad \text{من اجل كل} \qquad p > N$$

وذلك مهما كانت قيمة z ضمن منطقة تقارب السلسلة (2) .

إنّ N في هذه الحالة : تابع لـ ε ولكنه غير تابع لـ z .

إن كل سلسلة تامة متقاربة بانتظام ، داخل دائرة تقاربها ، ولها مجموع نرمز له بـ :

$$S(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

إن التابع $S(z)$ معرف على دائرة التقارب وهو مستمر وقابل للاشتقاق ومشتقه هو :

$$S'(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

١٦ - التابع الأسي : يعرف التابع الأسي بالعلاقة :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \tag{4}$$

وهو يتمتع بكل صفات التابع الأسي الحقيقي ويمكن كتابته بالشكل :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

١٧ - التوابع الدائرية : تعرف التوابع الدائرية المركبة بسلاسل تامة تشبه السلاسل التامة التي تعرف فيها هذه التوابع في الساحة الحقيقية :

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

يبرهن بمقارنة هاتين السلسلتين مع السلسلة (4) أن :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

تحقق التوابع الدائرية المركبة كل العلاقات المثلثية التي تحققها التوابع الدائرية الحقيقية .

١٨ - التوابع القطعية : نعرف التوابع القطعية المركبة بسلاسل مشابهة للسلاسل التي تعرف بها التوابع القطعية الحقيقية :

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

تمارين

٦٣ – برهن أن التابع :

$$f(z) = \frac{x^3 y (y - i x)}{(x^6 + y^2) (x + i y)} \qquad (1)$$

يسعى إلى الصفر عندمـــا يسعى z نحو الصفر على أي نصف قطر شعاعي . ولكن هذا التابع لايسعى إلى الصفر فيما إذا سعى z إلى الصفر بشكل كيفي .

الحـــل : لنقسم صورة ومخرج الكسر (1) على x^3 ونبدل كل $\frac{y}{x}$ بـ m ميل نصف القطر الشعاعي oz فنجد :

$$f (z) = \frac{x^2 m (m - i)}{(x^4 + m^2)(1 + i m)} \longrightarrow 0$$

وذلك عندما $x \longrightarrow 0$ أي عندمـا تتقرب z من الصفر على نصف القطر الشعاعي oz .

أما لو جعلنا مثلاً z تتقرب من الصفر على المنحني $y = x^3$ فان التابع (2) يأخذ الشكل :

$$f (z) = \frac{x^6 (x^3 - i x)}{2 x^6 (x + i x^3)} = \frac{x^9 - i x^7}{2 i x^9 + 2 x^7} \longrightarrow \frac{-i}{2}$$

وذلك عندما $x \longrightarrow 0$ وهذا مايبين من أنه ليس للتابــع f (z)

نهاية وحيدة عندما $z \to o$ بشكل كيفي .

٦٤ – أوجد القسم الوهمي والقسم الحقيقي للتابع z^n حيث n عدد طبيعي .

الحل : لنكتب $z = x + i\,y$ ولننشر حسب دستونيوتن :

$$(x + i\,y)^n = x^n + i\,n\,x^{n-1}\,y - \frac{n(n-1)}{2\,!}\,x^{n-2}\,y^2 + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^p\,n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2p)\,!}\,x^{n-2p}\,y^{2p} + \cdots$$

$$+ i\,\frac{(-1)^p\,n(n-1)\ldots(n-2p)}{(2p+1)\,!}\,x^{n-2p-1}\;y^{2p+1}$$

$$+ \cdots + i^n\;y^n \;=\; A + i\,B$$

فاذا كان n فردياً فانه يكون :

$$A = \sum_{p=o}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^p\,\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2p)\,!}\,x^{n-2p}\,y^{2p}$$

$$B = \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^p\,\frac{n(n-1)\ldots(n-2p)}{(2p+1)\,!}\,x^{n-2p-1}\,y^{2p+1}$$

أما إذا كان n زوجياً فانه يكون :

$$A = \sum_{p=o}^{\frac{1}{2}n} (-1)^p\,\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2p)\,!}\,x^{n-2p}\,y^{2p}$$

$$B = \sum_{p=o}^{\frac{1}{2}n-1} (-1)^p\,\frac{n(n-1)\ldots(n-2p)}{(2p+1)\,!}\,x^{n-2p-1}\,y^{2p+1}$$

٦٥ – برهن أن التابع :

$$f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$$

هو تابع مستمر في النقطة $z = i$.

الحل : إن هذا التابع غير معين في النقطة $z = i$ فهو إذن تابع غير مستمر في هذه النقطة أما إذا اعدنا تعريف هذا التابع في النقطة المذكورة وكتبنا أن :

$$f(i) = \lim_{z \to i} f(z) = 4 + 1\,i$$

فان هذا التابع يصبح مستمراً في النقطة المذكورة .

٦٦ - برهن أن التابع :

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$$

مستمر على محيط الدائرة $|z| = 1$ وداخلها عدا نقاط أربعة يطلب تعيينها وبرهن أن هذا التابع مستمر بانتظام على الساحة المؤلفة من الدائرة السابقة ومحيطها بعد أن تحذف منها أربع جوارات للنقاط الأربعة المذكورة .

الحل : ليس لهذا التابع قيمة معينة عندما ينعدم فيه المخرج فهو غير مستمر من أجل النقاط الأربعة التي يكون فيها :

$$z^4 + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad z = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{4}} \quad \text{حيث} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

لنبرهن أن التابع المفروض مستمر في نقطة من نقاط الدائرة المفروضة ومحيطها عدا هذه النقاط .

لنفرض z_0 نقطة من هذه الساحة ولنكتب شروط الإستمرار الذي نذكرها بالشكل التالي :

يجب أن نجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ ، مهما كان صغيراً ، عدداً

$\eta(\varepsilon, z_0)$ بحيث يكون $f(z) - f(z_0) < \varepsilon$ من أجل $z - z_0 < \eta$.

لنكتب المتراجحة الأولى ونستخرج منها المتراجحة الثانية :

$$\frac{z}{z^4+1} - \frac{z_0}{z_0^4+1} = \frac{zz_0^4 + z - z_0 z^4 - z_0}{(z^4+1)(z_0^4+1)} \quad .$$

إن الصورة في الكسر الأخير تقبل القسمة على $z - z_0$ فلنخرجه خارج قوسين :

$$(1) \qquad f(z) - f(z_0) = \frac{(z - z_0)\left[1 - z z_0 (z_0^2 + z z_0 + z^2)\right]}{(z^4+1)(z_0^4+1)}$$

نريد أن يكون قياس هذا الفرق أصغر من ε فيكفي أن نأخذ أصغر من ε ، كسراً آخر قياسه أكبر من قياس هذا الكسر . إن الكسر الآخر هـذا ينتج عن الكسر الأول بأن نبدل الصورة بتركيب قياسه أكبر من قياسها ونبدل المخرج بتركيب آخر قياسه أصغر من قياسه .

إن من المعلوم ان $|z| \leqslant 1$ و . $|z^4+1|$ يجب أن يكون موجباً لأننا استثنينا من الساحة النقاط الأربعة التي تجعل هذا المقدار معدوماً . فلنختر مثلاً جواراً لـ z_0 بحيث يكون .

$$|z^4 + 1| > h ,$$

استناداً إلى ما تقدم وإلى الخاصة التي تقول إن قياس مجموع أعداد مركبة اصغر أو يساوي مجموع قياسات هـذه الأعداد ، يمكننا أن نكتب ما يلي :

$$(2) \qquad |f(z) - f(z_0)| \leqslant \frac{|z-z_0|\left[1 + |zz_0|\left(|z_0^2| + |z| . |z_0| + |z^2|\right)\right]}{|z^4+1| . |z_0^4+1|}$$

$$\leqslant \frac{|z-z_0|\left[1 + |z_0|\left(|z_0^2| + |z_0| + 1\right)\right]}{h\,|z_0^4+1|}$$

يكفي أن يكون هذاالكسر أصغر من ε ليكون .

$$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

وبتحقق هذا الأمر إذا كان :

$$|z - z_0| < \frac{\varepsilon h |z_0^4 + 1|}{1 + |z_0|(|z_0|^2 + |z_0| + 1)} = \eta(\varepsilon, z_0) \tag{4}$$

وبذلك نكون قد وجدنا من أجل كل عدد موجب ε مهما كان صغيراً عدداً آخر η يتبع ε و z_0 يحققان شروط الاستمرار .

إذا حذفنا من الساحة المؤلفة من محيط الدائرة المفروضة وداخلها جوارات اربعة للنقاط الأربعة التي ينعدم فيها المخرج فنكون قد فرضنا على $z_0^4 + 1$ أن يكون موجباً فلنفرض أنه أكبر من h_1 فاذا بدلنا في مخرج الكسر الموجود في (4) z_0 بعدد قياسه أكبر من قياس هذا العدد كالواحد مثلاً فان هذه العلاقة تأخذ الشكل :

$$|z - z_0| < \frac{\varepsilon h \cdot h_1}{4} = \eta(\varepsilon) \tag{5}$$

فتكون المتراجحة (3) محققة إذا تحققت المتراجحة (5) وذلك مهما كانت مواقع النقطتين z , z_0 في الساحة المفروضة ضمن الشرط الوحيد المعرف بالمتراجحة (5) . وهذا يعني أن الاستمرار في هـذه الساحة منتظم .

٦٧ – بين فيما إذا كان التابع التالي قابلاً للاشتقاق وعين قيم z التي لايكون من أجلها مستمراً .

$$w = \frac{(x+1) - i y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

الحل : يمكن كتابة هذا التابع بالشكل :

$$W = P + iQ = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{iy}{(x+1)^2+y^2}$$

لنحسب المشتقات الجزئية لـ P و Q بالنسبة لـ x ، y :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{-2y(x+1)}{[(x+1)^2+y^2]^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(x+1)}{[(x+1)^2+y^2]^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}$$

ونلاحظ بسهولة أن شروط كوشي قد تحققت من أجل جميع قيم x ، y إلا من أجل :

$$y = 0 \quad , \quad x = -1$$

إن التابع المذكور قابل للاشتقاق في كل نقطة عدا النقطة $(-1, 0)$.

إذا لاحظنا أنه يمكن كتابة مخرج التابع w بالشكل :

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + y^2 = (x+1+iy)(x+1-iy)$$

فان التابع المفروض يأخذ الشكل :

$$w = \frac{1}{x+1+iy} = \frac{1}{z+1}$$

ونرى بسهولة أن هذا التابع غير مستمر من أجل $z = -1$.

٦٨ – برهن أن التابع $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ توافقي ثم احسب التابع v الذي يجعل التابع $f(z) = u + iv$ تابعاً تحليلياً و أوجد صيغة $f(z)$ بدلالة z .

الحل : لنحسب المشتقين الجزئيين :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ، \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ولنبرهن أنها يحققان معادلة لابلاس أي ان مجموعها يساوي الصفر :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \quad ، \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

إستناداً إلى معادلات كوشي نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y - 2 , \quad v = 2xy - y^2 - 2y + \varphi(x)$$

لنكتب الآن أن u و v يحققان المعادلة الثانية من معادلات كوشي :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad -2y - 2x + 3 = -2y - \varphi'(x)$$

ومنه :

$$\varphi'(x) = 2x - 3 \quad , \quad \varphi(x) = x^2 - 3x + c$$

ويكون :

$$v = x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y + c$$

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y + i\,(x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y + c)$$

وإذا تذكرنا أن :

$$z^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy) \quad , \quad iz^2 = i(x^2 - y^2) - 2xy$$

فانه يكون :

$$f(z) = z^2 + iz^2 - 2z - 3iz + ic = z^2(1+i) - z(2+3i) + ic$$

٦٩ - ليكن التابع المركب :

$$F(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y) \qquad (1)$$

حيث نفرض أن $P(x, y)$ تابع لـ $x^2 + Ay^2$ فقط . يطلب تعيين الثابت A ليكون التابع (1) تابعاً تحليلياً :

الحل : لنفرض $t = x^2 + A y^2$ فيكون $P(x, y) = \varphi(t)$

ليكون التابع $F(z)$ تحليلياً يجب أن يحقق كل من P و Q معادلة لابلاس :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

ولكن حسب ما فرضنا اعلاه :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2 x \varphi'(t) \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 2 A y \varphi'(t)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2 \varphi' + 4 x^2 \varphi''(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 A \varphi'(t) + 4 A^2 y^2 \varphi''(t)$$

ويأخذ بعد هذا الشرط (2) الشكل التالي :

$$(1 + A) \varphi' + 2 (x^2 + A^2 y^2) \varphi'' = 0$$

لكي يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية وايجاد التابع $\varphi(t)$ الذي يتعلق بـ $t = x^2 + A y^2$ يجب أن يكون من الممكن حساب عوامل هذه المعادلة بدلالة t . فلكي نتمكن من حساب $x^2 + A^2 y^2$ بدلالة t يلزم أن يكون A مساوياً لإحدى قيمتين هما $A = -1$ ، $A = +1$

فاذا كان $A = -1$ أخذت المعادلة الشكل :

$$\varphi''(t) = 0 \qquad (3)$$

أما إذا كان $A = +1$ فان المعادلة المذكورة تأخذ الشكل :

$$2 \varphi' + 2 t \varphi'' = 0 \qquad (4)$$

فاذا كانت الحالة الأولى فانه يكون :

$$\varphi(t) = \alpha t + \beta$$

$$P(x, y) = \alpha(x^2 - y^2) + \beta$$

واستناداً إلى معادلات كوشي نجد :

$$Q(x, y) = 2\alpha x y + \gamma$$

ويكون :

$$F(z) = \alpha(x^2 - y^2) + \beta + 2i\alpha x y + i\gamma = \alpha z^2 + \beta + i\gamma$$

أما إذا كانت الحالة الثانية : $\varphi' + t\,\varphi'' = o$ فإنه يكون

$$\varphi' = \frac{\lambda}{t}, \quad \varphi = \lambda \log t + \mu, \quad P = \lambda \log(x^2 + y^2) + \mu$$

ويكون عندها التابع Q محققاً للعلاقتين :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2\lambda y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2\lambda x}{x^2 + y^2}$$

$$dQ = 2\lambda \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\lambda\, d \operatorname{Arct} \frac{y}{x}$$

ونجد أخيراً :

$$Q = 2\lambda \operatorname{Arct} \frac{y}{x} + \eta$$

$$f(z) = \lambda \log(x^2 + y^2) + \mu + i\left[2\lambda \operatorname{Arct} \frac{y}{x} + \eta\right]$$

$$f(z) = 2\lambda \log z + \mu + i\eta$$

حيث نفرض أن λ, μ, η ثلاث أعداد اختيارية ثابتة .

٧٠ - إذا كان $f'(z) = 6x(2y - 1)$ و $f(o) = 3 - 2i$

احسب $f(1 + i)$.

الحل : إذا فرضنا $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$

فإن من المعلوم أنه يمكن كتابة المشتق للتابع المفروض بأربع أشكال منها

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

ونلاحظ استناداً إلى نص المسألة أن :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y-1)$$

ومنه :

$$v = 3x^2(2y-1) + \varphi(y)$$

واستناداً على معادلات كوشي ـ ريمان في شروط قابلية الإشتقاق نجد :

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y-1)$$

ومنه :

$$u = -6xy^2 + 6xy + g(x)$$

ومن ناحية ثانية نجد استناداً على هذه المعادلات أيضاً :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6y^2 + 6y + g'(x) = \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 + \varphi'(y)$$

وبمقارنة طرفي هذه العلاقة نجد :

$$g'(x) = 6x^2 \quad , \quad \varphi'(y) = -6y^2 + 6y$$

ومنه :

$$g(x) = 2x^3 + c_1 \quad , \quad \varphi(y) = -2y^3 + 3y^2 + c_2$$

ونجد أخيراً :

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + c_1 + i(6x^2y - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2 + c_2)$$

واستناداً إلى الفرض نجد :

$$f(o) = c_1 + i c_2 = 3 - 2i \quad ; \quad c_1 = 3 , c_2 = -2$$

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + 3 + i(6x^2y - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2 - 2)$$

لحساب $f(1+i)$ نبدل في هذه العلاقة x بـ 1 و y بـ 1 أيضاً فنجد :

$$f(1+i) = 5 + 2i$$

كما يمكننا أن نكتب $f(z)$ بدلالة z فنجد :

$$f(z) = 2z^3 - 3iz^2 + 3 - 2i$$

وإذا كتبنا في هذه العلاقة $z = 1 + i$ فسوف نجد لهذا التابع القيمة التي وجدناها اعلاه نفسها .

طريقة ثانية : يمكننا أن نفرض أن المشتق $f'(z)$ تابع تحليلي يحقق معادلات كوشي ـ ريمان فيكون :

$$f'(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

حيث :

$$Q(x, y) = 6x(2y-1)$$

ولكن :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 12x \quad , \quad p = 6x^2 + \varphi(y)$$

و

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \varphi'(y) = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -12y + 6$$

فيكون :

$$\varphi'(y) = -12y + 6 \qquad \varphi(y) = -6y^2 + 6y + c$$

و

$$p = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c$$

$$f'(z) = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c + 6ix(2y-1) = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$$

حيث فرضنا :

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

ومنه نجد :

$$U(x, y) = 2x^3 - 6y^2x + 6yx + cx + \psi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -12yx + 6x + \psi'(y) = -12xy + 6x$$ و

ومنه :

$$\psi'(y) = 0 \qquad \text{و} \qquad \psi(y) = c_1$$

فيكون :

$$U(x, y) = 2x^3 - 6y^2x + 6yx + cx + c_1$$

واستناداً إلى معادلات كوشي – ريمان نجد :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c \;,\; V = 6x^2y - 2y^3 + 3y^2 + cy + \eta(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 12xy + \eta'(x) = -\frac{\partial U}{\partial y} = -12xy - 6x$$

وبذلك نجد :

$$\eta'(x) = -6x \qquad \eta(x) = -3x^2 + c_2$$

ويكون :

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + cx + c_1 + i(6x^2y - 2y^3 + 3y^2 + cy - 3x^2 + c_2)$$

إن : $f(0) = 3 - 2i$

يعطينا : $c_1 = 3 \qquad c_2 = -2$

ولامكان حساب $f(1+i)$ بدون ثابت اختياري بحسن اعطـــاء c القيمة صفر فنجد :

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + 3 + i(6x^2y - 2y^3 + 3y^2 - 3x^2 - 2)$$

وهي الصيغة نفسها التي وجدناها أعلاه

٧١ – احسب الصيغة العامة للتابع التحليلي $f(z) = P + iQ$ للمتحول $z = x + iy$ إذا علمت أن P مكون من جداء تابعين من

الشكل $Y(y)$ ، $X(x)$. اختر الثوابت الإختيارية بحيث تكون جذور المعادلة :

$$f(z)=1$$

مزدوجة ومن الشكل $i n \pi$ حيث n عدد طبيعي كيفي :

الحل – إستناداً إلى نص المسألة وشروط كوشي للتوابع التحليلية يمكننا أن نكتب :

$$P(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\,,\quad \frac{\partial P}{\partial x}=X'(x)Y(y)\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

$$(1)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=X'Y=\frac{\partial Q}{\partial y}\quad,\quad Q=X'\int Y\,dy+\varphi(x)$$

$$(2)\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=XY'=-\frac{\partial Q}{\partial x}=-X''\int Y\,dy+\varphi'(x)$$

وبمقارنة طرفي العلاقة (2) نجد أن الحل العام لهذه المعادلة سيكون من الشكل :

$$X=-\frac{X''}{h}\quad,\quad Y'=h\int Y\,dy\quad,\quad \varphi'(x)=0$$

حيث h عدد ثابت إختياري .

لنميز بين حالتين يكون في الأولى منهما h موجباً ويكون في الثانية سالباً .

آ – لنفرض أن $h=\omega^2$ حيث ω عدد حقيقي فيكون :

$$X''+\omega^2 x=0 \qquad X=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

$$Y''-\omega^2 Y=0 \qquad Y=C\,\mathrm{ch}\,\omega y+D\,\mathrm{sh}\,\omega y$$

$$P=X\cdot Y=(A\cos\omega x+B\sin\omega x)(C\,\mathrm{ch}\,\omega y+D\,\mathrm{sh}\,\omega y)$$

ونجد استناداً إلى العلاقة الأخيرة من (1) :

$$Q=(B\cos\omega x-A\sin\omega x)(C\,\mathrm{sh}\,\omega y+D\,\mathrm{ch}\,\omega y)+K$$

وبذلك يأخذ التابع $f(z)$ الشكل التالي :

$$f(z) = P + iQ = (A\cos\omega x + B\sin\omega x)(C\,ch\,\omega y + D\,sh\,\omega y) + i(B\cos\omega x - A\sin\omega x)(C\,sh\,\omega y + D\,ch\,\omega y) + iK$$

واستناداً إلى الدستورين المعروفين :

$$sh\,\omega y = -i\sin i\omega y \quad , \quad ch\,\omega y = \cos i\omega y$$

فان التابع المطلوب يأخذ الشكل :

$$(3) \quad f(z) = (AC - iBD)\cos\omega z + (BC - iAD)\sin\omega z + iK$$

يجب تعيين الثوابت الإختيارية (A , B , C , D , K) بحيث تكون جذور المعادلة :

$$f(z) = 1$$

من الشكل $i\,n\,\pi$ وهذا يعني أن يكون التابع $f(z)$ دورياً ويكون دوره $i\pi$ ولكننا نلاحظ أن دور التابع (3) هو $\frac{2\pi}{\omega}$ ولا يمكننا إختيار الثابت الحقيقي ω بحيث ينقلب هذا الدور إلى $i\pi$ ومعنى ذلك أن أختيارنا $h = \omega^2$ غير موفق .

ب – لنفرض الآن أن $h = -\omega^2$. فيكون .

$$X^2 - \omega^2 X = o \qquad X = A\,ch\,\omega x + B\,sh\,\omega x$$

$$Y^2 + \omega^2 Y = o \qquad Y = C\cos\omega y + D\sin\omega y$$

$$P = (A\,ch\,\omega x + B\,sh\,\omega x)(C\cos\omega y + D\sin\omega y)$$

$$Q = (A\,sh\,\omega x + B\,ch\,\omega x)(C\sin\omega y - D\cos\omega y) + K$$

وإذا تذكرنا العلاقتين :

$$\sin\omega y = -i\,sh\,i\omega y \quad , \quad \cos\omega y = ch\,i\omega y$$

$$(4) \quad f(z) = (AC - iBD)\,ch\,\omega y + (BC - iAD)\,sh\,\omega z + iK$$

إن دور هذا التابع هو $\frac{2 i n \pi}{\omega}$ فيكفي أن نأخـذ $\omega = 2$ ليصبح هذا الدور من الشكل $i n \pi$.

لنفرض $\omega = 2$ ولنشتق التابـــع (4) فنجد :

$$(5) \quad f(z) = (AC - i BD) \operatorname{ch} 2z + (BC - i AD) \operatorname{sh} 2z + i K$$

$$(6) \quad f'(z) = 2 (AC - i BD) \operatorname{sh} 2z + 2 (BC - i AD) \operatorname{ch} 2z$$

بما أن الجذور $z = i n \pi$ مزدوجة فهي تعدم التابع ومشتقه وهذا يعني أنه يجب أن ينعدم التابع (6) من أجـــل $z = i n \pi$ وبصورة خاصة من أجل $n = 0$ أي من أجل $z = 0$ وبذلك نجد أنه يجب أن يكون :

$$(7) \qquad (BC - i AD) = 0$$

كما يجب أن يكون للتابع (5) القيمة (1) من أجل $z = i n \pi$ وبصورة خاصة من أجل $n = 0$ أي $z = 0$ فيكون :

$$(8) \qquad AC - i BD + i K = 1$$

إن الشرطين (7) , (8) هما الشرطان الضروريان بـــين الثوابت الاختيارية الداخلة في اللحل وذلك لكي تتحقق شروط المسألة :

٧٢ – برهن أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(3-z)^{n-1}}{3^n}$ تتقارب مطلقاً إذا كان $|z-3| < 3$ أو $z = 0$ وتتقارب بانتظام من أجـل $|z-3| \leqslant R$ حيث $0 < |R| < 3$ وإنها لاتتقارب بانتظام من أجل كل جوار يحوي النقطة $z = 0$.

الحل : لنطبق قاعدة دالابير فنجد شرط تقارب هـــذه السلسلة المطلق هو :

$$\left|\frac{z(3-z)^n}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{z(3-z)^{n-1}}\right| = \frac{|3-z|}{3} < 1$$

إن السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً من أجل $|z-3| < 3$ وهي متقاربة بداهة من أجل $z = o$ وإنها متباعدة من أجل نقاط المستوي المركب الواقعة خارج دائرة التقارب أما على محيط هذه الدائرة فانـه يكون .

$$|z-3| = 3 \quad , \quad z-3 = 3e^{i\omega} \quad , \quad z = 3+3e^{i\omega}$$

ويأخذ عندها الحد العام للسلسلة الشكل :

$$\frac{(3+3e^{i\omega}) \cdot 3^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\omega}}{3^n} = e^{i(n-1)\omega} + e^{in\omega}$$

إن هذا الحد هو حد سلسلة متباعدة رغم مارأيناه في المسألة (40) من أن كلا من المجموعين :

$$\sum_{o}^{n} e^{ip\omega} \qquad \sum_{1}^{n} e^{i(p-1)\omega}$$

محدود مهما كانت قيمـة n بشرط أن يكون $\omega \neq 2k\pi$ حيث K عدد صحيح غير أنه إذا كان $\omega = (2k+1)\pi$ فانه يكون :

$$e^{i(n-1)\omega} + e^{in\omega} = o$$

وتكون السلسلة متقاربة

إن هذه السلسلة متقاربة بانتظام داخل كل دائرة مركزهـا $z = 3$

وطول نصف قطرها $3 < R$ وهي غير متقاربة بانتظـام في كل جوار للنقطة $z = 0$ مهما كان صغيراً وذلك لأنه يحوي نقاطاً واقعة خارج دائرة تقـارب السلسلة تكون من أجلها السلسلة المفروضة متباعدة .

٧٣ - ادرس تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^n}{n^2 \; 2^n} \qquad (1)$$

الحل : لنطبق قاعدة دالامبير

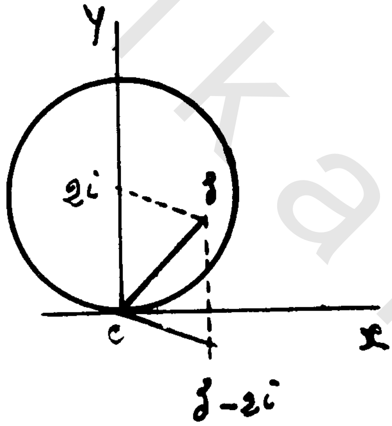
فنجد شرط التقارب المطلق :

$$\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{|z-2i|}{2} < 1$$

أي :

$$|z - 2i| < 2 \qquad (2)$$

تكون السلسلة المفروضة متقاربة اذا وقعت النقطة z داخل الدائرة التي مركزها في النقطة $2i$ ونصف قطرها 2 (شكل ٢) . إن هذه الدائرة هي دائرة التقارب .



(شكل - ٢)

لندرس هذه السلسلة على محيط دائرة التقارب ولنفرض :

$$|z - 2i| = 2$$

فيأخذ عندها الحد العام للسلسلة القياسات الشكل $\frac{1}{n^2}$ وهو الحدالعام لسلسلة موجبة متقاربة فالسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً داخل الدائرة وعلى محيطها .

إن هذه السلسلة متقاربة بانتظام داخل الدائرة (2) فلندرس تقاربها بانتظام على محيط هذه الدائرة أي عندما يكون :

$$|z - 2i| = 2$$

إن شرط التقارب المنتظم يكتب بالشكل :

$$\left|\sum_{p}^{n+p} \frac{(z-2i)^n}{n^2 \cdot 2^n}\right| \leqslant \sum_{p}^{n+p} \frac{|z-2i|^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum_{p}^{n+p} \frac{1}{n^2}$$

ومن الواضح أنه يمكننا أن نجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مهما كان صغيراً عدداً طبيعياً $N(\varepsilon)$ يتبع ε فقط بحيث يكون :

$$p > N(\varepsilon) \quad \text{إذا كان} \quad \sum_{p}^{n+p} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

وهذا يعني أن السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام داخل الدائرة (2) وعلى محيطها .

٧٤ – ادرس تقارب السلسلة :

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{2n-1}}$$

الحـــل : لنطبق على هذه السلسلة قاعدة دالامبير فنجد :

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\left|\frac{z^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{\sqrt{2n-1}}{z^{2n-1}}\right| = \lim\left|\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}\right| |z^2| = |z^2|$$

تكون السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً إذا كان :

$$|z| < 1 \quad , \quad |z^2| < 1 \quad \text{أو} \quad |z|^2 < 1$$

إن دائرة تقارب هذه السلسلة هي دائرة مركزها o ونصف قطرها يساوي الواحد فلندرس تقارب هذه السلسلة على محيط دائرة التقارب أي من أجل $|z| = 1$ أو $z = e^{i\theta}$:

إن السلسلة (1) تصبح محققة لشروط آبل :

١ - المجموع :

$$v_{n,m} = e^{in\Theta} + e^{i(n+1)\Theta} + \dots + e^{im\Theta}$$

محدودة مهما كانت قيمة n و m (انظر المسألة ـ 40) إلا من أجل $\Theta = 2K\pi$.

٢ - إن السلسلة :

$$\sum \left| \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right|$$

متقاربة وذلك لأنه يمكن كتابة حدها العام بالشكل :

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n-1} \cdot \sqrt{2n+1}} =$$

$$= \frac{(2n+1) - (2n-1)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}$$

وذلك لأن مخرج الكسر الأخير لا متناه في الكبر من مرتبة أعلى من مرتبة اللامتناهي في الكبر الأساسي n .

٣ - إن من الواضح ان $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$

إن السلسلة المذكورة متقاربة على محيط دائرة التقارب إلا في النقطة $z = 1$ فإنها تكون متباعدة وهي متقاربة بانتظام داخل دائرة تقاربها .

إن هذه السلسلة غير متقاربة مطلقاً على محيط دائرة تقاربها وذلك لأنه من أجل $|z| = 1$ يأخذ الحد العام لسلسلة القياسات الشكل $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ وهو

أكبر من $\frac{1}{n}$ حد السلسلة المتباعدة المعروفة .

٧٥ – ادرس تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2\ 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \qquad (1)$$

الحل : إن قاعدة دالابير تعطينا شرط تقارب هذه السلسلة المطلق وهو :

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \leqslant 3 \qquad (2)$$

إن العلاقة $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 3$ تمثل النسبة بين بعدي النقطة z عن النقطتين $z_1 = 1$ ، $z_2 = -1$ إن هذه النسبة ثابتة فالحل الهندسي هو محيط دائرة قطرها القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين اللتين تقسمان القطعة $z_1 z_2$ داخلاً وخارجاً بنسبة (3) . إن المبدأ o يقع خارج هذه الدائرة ويحقق المتراجحة (2) فتكون المتراجحة (2) محققة من أجل جميع النقاط الواقعة خارج هذه الدائرة ومن أجل هذه النقاط تكون السلسلة متقاربة مطلقاً وتكون متباعدة داخل الدائرة المذكورة.

إن السلسلة المفروضة تكون متقاربة مطلقاً على محيط هذه الدائرة لأنه من أجل .

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 3$$

يأخذ الحد العام لسلسلة القياسات الشكل $\frac{1}{n^2}$ وهو الحد العا[م] لسلسلة متقاربة .

٧٦ – ادرس تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{e^{2\,in\pi z}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

الحل : إن قاعدة دالامبير تعطينا شرط التقارب المطلق لهـذه السلسلة وهو :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{e^{2i(n+1)\pi z}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{n^{\frac{3}{2}}}{e^{2\,in\pi z}}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \left|e^{2\,i\pi z}\right|$$

$$\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \left|e^{2\,i\pi z}\right| < 1 \quad , \quad \left|e^{2\,i\pi z}\right| < 1$$

ولكن :

$$\left|e^{2\,i\pi z}\right| = \left|e^{2\,i\pi x} \cdot e^{-2\pi y}\right| = e^{-2\pi y}$$

إن شرط تقارب هذه السلسلة المطلق هو ان يكون :

$$e^{-2\pi y} < 1$$

وهذا لايتحقق إلا من أجل $y > o$

أما إذا كان $y = o$ فان الحد العام للسلسلة المفروضة يأخذ الشكل :

$$\left|\frac{e^{2\,in\pi x}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

بما أن السلسلة الموجبـة $\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة فإن السلسلة المفروضـة تكون متقاربـة مطلقاً . إن السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام على نصف المستوي $y \geqslant o$ أما إذا كان $y < o$ فإن الحد العام للسلسلة يأخذ الشكل :

$$\frac{e^{2in\pi x} \cdot e^{2n\pi |y|}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

وذلك لأن $|y| = i \cdot iy$ عندما يكون $y < o$

إن الحد العام هذا يسعى إلى اللانهاية فالسلسلة المفروضة في هـذه الحالة تكون متباعدة .

٧٧- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ وأوجد مجموعها ضمن منطقة تقاربها .

الحل بتطبيق قاعدة دالامبير نجد أن هذه السلسلة تكون متقاربة من أجل $|z|<1$ ولحساب المجموع نذكر أن السلسلة الهندسية $\sum_{n=o}^{\infty} z^n$ متقاربة من أجل $|z|<1$ ويمكننا أن نكتب :

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots z^n+\dots=\sum_{n=o}^{\infty} z^n \qquad (1)$$

إن هذه العلاقة تمثل مطابقة بين تابعين منتظمين داخل دائرة تقارب الطرف الأيمن منها لذا يمكن اشتقاق الطرفين مرات متتالية ونحصل على سلاسل متقاربة داخل دائرة تقارب السلسلة الأولى نفسها أي :

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1} \quad , \quad \frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,z^{n-2} \qquad (2)$$

ويمكننا أن نكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n-\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,z^n \qquad (3)$$

وذلك لأن الحد الأول من المجموع الأول وهو $1^2 . z$ يختصر مع الحد الأول من المجموع الثاني وهو $1 . z$.

استناداً إلى العلاقات (2) يمكننا أن نكتب العلاقة (3) بالشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n-z\,\frac{1}{(1-z)^2}=z^2\cdot\frac{2}{(1-z)^3}$$

ومنه :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n=\frac{2z^2}{(1-z)^3}+\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

٧٨ – نفرض أن السلسلة التامة $\sum a_n z^n$ نصف قطر تقـــارب مساوياً للوحدة وانها تتقارب في النقطة $z = 1$ برهن أن هـذه السلسلة تتقارب بانتظام في المنطقة المعرفة بالشكل التالي :

$|1 - z| \leqslant \cos \delta$ ، $|\operatorname{Arg}(1 - z)| \leqslant \delta$ حيث $o < \delta < \frac{1}{2}\pi$

استنتج بعد ذلك أن $\Sigma a_n z^n \longrightarrow \Sigma a_n$ وذلـــك عندما $z \longrightarrow 1$ على طريق واقعة داخل دائرة التقارب ولا تمس هذه الدائرة .

الحل : لبرهان هذا التمرين تطبق قاعدة آبل حيث نفرض :

$$a_n = v_n \quad , \quad z^n = \varepsilon_n$$

فنقول إن الشروط الثلاثة الواردة في قاعدة آبل محققة مهما كانت قيمة z أي بشكل منتظم :

١ – لقد فرض بنص المسألة أن السلسلة $\Sigma a_n z^n$ متقاربة من أجل $z = 1$ وهذا يعني أن السلسلة Σa_n متقاربة أي أن :

المجموع
$$V_{n,m} = \sum_n^m v_n$$

محدود وذلك ومهما كانت قيمتا n ، m .

٢ – إن السلسلة التالية متقاربة :

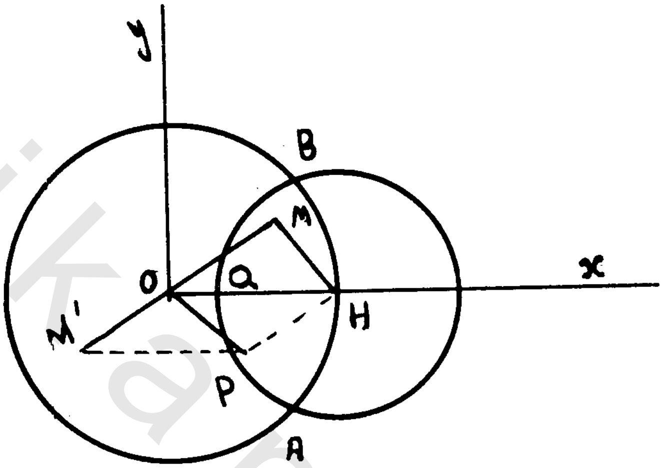
$$\sum |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| = \sum |z^n - z^{n+1}| \qquad (1)$$

في الحقيقة إن الشرط $|1 - z| < \cos \delta$ يجعل z واقعـة داخـل دائرة c_1 مركزها (1) ونصف قطرهـــا $\cos \delta < 1$ وإن الشرط $|\operatorname{Arg}(1 - z)| \leqslant \delta$ حيث $o < \delta < \frac{1}{2}\pi$ يجعل z واقعة في المنطقة المشتركة بين دائرة التقارب C وبين الدائرة C_1 وذلك لأنه يظهر من الشكل :

$$\text{Arg}(1-z) = \widehat{ox, op} = \omega$$

فاذا كان $\frac{\pi}{2} > |\omega|$ فان الزاوية $\omega - \pi = MH\,x$ منفرجـــة

و MH يقطع القوس A Q B .



(الشكل - ٣)

لنفرض أن : $\varrho = |1-z|$ فيكون $1-z=\varrho e^{i\omega}$, $z=1-\varrho e^{i\omega}$

$$|z|^2 = (1-\varrho\cos\omega)^2 + \varrho^2\sin^2\omega = 1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2$$

وبما أن : $|\omega| \leqslant \delta$ فإن $\cos|\omega| \geqslant \cos\delta$

ويكون :

$$|z|^2 \leqslant 1 - 2\varrho \cos\delta + \varrho^2$$

$$|z|^2 \leqslant 1 - 2\varrho\cos\delta + \varrho\cos\delta = 1 - \varrho\cos\delta \qquad (2)$$

وذلك لأن $\varrho \leqslant \cos\delta$ وهذاما يبرهن من أن $1 > |z|$ وأن النقطة z واقعة داخل دائرة تقارب السلسلة المفروضة .

يمكننا كتابة العلاقة (1) بالشكل :

$$\sum|z^n - z^{n+1}| = \sum|1-z||z^n| = |1-z|\sum|z^n|$$

بعد أن برهنا أن $|z| < 1$ فإنه يكون :

$$\sum|z|^n = \frac{1}{1-|z|}$$

ويكون :

$$\sum|z^n - z^{n+1}| = \frac{|1-z|}{1-|z|} \qquad (3)$$

يمكننا أن نكتب العلاقة (2) بعد أن نضيف إلى طرفها الأيمن المقدار الموجب $\frac{1}{4}\ \varrho^2\cos^2\delta$:

$$|z|^2 \leqslant 1 - \varrho\cos\delta + \frac{1}{4}\varrho^2\cos^2\delta$$

وبما أن : $\frac{1}{2}\ \varrho\cos\delta < 1$ فانه يكون :

$$|z| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\varrho\cos\delta$$

ويمكن بعد ما تقدم كتابة العلاقة (3) بالشكل :

$$\sum|z^n - z^{n+1}| = \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{\varrho}{\frac{1}{2}\varrho\cos\delta} = \frac{2}{\cos\delta}$$

وهذا ما يثبت الشرط الثاني من أجل كل نقطة محققة للشرطين :

$$(4) \quad |1-z| \leqslant \cos\delta\ ,\ |\mathrm{Arg}\,(1-z)| \leqslant \delta\ \ ,\ 0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$$

وهو محقق أيضاً من أجل النقطة $z = 1$ وذلك لأن كل حد من حدود المجموع (3) يصبح معدوماً فالشرط الثاني محقق مهما كانت النقطة z في المنطقة المعرفة بـ (4) .

٣ – إن الشرط الثالث وهو :

$$\varepsilon_n = z^n \longrightarrow 0$$

محقق في كل نقطة من نقاط المنطقة (4) عدا النقطة $z = 1$

وينتج عما تقدم أن شروط آبل محققة بانتظام في المنطقة (4) عدا النقطة $z = 1$ وبما أن السلسلة متقاربة في هذه النقطة فانها تكون متقاربة بانتظام على المنطقة (4) .

بما أن السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام ضمن المنطقة (4) فإنها تمثل تابعاً مستمراً يحقق :

$$\sum a_n z^n \longrightarrow \sum a_n$$

وذلك عندما $z \longrightarrow 1$ على أي طريق واقع داخل دائرة التقارب $|z| = 1$ وإن هذه النتيجة صحيحة عندما $z \longrightarrow 1$ على طريق واقعة داخل دائرة التقارب ولا تمس هذه الدائرة وذلك ليكون من المؤكد ، عندما تكون الزاوية θ قريبة من $\frac{1}{2}\pi$ ، من أن الطريق التي يرسمها z بجوار $(z = 1)$ واقعة برمتها داخل المنطقة (4) .

٧٩ – احسب قيم z التي ينعدم من أجلها التابع $\sin z$.

الحل : إذا كان $z = x + i y$ فان :

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

ونلاحظ أن $\sin z$ ينعدم إذا كان في وقت معاً :

$$\sin x \operatorname{ch} y = o \quad , \quad \cos x \operatorname{sh} y = o$$

وبما أن $\operatorname{ch} y \geqslant 1$ عندما يكون y حقيقياً فـان المعادلة الأولى تكون محققة من أجل $x = n\pi$ حيث n عـدد صحيح موجب أو سالب أو معدوم ومن أجل هذه القيم فقط .

تتحقق المعادلة الثانية ، عندما يكون $x = n\pi$ ، من أجل $\operatorname{sh} \; y = o$

وهذا لايقع إلا من أجل $y = o$ فقط ونكون بذلك قد برهنا أن جذور المعادلة $\sin z = o$ هي $z = n\pi$.

٨٠ – احسب جميع قيم المقدار $(1+i)^i$.

الحل : إن من المعروف أن :

$$1 + i = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وإن $z = e^{\log z}$ فيكون :

$$1 + i = e^{\log(1+i)} = e^{\log\sqrt{2} + i\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)}$$

$$(1+i)^i = e^{i\log\sqrt{2} - \left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi}\left(\cos\log\sqrt{2} + i\sin\log\sqrt{2}\right)$$

٨١ – ليكن التابع $f(z) = (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ برهن أن النقطتين $z = \pm i$ هما نقطتا تفرع للتابع المذكور وأنه عندما يرسم المتحول z منحنياً مغلقاً يحوي هاتين النقطتين فان تعيين التابع $f(z)$ لايتغير .

عين المنطقه التي يكون فيها كل تعيين لهذا التابع منتظماً

الحل : إذا رسم المتحول z منحياً مغلقاً يحوي إحدى النقطتين $\pm i$ (i مثلاً) فان دليل التابع $z - i$ يزداد بمقدار 2π ودليل التابع $\sqrt{z-i}$ بمقدار π ونتيجة لذلك يزداد دليل التابع $\sqrt{z+i}\cdot\sqrt{z-i}$ بمقدار π أيضاً وذلك لأن دليل التابع $z + i$ لم يزدد شيئاً .

أما إذا رسم المتحول z بالإتجاه الموجب منحنياً يحوي النقطتين $\pm i$ فان كلا من دليلي التابعين $z+i$ ، $z-i$ يزداد بمقدار 2π ويزداد دليل كل من التابعين $\sqrt{z+i}$ ، $\sqrt{z-i}$ بمقدار π أما الجداء $\sqrt{z+i}\cdot\sqrt{z-i}$ فانه يزداد بمقدار 2π وهذا يعني أن النقطة الممثلة

للتابع $f(z)$ تعود إلى مكان إنطلاقها عندما يعود المتحول z إلى النقطة التي انطلق منها وقد رسم منحنياً مغلقاً يحوي كلا من $i+$ و $i-$.

إن هذا التابع يصبح تابعاً منتظماً فيما إذا منع المتحول من رسم منحن مغلق يحوي إحدى النقطتين i ، $i-$ فقط . نتوصل إلى هذا الأمر فيما إذا احدثنا في المستوي المركب شقاً بين النقطتين i ، $i-$ أو شقين محمولين على المحور $y'y$ الأول يصل النقطة i إلى $\infty+$ على هذا المحور والثاني يصل النقطة $i-$ إلى $\infty-$ على المحور ذاته .

* * *

تمارين للحل

٨٢ – ليكن التابع المركب : $f(z) = 2iz + 1$ أحسب النسبة

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

وذلك من أجل $z_0 = 1$ والقيم المختلفة التالية لـ Δz :

(a) $\Delta z = 1$ ، (b) $\Delta z = i$ ، (c) $\Delta z = -1$ ، (d) $\Delta z = -i$

٨٣ – احسب نهايات التوابع التالية :

(a) $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}$ ، (b) $\lim\limits_{z \to 2e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$

(c) $\lim\limits_{z \to 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2}$ ، (d) $\lim\limits_{z \to 1+i} \left\{ \frac{z - 1 - i}{z^2 - 2z + 2} \right\}^2$

(e) $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$ (f) $\lim\limits_{z \to e^{\frac{i\pi}{3}}} (z - e^{\frac{i\pi}{3}})\left(\frac{z}{z^3 + 1}\right)$

٨٤ – ليكن التابع المعرف بالشكل التالي :

$$f(z) = \frac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4}, \quad z \neq 0, \quad f(0) = 0$$

برهن أن :

$$\lim \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

تساوي الصفر عندما $z \to 0$ على أي نصف قطر شعاعي ولكنه

عندما $z \to o$ على المنحني $x = y^2$ فان هذه النهاية لا تساوي الصفر .

٨٥ – احسب القسم الحقيقي والقسم الوهمي لكل من التوابـع :

$$(a)\quad w = a z^2 + bz + c \qquad (b)\quad w = \frac{z-1}{z+1} \qquad (c)\quad w = \frac{1}{z^2}$$

$$(d)\quad w = z^3 - 2 \qquad (e)\quad w = \frac{(z+i)(z-2)}{z-i}\ ,$$

$$(f)\quad w = \frac{(z^2+4)(z-2)}{z+2i}$$

٨٦ – ادرس التوابـع التالية وعين القابل للاشتقاق منها وقيم z التي تجعل بعض هذه التوابـع غير مستمرة :

$$x\,y + i\,y\ ,\ \sin x\ ch\, y + i \cos x\ sh y\ ,\ (x^2 - y^2 - 1) + i\,(2xy - 1)$$

$$\lg \sqrt{x^2+y^2} + i\ \text{Arct}\,\frac{y}{x}\ ,\quad \frac{x+y}{x^2\ y^2} + i\,\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

٨٧ – أوجد تابعاً تحليلياً $f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$ للمتحول $z = x + i\,y$ إذا علمت أن P تابـــع لـ $u = \sqrt{x^2+y^2} + x$ فقط وإن Q تابع لـ $v = \sqrt{x^2+y^2} - x$.

٨٨ – ادرس فيما اذا كانت التوابع التالية توافقية ثم أوجـــد التابع المرافق لكل منها :

$$u = 2x - x^3 + 3xy^2\ ,\ v = 2xy\ ,\ v = e^{-y}\sin x\ ,\ v = e^x \sin y$$

$$u = \frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ v = \cos x\ sh\,y\ ,\ u = e^x(x\cos y - y \sin y)\,.$$

$$u = 2x(1-y)$$

ثم أوجد صيغة التوابع الموافقة :

$$f(z) = u + i v$$

بدلالة المتحول المركب z .

٨٩ - برهن أن التوابع التالية تحقق شروط كوشي - ريمان وعين النقاط الشاذة لكل منها :

$$(a)\ \frac{1}{z}\ ,\quad (b)\ z^2 - z + 1\ ,\quad (c)\ \frac{z+2}{z-2}\quad (d)\ z + \frac{3}{z}$$

٩٠ - أوجد شروط كوشي - ريمان فيما إذا استعملنا الإحداثيات القطبية بدلاً عن الإحداثيات القائمة : $x = \varrho \cos \Theta$ ، $y = \varrho \sin \Theta$.

ثم برهن أن التابعين التالين :

(a) $$\omega = \varrho^2 (\cos 2\Theta + i \sin 2\Theta)$$

(b) $$\omega = \sqrt{\varrho}\,(\cos \frac{\Theta}{2} + i \sin \frac{\Theta}{2})$$

هما تابعان منتظمان .

٩١ - إذا كان التابع $f(z)$ منتظماً داخل منحن مغلق c برهن أنه من أجل $z = x + i y$ ، تكون التوابع التالية :

$$\log |f(z)|\ ,\ \operatorname{Arg} f(z)\ ,\ \mathcal{R} f(z)\ ,\ \mathcal{T} f(z)$$

محققة لمعادلة لابلاس :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

برهن أيضاً أن :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4\, |f'|^2$$

٩٢ ـ ادرس تقارب السلاسل التالية وعين دائرة تقارب كل منها ثم ادرس كلا منها على محيط دائرة تقاربها . وعين متى تكون متقاربة شرطياً أو مطلقاً ومتى تكون متقاربة بانتظام :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^n + \cdots$$

$$1 - z + \frac{z^2}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^n}{(n+1) z^{2n-1}} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(z-1+\frac{1}{2}i)}{n!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+2)}{4^n}$$

٩٣ ـ اوجد مجموعة قيم z التي تكون من أجلها السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$$

متقاربة ثم أوجد مجموعها . ادرس التقارب المطلق والتقارب المنتظم لهذه السلسلة .

٩٤ ـ ادرس التقارب المطلق والتقارب المنتظم للسلسلة التاليـــة واحسب مجموعها :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$$

٩٥ ـ أوجد منطقة تقارب كل من السلاسل التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

٩٦ – أوجد منطقة التقارب المنتظم لكل من السلاسل التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{z^n+1} \;,\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2} \;,\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n} \;,\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$$

٩٧ – إذا كان ϱ نصف قطر تقارب السلسلة $\sum a_n z^n$ أوجد نصف قطر تقارب كل من السلاسل التالية :

$$\sum a_n n^p z^n \quad , \quad \sum a_n n^{-p} z^n \quad , \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \;,\; a_n\, n!\, z^n \,.$$

٩٨ – أوجد دائرة تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}$$

ثم ادرس تقارب هذه السلسلة على محيط دائرة التقارب .

٩٩ – بمطابقة الأقسام الحقيقية مع بعضها والوهمية مع بعضها، حل المعادلات التالية :

$$e^z = -2 \qquad e^z = 1 + i\sqrt{3} \qquad e^z + e^{-z} = 1$$

١٠٠ – برهن أن جذور المعادلة $\operatorname{sh} z = o$ هي $z = in\pi$ (n عدد صحيح) .

١٠١ – ما هي قيم z أن تجعل tgz و thz مساوياً ∞ .

١٠٢ – احسب $\mathcal{R}\, tg\, z$ ، $\mathcal{R}\, th\, z$ $\quad$ $\mathcal{T}\, tg\, z$ ، $\mathcal{T}\, thz$

١٠٣ برهن أن جذور المعادلة : $\sin z = ch\, 4$ هي :

$$z = \frac{\pi}{2} + 4i + 2k\pi \qquad (k = o, \pm 1, \pm 2, ..)$$

١٠٤ – احسب جذور التوابع التالية :

$$ch\, z \;,\; \cos z + \sin z \;,\; ch\, z - \tfrac{1}{2} \;,\; shz - i \;,\; tg(1+z) \;,\; z\, tg\, z$$

١٠٥ – أوجد جميع قيم $\text{Arc sin } 2$ و $\text{Arc cos } i$

$$\text{Arg sh}\,[\,\log(-1)\,]\ ,\quad \text{Arg ch}\, i$$

١٠٦ – لتكن السلة التامة : $\sum a_n z^n$ حيث نفرض أن العوامل a_n حقيقية ومتناقصة باطراد ومنتهية إلى الصفر . برهن :

١ – أن نصف قطر تقارب هذه السلسلة يساوي على الأقل 1 .

٢ – اذا كان ϱ ، نصف قطر تقارب هذه السلسلة ، مساوياً الواحد فان هذه السلسلة تكون متقارب على محيط دائرة التقارب ماعدا في النقطة $z = 1$:

* * *