الفصل الثاني

مجموعة النقاط المستوية - المتتاليات - السلاسل

تمهيـــد : ١ - نقول عن مجموعة نقاط مستوية E إنها محدودة فيما إذا وقعت جميع نقاطها P داخل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي عـدد معين A أي إذا كان من الممكن إيجاد عدد موجب A بحيث يكون من أجل كل نقطـة P من المجموعة E :

$$|\overrightarrow{OP}| < A$$

ونقول إن لهذه المجموعة حداً اعلى ، M ، فيما إذا كان :

$$|\overrightarrow{OP}| \leqslant |M|$$

وذلك مهما كانت النقطة P من المجموعة E وإذا كان يوجد على الأقل نقطة واحدة P تحقق المتراجحة :

$$|\overrightarrow{OP}| > |M| - \varepsilon$$

وذلك مهما كان العدد الموجب ε صغيراً .

٢ - جوار نقطة : إن مجموعة النقاط المستوية التي تحقق المتراجحة :

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

تمثل جواراً قدره ε للنقطة z_0 .

٣ - نقطة التجمع : نقول عن النقطة z_0 إنها نقطة تجمع لمجموعة النقاط E ، فيما إذا حوى كل جوار لـ z_0 نقطة واحـــدة على الأقل من E غير النقطة z_0 ويبرهن أن كل جوار لنقطة تجمع يحوي عدداً لانهائياً من نقاط المجموعة . يمكن أن تنتمي نقطة التجمع إلى المجموعة أو أن لاتكون من نقاطها .

٤ – نظرية فايرشتراس بولزانو Weierstrass - Bolzano : لكل مجموعة محدودة تحوي عدداً لانهائياً من النقاط ، نقطة تجمع واحدة على الأقل .

٥ – النقاط الداخلية والخارجية والحديه :

آ – نقول عن النقطة P من المجموعة E إنها نقطة داخلية فيما إذا امكن إيجاد جوار ما لـ P منتمٍ برمته إلى المجموعة E .

ب – نقول عن النقطة Q إنها نقطة خارجية فيما إذا أمكن إيجاد دائرة ما تقع Q في وسطها بحيث لاتحوي هذه الدائرة أي نقطة من نقاط المجموعه E .

حـ – نقول عن نقطة M إنها نقطة حدية للمجموعة E فيما إذا حوت كل دائرة تقع M في وسطها نقطة داخلية وأخرى خارجية على الأقل . قد تكون النقطة الحدية من نقاط المجموعة وقد لاتكون منتمية اليها .

٦ – المجموعة المفتوحة : نقول عن مجموعة نقاط إنها مجموعة مفتوحة فيما إذا كانت كل نقاطها داخلية .

٧ – المجموعة المغلقة : هي المجموعة التي تحوي جميع نقاط تجمعها فيما إذا كان لها نقاط تجمع .

٨ – المنطقة Domaine نقول عن مجموعة نقاط D إنها تكون منطقة فيما إذا حققت الشرطين التاليين :

آ – إذا كانت جميع نقاطها داخلية .

ب – إذا كان من الممكن ربط كل نقطتين P , P_1 منها بسلسلة من الدوائر $(C_1 , C_2 , \ldots , C_n)$ متقاطعة مثنى مثنى بحيث يكون مركز C_1 في P ومركز C_n في P_1 .

٩ – غلاف مجموعة : إذا أضفنا إلى مجموعة مفتوحة S كل نقاط تجمعها فاننا نحصل على مجموعة نسميها بغلاف S . إن غلاف مجموعة هو مجموعة مغلقة .

١٠ – المجموعة القابلة للتعداد : إذا أمكن إيجاد مقابلة ، واحد لواحد ، بين عناصر مجموعة ما وعناصر مجموعة الأعداء الطبيعية قلنا عن هذه المجموعة إنها قابلة للتعداد .

١١ – نظرية بوريل لوبيك Borel - Lebesgue : اذا كانت E مجموعة نقاط

مستوية محدودة ومغلقة (مجموعة متراصة compact) فإنه يمكننا ان نستخلص من كل تغطية لهذه المجموعة (بعدد منته او غير منته من الأقراص) تغطية منتهية (بعدد منته من الاقراص) بحيث تقع كل نقطة من في قرص واحد عل الاقل من اقراص التغطية .

١٢ – المتتاليات المركبة : إذا طبقنا مجموعة الأعداد الطبيعية على مجموعة جزئية E من مجموعة الأعداد المركبة فاننا نحصل على مجموعة نسميها بمتتاليـــة . يمكن عندها معرفة كل عنصر من عناصر E إذا عرفنا العدد الطبيعي المقابل له . نسمي عناصر هذه المجموعة بحدودها كما نسمي العدد الطبيعي المقابل لحد من حدودها برقم هذا الحد . نرمز عادة لمتتالية بأحد الشكلين :

$$\{ u_n \} \quad \text{أو} \quad u_1 , u_2 , \dots , u_n , \dots$$

١٣ – نهاية متتالية : نقول عن عدد l إنه نهاية للمتتالية $\{ u_n \}$ فيما إذا امكن إيجاد عدد طبيعي N من أجل كل عدد موجب ε (مهما كان ε صغيراً) بحيث ينتج عن المتراجحة :

$$| u_p - l | < \varepsilon \quad \text{المتراجحة} \quad p > n$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة قلنا إن المتتالية متقاربة وإذا كان خلاف ذلك قلنا إنها متباعدة .

١٤ – الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية مركبة $\{ u_n = x_n + i\, y_n \}$ هو أن تكون المتتاليتان الحقيقيتان $\{ x_n \}$. $\{ y_n \}$ متقاربتين .

١٥ – نظرية كوشي : الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية مركبة هو أن يكون من الممكن إيجاد عدد طبيعي N من أجل كل عدد موجب ε ، (مهما كان ε صغيراً) بحيث يكون :

$$| u_{n+p} - u_n < \varepsilon$$

من أجل كل الحدود التي ارقامها n تحقق المتراجحة $n > N$ وذلك مهما كانت قيمة العدد p .

١٦ – السلاسل المركبة : نسمى المجموع اللانهائي :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (1)$$

للأعداد المركبة u_n بسلسلة مركبة ونرمز لمجموع n من حدودها الأول بـ :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

١٧ – تقارب السلاسل : نقول عن سلسلة إنها متقاربة فيما إذا كان للتالية S_n نهاية معينة ونقول عنها انها متباعدة فيما إذا كان غير ذلك أي إذا سعى المجموع S_n الى اللانهاية أو كان له أكثر من قيمة نهائية وذلك عندما $n \to \infty$.

١٨ – السلسلة المتقاربة مطلقاً : نقول عن السلسلة المركبة (1) إنها متقاربة مطلقاً فيما إذا كانت سلسلة قياسات حدودها :

$$\sum_{1}^{\infty} |u_n|$$

متقاربة واذا كانت سلسلة متقاربة مطلقاً فهي متقاربة .

١٩ – قواعد التقارب : آ – قاعدة كوشي : تكون السلسلة المركبة (1) متقاربة مطلقاً فيما إذا كان :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

وتكون هذه السلسلة متباعدة فيما إذا كانت هذه النهاية أكبر من الواحد .

ب – قاعدة دالامبير : تكون السلسلة المركبة (1) متقاربة مطلقاً فيما اذا كان :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

وتكون متباعدة فيما اذا كان :

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

حـ – قاعدة راب Raabe : تكون السلسلة المركبة (1) متقاربة مطلقاً فيما اذا كان :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \left\{ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - 1 \right\} < -1$$

د ـ قاعدة آبل Abel : تتقارب السلسلة المركبة :

$$\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n v_n$$

فيما اذا تحققت الشروط التالية :

١ ـ اذا كان المجموع $| v_m + \cdots + v_{n+1} + v_n |$ محدوداً مهما كانت قيمتا m ، n ؛

٢ ـ اذا كانت السلسلة $\sum_{1}^{\infty} | \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} |$ متقاربة ؛

٣ ـ اذا سعى ε_n نحو الصفر عندما تسعى n الى اللانهاية .

★ ★ ★

تمارين

٢٨ – برهن انه إذا كانت المجموعة A من R مفتوحة فان المجموعة المتممة لها C_A مغلقة .

الحل : لبرهان هذه الفكرة يجب أن نبرهن أن C_A تحوي نقاط تجمعها . لنفرض أن M نقطة تجمع لـ C_A بمعنى أن كل جوار لـ M يحوي عدداً لانهائياً من نقاط C_A . اذا لم تكن M من C_A فهي من نقاط متممتها A وهذا مستحيل لأننا فرضنا أن كل جوار لـ M يحوي عدداً لانهائياً من C_A فهي اذن ليست نقطة داخلية لـ A وهي ليست من نقاط A لأننا فرضنا أن A مجموعة مفتوحة فكل نقاطها داخلية وإذا لم تكن M من A فهي من نقاط متممتها C_A وهو المطلوب .

٢٩ – لتكن E مجموعة النقاط الممثلة لصور الأعداد المركبة :

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\cos \frac{n\pi}{\alpha} + i \sin \frac{n\pi}{\alpha}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

حيث نفرض α عدداً عادياً .

أجب على الأسئلة التالية : آ – هل E محدودة ب – ماهي نقاط تجمعها اذا كان لها ذلك . حـ – هل هي مجموعة مغلقة . ى – هل هي مجموعة مفتوحة هـ – ماهي نقاطها الحدية . و – هل هذه المجموعة متصلة . ز – ماهو غلافها .

الحل : آ – إن هذه المجموعة محدودة وذلك لأن :

$$|z_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left|\cos\frac{n\pi}{\alpha} + i\sin\frac{n\pi}{\alpha}\right| = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$$

ب – إن α عدد عادي فلنفرض أنه من الشكل $\alpha = q/p$ حيث q ، p عددان طبيعيان نفرضها اولين فيا بينها ومن خواص العـــدد العادي أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الطبيعية A_i بحيث يكون الجداء $A_i \frac{q}{p}$ عدداً طبيعياً وبما أننا فرضنا أن q ، p أولبين فيما بينهما فان $A_i = ap$ ، حيث a عدد طبيعي .

إن أدلة الأعداد z_n هي من الشكل $\frac{nq\pi}{p}$ وهذا يعني أن صورة z_n تقع على المستقيم OH_n الذي يصنع مع ox زاوية قدرها $\frac{nq\pi}{p}$ وأن عدد هـذه المستقيات محدود ويساوي $2p$.

إن صورتي العـــددين z_k و z_{k+2p} يقعـــان على المستقيمين OH_k الذي يصنع مع ox زاوية قدرها $\frac{kq\pi}{p}$ و OH_{k+2p} الذي يصنع مـع ox زاوية قدرهـا $\frac{kq\pi}{p} + 2q\pi = \frac{(k+2p)q\pi}{p}$ وهـــو منطبق على المستقيم OH_k .

نستنتج مما تقدم أن القوس التي قياسها $2q\pi$ قـــابلة للتقسيم إلى $2p$ قسماً متساوية طول كل قسم منها يساوي $\frac{q\pi}{p}$ بحيث تقع نهـاية القسم الأخير في مبدإ الأقواس فيما إذا أخذنا مبدأ القسم الأول منطبقاً على مبدإ الأقواس .

إذا رسمنا المستقيات OH_n $(n = 1, 2, \ldots, 2p)$ فانها تقطع محيط

الدائرة $|z| = 1$ في النقاط M_{2P} , ... , M_2 , M_1 ويكون ، إذا ما فرضنا أن A نقطة تقاطع ox مع هذه الدائرة :

$$\widehat{AM}_1 = \frac{q\pi}{p}, \widehat{AM}_2 = \frac{2q\pi}{p}, \widehat{AM}_3 = \frac{3q\pi}{p}, \quad .AM_{2p} = \frac{2pq\pi}{p} = 2q\pi$$

ونلاحظ بسهولة أن النقطة M_{2P} منطبقة على A ؛

تقع صورة العدد z_1 على المستقيم OM_1 وصورة العدد z_2 على المستقيم OM_2 وهكذا أما صورة العدد z_{2ap+h} (h ، a عددان طبيعيان $h < p$) فانها تقع على المستقيم OM_h وذلك مهما كان العدد الطبيعي a . إن العدد الطبيعي $n = 2ap + h$ يمكن أن يسعى إلى اللانهاية وبما أن p و h عددان محدودان فان a يمكن ان يسعى إلى اللانهاية وبما أن من أجل كل قيمة لـ a يوجد نقطة z_n واقعة على المستقيم OM_h فانه يقع على كل مستقيم من المستقيمات OM_h عدد لانهائي من النقاط z_n . لنرمز لمجموعة هذه النقاط بـ E_h . إن هذه المجموعة محدودة لأنها مجموعة جزئية من المجموعة المحدودة E وتحوي عدداً لانهائياً من النقاط فيكون لها نقطة تجمع واحدة على الأقل . نقول إن نقطة تجمع المجموعة E_h الواقعة على المستقيم OM_h هي النقطة M_h صورة العدد المركب :

$$z'_h = \cos\frac{hq\pi}{p} + i\sin\frac{hq\pi}{p}$$

ولبرهان ذلك يكفي أن نبرهن أن أي جوار لهذه النقطة يحوي عدداً لانهائياً من النقاط z_n .

لنأخذ هذا الجوار دائرة مركزها M_h ونصف قطرها ε . إن هذه الدائرة تحوي كل النقاط z_n الواقعة على OM_h والتي يكون فيها :

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

إن كل نقاط المجموعة E_h واقعة ضمن هذه الدائرة إلا النقاط التي ارقامها لاتحقق هذه المتراجحة وهي التي تحقق المتراجحة المعاكسة :

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \varepsilon \quad ، \quad \frac{1}{n} > \varepsilon \qquad n < \frac{1}{\varepsilon}$$

إن عدد هذه الحدود محدود وهي الحدود التي ارقامهـا اصغر من العدد المحدود $\frac{1}{\varepsilon}$ وذلك مهما كان ε صغيراً ومعنى هذا أن النقاط $M_h\ (h = 1, 2, \ldots\ p)$ هي نقاط تجمع هذه المجموعة وهي كما عرفناها اعلاه واقعة على محيط الدائرة $|z| = 1$ وتقسم قوس هـذه الدائرة التي مبدؤها مبدأ الأقواس والتي طولها $2q\pi$ إلى $2p$ من الأقسام المتساوية .

٣٠ – لنرمز بـ E لمجموعة نقاط . نقول عن نقطة ما α إنهـا نقطة من غلاف المجموعة E فيما إذا حوى كل جوار لـ α نقطة من E . نرمز بـ $\bar{E}$ لمجموعة نقاط غلاف المجموعة E برهن أن $\bar{E}$ هي مجموعـــة مغلقة .

الحل لنبرهن أن المجموعة $\bar{E}$ المعرفة بنص المسألة تحوي المجموعة E وتحوي نقاط تجمع E وتحوي فوق ذلك نقاط تجمع $\bar{E}$ لتصبح مجموعة مغلقة . إن المجموعة $\bar{E}$ تحوي كل نقطة من نقاط E لأن كل نقطة a من E تقع في كل جوار لها فهي إذن من نقاط $\bar{E}$ وكذلك لو فرضنا A نقطة تجمع لـ E فان كل جوار لـ A يحوي نقطة واحدة على الأقل من E غير A فالنقطة A إذن هي نقطة من $\bar{E}$.

إن $\bar{E}$ لاتحوي غير هذه النقاط إذ لو وجدت نقطة خارجية لـ E

مثل B لأمكن ايجاد جوار لها لايحوي أي نقطة من E أي أن B ليست من $\bar{E}$ حسب تعريفها الوارد بنص المسألة . وإذا رمزنا بـ E' للمجموعة المشتقة فانه يكون $\bar{E} = E \cup E'$ وهو تعريف غلاف المجموعة E .
لنبرهن الآن ان $\bar{E}$ مجموعة مغلقة أي أنها تحوي نقاط تجمعها . في الحقيقة إذا كانت M نقطة تجمع لـ $\bar{E}$ فان كل جوار قدره ε يحوي على الأقل نقطة ما α من $\bar{E}$ فيمكننا ان نجد جواراً لـ α قدره δ بحيث يقع هذا الجوار برمته في الجوار ε لـ M وبما ان كل جوار لـ α يحوي نقطة من E فان كل جوار لـ M يحوي نقطة من E والنقطة M واقعة في $\bar{E}$ و $\bar{E}$ مجموعة مغلقة .

٣١ – ادرس تقارب المتتالية $\left\{ u_n = \frac{(1+i)^n}{n} \right\}$.

الحل : يمكن كتابة قياس الحد العام لهذه المتتالية بالشكل :

$$|u_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n}$$

وبما أن $\sqrt{2} > 1$ فان $|u_n| \longrightarrow \infty$ عندما $n \to \infty$ وهذا مايؤكد من أن المتتالية المفروضة متباعدة لأنه إذا سعى قياس عدد مركب إلى ∞ فان العدد المركب نفسه يسعى إلى اللانهاية .

٣٣ – ادرس تقارب المتتالية :

$$\left\{ u_n = \frac{n^2 i^n}{n^3 + 1} \right\}$$

الحل : استناداً إلى تعريف قياس عدد مركب وخواص قياس الأعداد المركبة يمكننا أن نكتب :

$$|u_n| = \frac{n^2}{n^3+1} |i^n| = \frac{n^2}{n^3+1}$$

ونلاحظ بسهولة أن $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. واستناداً إلى تعريف العدد

المركب المعدوم نلاحظ أن $\lim_{n \to \infty} u = 0$ وبذلك نكون قد برهنا أن المتتالية المذكورة متقاربة .

٣٣ ـ ادرس تقارب المتتالية :

$$\left\{ u_n = \frac{n}{n + 3i} - \frac{i\,n}{n + 1} \right\}$$

الحل : نلاحظ أنه عندما يسعى n إلى اللانهاية فان الكسر الأول الداخل في تركيب u_n يسعى الى (1) بينما يسعى الكسر الثاني نحو i ولنبرهن أنه عندما $n \to \infty$ فان $u_n \to 1 - i$ أي لنبرهن أنه يمكننا أن نجد من أجل كل عدد موجب ε مهما كان صغيراً عدداً طبيعياً N بحيث يكون :

$$|u_n - (1 - i)| < \varepsilon \quad \text{من أجل} \quad n > N$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

$$u_n - (1 - i) = \frac{n}{n + 3i} - \frac{i\,n}{n + 1} - 1 + i = \frac{i}{n + 1} - \frac{3i}{n + 3i}$$

لكي يكون هذا التركيب بالقياس أصغر من العدد ε يكفي أن يكون مجموع قياسي هذين الكسرين اصغر من ε :

$$\left| \frac{i}{n + 1} - \frac{3i}{n + 3i} \right| \leqslant \frac{1}{n + 1} + \frac{3}{\sqrt{n^2 + 9}} < \frac{4}{n}$$

وذلك لأن :

$$\frac{1}{n + 1} < \frac{1}{n} \qquad \frac{3}{\sqrt{n^2 + 9}} < \frac{3}{n}$$

فاذا كان $\frac{4}{n} < \varepsilon$ فانه يكون $|u_n - (1 - i)| < \varepsilon$ لذا يكفي أن نأخذ N محققاً للمتراجحة $\frac{4}{N} < \varepsilon$ أو $N > \frac{4}{\varepsilon}$ لتكون المتراجحة

المطلوبة محققة من أجل كل n يحقق المتراجحة $n > N$ وهو المطلوب .

٣٤ – نعرف متتالية مركبة بالعلاقة :

$$(1) \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n} \right) \quad , \quad n = 0 , 1 , 2 , \ldots$$

ونفرض أن $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z_0 < \frac{\pi}{2}$ برهن أن $\lim z_n = 1$

الحل : من العلاقة المفروضة نستنتج العلاقات التالية :

$$z_1 = \frac{z_0^2 + 1}{2 z_0} , \quad z_1 - 1 = \frac{(z_0 - 1)^2}{2 z_0} , \quad z_1 + 1 = \frac{(z_0 + 1)^2}{2 z_0}$$

$$(2) \qquad \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \left(\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right)^2$$

ثم بالتدرج نتوصل الى العلاقة :

$$\frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \left(\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right)^{2^n}$$

لنفرض $z_0 = \varrho_0 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ وقد فرض أن $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ فيكون .

$$\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = \left| \frac{(\varrho_0 \cos \alpha - 1)^2 + \varrho_0^2 \sin^2 \alpha}{(\varrho_0 \cos \alpha + 1)^2 + \varrho_0^2 \sin^2 \alpha} \right| = \left| \frac{\varrho_0^2 + 1 - 2 \varrho_0 \cos \alpha}{\varrho_0^2 + 1 + 2 \varrho_0 \cos \alpha} \right| < 1$$

وذلك لأننا فرضنا بنص المسألة ان $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ فيكون $\cos \alpha > 0$

إن الطرف الأيمن من العلاقة (2) يسعى إلى الصفر لأن قياسه يسعى إلى الصفر كعدد أصغر من الواحد مرفوع إلى قوة يسعي اسها الى ∞ ومعنى ذلك أن :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{n \to \infty} (z_n - 1) = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} z_n = 1$$

٣٥ – إذا كان المتتالية المركبة $\{a_n\}$ نهاية معينة l فانه يكون للمتتالية .

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n} = l \qquad (1)$$

هل يصح هذا الأمر إذا كان $l = \infty$:

الحل : بما اننا فرضنا ان المتتالية a_n متقاربة ولها نهاية نرمز لها بـ l فإنه يمكننا أن نختار من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدداً طبيعياً q بحيث يكون .

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \text{من أجل} \qquad n > q$$

استناداً إلى هذا الفرض يمكننا أن نكتب :

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - l\right| \leqslant \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_q - q\,l|}{n} +$$

$$+ \frac{|a_{q+1} - l| + \cdots + |a_n - l|}{n}$$

ويمكننا أن نختار n كبيراً بقدر كاف لتكون قيمة الكسر الأول من الطرف الأيمن من هذه المتراجحة أصغر من ε فيكون :

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} - l\right| < \varepsilon + \frac{n-q}{n}\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

وهذا ما يبرهن أن النهاية (1) صحيحه وهو المطلوب .

إذا كان $l = \infty$ فان هذه الفكرة غير صحيحة لأنه لو تصورنا المتتاليـة $a_n = (-1)^n . n$ فان النسبة (1) تأخذ الشكل :

$$\frac{-1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n n}{n}$$

ويلاحظ بسهولة تامة أن نهاية هذا الكسر محدودة وهي أصغر من 2 .

٣٦ – إذا كانت المتتالية $z_n \to \zeta$ استنتج من ذلك ان المتتالية :

$$z'_n = \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_n z_n}{b_1 + b_2 + \cdots b_n} \to \zeta$$

حيث نفرض أن b_n أعداد مركبة كيفية تكون من أجلها الأعداد :

$$(1) \qquad \beta_n = \frac{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|}{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|}$$

من أجل جميع قيم n ، أكبر من عدد موجب ثابت β ويكون أيضاً :

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| \to +\infty$$

الحل : بما أننا فرضنا أن المتتالية z_n متقاربة فانه يمكننا اختيار عدد طبيعي p من أجل كل عدد موجب ε ، مهما كان صغيراً ، بحيث يكون :

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon \qquad \text{من أجل} \qquad n > p$$

استناداً الى ماتقدم يمكننا أن نكتب :

$$|z'_n - \zeta| = \left| \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_n z_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} - \zeta \right|$$

$$\leqslant \frac{|b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_p z_p - (b_1 + b_2 + \cdots + b_p)\zeta|}{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|} + \frac{|b_{p+1}(z_{p+1} - \zeta)| + \cdots + |b_n(z_n - \zeta)|}{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|}$$

إن المقدار الموجود في صورة الكسر الأول محدود ويمكن ايجاد عدد موجب A أكبر منه فيكون :

$$|z'_n - \zeta| \leqslant \frac{A}{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|} \times \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|}{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|} + \frac{|b_{p+1}| + \cdots + |b_n|}{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|}\,\varepsilon$$

لقد فرضنا أن β_n أكبر من عدد موجب β فان مقلوبه سيكون اصغر

من $\frac{1}{\beta}$ فهو مقدار محدود أما الكسر الأول من الطرف الايمن من المتراجحة الأخيرة فهو حاصل قسمة عدد محدود على مقدار يسعى الى اللانهاية فهو يسعى إلى الصفر . يمكن إذن اختيار n كبيراً بقدر كاف ليكون هذا الكسر اصغر من ε ويكون الجداء أصغر من $\frac{\varepsilon}{\beta}$.

أما الكسر الأخير فهو محدود لأنه يساوي :

$$\frac{1}{\beta_n} = \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_p|}{|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|}$$

وهو تفاضل عددين محدودين وذلــك لأن $|b_1 + b_2 + \cdots + b_n|$ لايمكن أن يسعى إلى الصفر وإلا لما كان $\beta_n > \beta$ مهما كانت قيمة n .

وهذا ما يبرهن المطلوب .

٣٧ ـ ادرس تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$$

الحل : يمكن كتابة الحد العام لهذه السلسلة بالشكل :

$$\frac{2^n e^{\frac{in\pi}{6}}}{5^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}\right)$$

ونلاحظ أن القسم الحقيقي من هذه السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

إن السلسلة الواقعة في يمين هذه المتراجحة هي سلسلة هندسية أساسها $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ فهي سلسلة متقاربة ونبرهن بالطريقة ذاتهـــا أن سلسلة الأقسام الوهمية متقاربة أيضاً وينتج عن هذا أن السلسلة المفروضة متقاربة .

طريقة ثانية : يمكننا أن نستعمل قاعدة كوشي ونجد :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

كما أنه يمكننا استعمال قاعدة دالامبير :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

ونكون قد برهنا أن السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً .

٣٨ - برهن صحة العلاقة :

$$\frac{\sin \Theta}{2} + \frac{\sin 2\ \Theta}{2^2} + \frac{\sin 3\ \Theta}{2^3} + \ldots = \frac{2\ \sin \Theta}{5 - 4\ \text{cus}\ \Theta}$$

الحـــل : لنتصور السلسلة الهندسية التي أساسها :

$z = \frac{1}{2}(\cos \Theta + i \sin \Theta)$ ولنذكر أن $|z| < 1$ وأن هـــذه السلسلة متقاربة فيكون بنتيجة ذلك :

$$z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{z}{1 - z}$$

لنبدل في هذا الدستور z بما يساويه فرضا ولنطبق دستور موافر فنجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\ \Theta + i \sin n\ \Theta}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}(\cos \Theta + i \sin \Theta)}{1 - \frac{1}{2}(\cos \Theta + i \sin \Theta)} =$$

$$= \frac{2 \cos \Theta - 1 + 2 i \sin \Theta}{5 - 4 \cos \Theta}$$

إذا ساوينا بين القسم الحقيقي للطرف الأيسر من هذه العلاقة مـــع مقابله في الطرف الايمن نجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\Theta}{2^n} = \frac{2 \cos \Theta - 1}{5 - 4 \cos \Theta}$$

أما إذا كتبنا ان القسم الوهمي في طرفها الايسر يساوي مثيله في الطرف الأيمن فاننا نجد المطلوب :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n} = \frac{2\sin\theta}{5 - 4\cos\theta}$$

٣٩ – ادرس التقارب والتقارب المطلق لكل من السلاسل التالية :

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \quad , (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n} \quad , \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$$

الحل : إن السلسلة (a) متقاربة مطلقاً وذلك لأن السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i^n|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

هي سلسلة متقاربة .

أما السلسلة (b) فهي سلسلة غير متقاربة مطلقاً وذلك لأن :

$$\left|\frac{i^n}{\log n}\right| = \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

ومن المعروف أن السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n}$ سلسلةمتباعدةفالسلسلة المفروضة غير متقاربة مطلقاً بل هي متقاربة وذلك لأن سلسلة الأقسام الحقيقية وسلسلة الأقسام الوهمية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(2n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(2n)}$$

هما سلسلتان متناوبتان والقيم المطلقة لحدودهما متناقصة ويسعى في كل منهما الحد العام إلى الصفر فهما سلسلتان متقـــاربتان وتكون السلسلة المفروضة متقاربة .

اما السلسلة (c) فهي سلسلة متباعدة وذلك لان قياس حدها العام لايسعى إلى الصفر :

$$\left| \frac{(1+i)^n}{n} \right| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n} \to \infty \qquad \text{لأن} \qquad \sqrt{2} > 1$$

٤ . – لتكن السلسلة المركبة التي حدها العام z^n/n^μ حيث μ عدد مركب ثابت :

آ – برهن أن هذه السلسلة تكون متقاربة إذا كان $|z| < 1$ كما تكون متقاربة أيضاً إذا كان $|z| = 1$ و $\mathcal{R}\mu > 1$ وإنما تكون متباعدة إذا كان $|z| > 1$.

ب - برهن أنه إذا كان $|z| = 1$ ، $z \neq 1$ فان هذه السلسلة تكون متقاربة ولكنها ليست متقاربة مطلقاً وذلك إذا كان $0 < \mathcal{R}\mu \leqslant 1$ وتكون متباعدة إذا كان $\mathcal{R}\mu < 0$.

حـ – برهن أخيراً أن هذه السلسلة تكون متقاربة من أجل $z = 1$ وذلك عندما يكون $\mathcal{R}\mu > 1$ وهي الحالة التي تكون فيها السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً وتكون متباعدة إذا كان $\mathcal{R}\mu < 1$.

الحل : لنفرض $\mu = \alpha + i\beta$ ، $\log n = p$ فيكون :

$$n^\mu = e^{p \cdot \mu} = e^{\alpha p} (\cos p\beta + i \sin p\beta)$$

$$|n^\mu| = e^{\alpha \cdot p} = n^\alpha \quad , \quad \mathcal{R}\mu = \alpha$$

آ – لنطبق قاعدة دالامبير فنجد :

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)^\mu} \times \frac{n^\mu}{z^n} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\mu |z| \xrightarrow[n \to \infty]{} |z|$$

تكون السلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً إذا كان $|z| < 1$ فهي

متقاربة وتكون متباعدة اذا كان $|z| > 1$ لأنه لن يسعى عندها الحد العام إلى الصفر .

أما إذا كان $|z| = 1$ فان سلسلة القياسات تأخذ الشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^\alpha|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

إن هذه السلسلة متقاربة مطلقاً فيما إذا كان $\alpha > 1$ وهي متقاربة مطلقاً ضمن هذا الشرط فقط .

ب – إذا كان $|z| = 1$ فان $z = e^{i\theta}$ ويصبح الحد العــام للسلسلة المفروضة من الشكل .

$$\frac{1}{n^\alpha} e^{in\theta}$$

إن قياس الحد العام للسلسلة المفروضة ضمن شروط هذا الطلب هو $\frac{1}{n^\alpha}$ وهو الحد العام لسلسلة متباعدة إذا كان $0 < \alpha \leq 1$.

لبرهن أن هذه السلسلة متقاربة لأنها تحقق شروط آبـل Apel (ص ٢٩) حيث نفرض :

$$v_n = e^{in\theta} \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

١ – لنبرهن أن المجموع $V_{n,m}$ محدود :

$$v_n + v_{n+1} + \dots + v_m = e^{in\theta} + e^{i(n+1)\theta} + \dots + e^{im\theta} = \frac{e^{in\theta} - e^{i(m+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

ونلاحظ أن قياس صورة ومخرج الكسر الأخير يحققان العلاقتين :

$$|e^{in\theta} - e^{i(m+1)\theta}| \leq |e^{in\theta}| + |e^{i(m+1)\theta}| \leq 2$$

$$|1-e^{i\Theta}| = |1-\cos\Theta - i\sin\Theta| = \sqrt{(1-\cos\Theta)^2+\sin^2\Theta} =$$

$$= 2\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|$$

ويكون: $$|V_{n,m}| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|}$$

وهذا يعني أن $V_{n,m}$ محدود طالما $\sin\frac{\Theta}{2} \neq 0$ أي إذا كان $\Theta \neq 2k\pi$

أي إذا كان $z \neq 1$ وهذا ما اشترطناه في هذا المطلوب .

٢ – لنبرهن أن السلسلة التي حدها العام .

$$\frac{1}{n^\mu} - \frac{1}{(n+1)^\mu} \tag{1}$$

متقاربة مطلقاً .

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

$$\frac{1}{n^\mu} - \frac{1}{(n+1)^\mu} = \frac{(n+1)^\mu - n^\mu}{n^\mu (n+1)^\mu} = \frac{(1+\frac{1}{n})^\mu - 1}{(n+1)^\mu}$$

إن $\frac{1}{n} < 1$ لذا يمكننا أن ننشر $(1+\frac{1}{n})^\mu$ بحسب دستور نيوتن

بشكل سلسلة متقاربة :

$$(1+\frac{1}{n})^\mu = 1 + \mu\frac{1}{n} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}(\frac{1}{n})^2 + \cdots$$

وتأخذ عندها العلاقة (1) الشكل :

$$\frac{1}{n^\mu} - \frac{1}{(n+1)^\mu} = \frac{\mu + \varphi(n)}{n(n+1)^\mu} \tag{2}$$

حيث $\varphi(n)$ يمثل مقداراً محدوداً عندما $n \to \infty$.

إن من الواضح أن الكسر الموجود في الطرف الأيمن من العلاقة (2) يمثل الحد العام لسلسلة متقاربة مطلقاً .

٣ – نلاحظ بسهولة تامة أن $\frac{1}{n^{\mu}} \longrightarrow o$ وذلك لأن $| n^{\mu} | \longrightarrow \infty$ بسبب كون $o < \mathcal{R}\,\mu \leqslant 1$.

إن شروط قاعدة آبل الثلاثة قد تحققت وبذلك تكون السلسلة المفروضة متقاربة .

حـ – اذا كان $z = 1$ فان قياس الحد العام يصبح من الشكل $\frac{1}{n^{\alpha}}$ وبما اننا فرضنا $\alpha > 1$ فان هذا الحد هو الحد العام لسلسلة متقاربة وتكون السلسلة المفروضة في هذه الحالة متقاربة مطلقاً فهي متقاربة ولنبرهن أن السلسلة المفروضة متباعدة إذا كان $\mathcal{R}\,\mu < 1$:

١ – إذا كان $\mathcal{R}\,\mu < o$ فانه يمكن كتابة الحد العام للسلسلة المفروضة بالشكل :

$$\frac{1}{n^{\mu}} = \frac{1}{n^{\alpha+i\beta}} = n^{-\alpha} \cdot n^{-i\beta}$$

وبما أننا فرضنا أن $\alpha < o$ فان $-\alpha > o$ وإن الحد العام هذا يسعى إلى اللانهاية مع n فهو لايسعى إلى الصفر والسلسلة متباعدة كذلك إذا كان $\alpha = o$ فان الحد العام $n^{-i\beta}$ لايسعى الى الصفر .

٢ – لنفرض الآن أن $o < \mathcal{R}\,\mu < 1$ نقول إن هذه السلسلة متباعدة ولنفرض جدلاً أنها متقاربة من أجل قيمة ما $\mu_o = \alpha_o + i\,\beta_o$ حيث $o < \alpha_o < 1$ ولنبرهن أن هذا الفرض يوقعنا بالمستحيل .

لنأخذ قيمة ثانية لـ μ نرمز لها بالشكل $\mu = \mu_o + z$ حيث :

$z = x + i\,y$ و $x > o$ فيكون :

$$\frac{1}{n^{\mu}} = \frac{1}{n^{\mu_0}} \cdot \frac{1}{n^{z}}$$

وتكون السلسلة المفروضة قد أخذت شكل سلسلة آبـــل حيث نفرض :

$$v_n = \frac{1}{n^{\mu_0}} \quad , \quad \varepsilon_n = \frac{1}{n^{z}}$$

لننظر استناداً إلى كون السلسلة المفروضة متقاربة من أجل $\mu = \mu_0$ في الشروط التي يجب أن يتمتع بها z لتكون هذه السلسلة متقاربة من أجل قيمة أخرى لـ μ رمزنا لها بـ $\mu_0 + z$ لكي تكون هذه السلسلة متقاربة يجب أن تتحقق الشروط التالية :

١ ـ الشرط الاول :

$$| V_{n\,.\,m} | = | v_n + v_{n+1} + \dots + v_m | < M$$

وذلك مهما كانت قيمتا m ، n . إن هذا الشرط محقق لأننا فرضنا السلسلة v_n متقاربة .

٢ ـ الشرط الثاني : أن تكون السلسلة التالية متقاربة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-z} - (n+1)^{-z} \right|$$

يمكن كتابة حدود هذه السلسلة وهذا الشرط بالشكل التالي :

$$\left| e^{-z \log n} - e^{-z \log (n+1)} \right| = \left| -z \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-zt}\, dt \right|$$

$$\geqslant |z| \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-tx}\, dt = \left| \frac{z}{x} \right| \left[e^{-x \log n} - e^{-x \log(n+1)} \right]$$

وذلك إستناداً إلى تعريف التكامل والخاصـــة التي تقول أن قياس

المجموع أصغر من مجموع القياسات .

ونلاحظ بسهولة أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{z} - (n + 1)^{+z} \right| = \left| \frac{z}{x} \right| \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x \log n} - e^{-x \log(n+1)} \right]$$

$$= \left| \frac{z}{x} \right| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \right] \leqslant 1 + \left| \frac{z}{x} \right| = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$$

وذلك إذا فرضنا أن دليل العدد z هو α .

يكون الشرط الثاني محققاً في كل نقطة مثل z يكون من أجلها

$|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ و $x > o$ ،

٣ _ الشرط الثالث : $\varepsilon_r = \frac{1}{n^z} \longrightarrow o$ محقق إذا كان $x > o$

ينتج عما تقدم أن السلسلة المفروضة متقاربة من أجل كل نقطة تقع داخل زاوية Θ رأسها في μ_1 وتحقق $|\Theta| > \frac{\pi}{2}$. إن من جملة هذه النقاط النقطة $\mu = 1$. أي أنه ينتج عن فرضنا بان السلسلة متقاربـة في النقطة μ_0 أنها متقاربة من أجل $\mu = 1$.

أي أن السلسلة .

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

متقاربة وهذا مخالف لما هو مقرر من كون هذه السلسلة متباعـدة وهذا مايؤكد ان ما فرضناه غير صحيح وأن السلسلة المذكورة متباعدة من أجل $\mathcal{R}\mu < 1$.

مسائل للحل

٤١ – برهن أن اجتماع عدد محدود من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

٤٢ – برهن أن تقاطع عدد محدود من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

٤٣ – إذا حوت المجموعة A المجموعة B فان A' مشتق المجموعة A تحوي B' مشتق المجموعة B .

٤٤ – برهن أن المجموعتين الوحيدتين من مجموعات النقاط المستوية اللتين تتصفان بأنهما مفتوحتان ومغلقتان في وقت واحد هما المجموعتان R^2 والمجموعة الفارغة .

٤٥ – ليكن $z_1 , z_2 , \ldots , z_n$ متتالية اعداد ذات نهاية نرمز لها بـ ζ برهن أنه يمكننا دوماً أن نجد متتالية جزئية لهذه المتتالية $z_1' , z_2' , \ldots , z_n'$ بحيث يكون $\lim z_n' = \zeta$.

٤٦ – إذا كانت المتتالية $z_n \longrightarrow \zeta$ فانه ينتج عن ذلك أن :

$$z_n' = \frac{p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_n z_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{P_1 z_1 + (\overline{P_2} - \overline{P_1}) z_2 + \cdots + (P_n - P_{n-1}) z_n}{P_n} \to \zeta$$

حيث نفرض أن $\overline{p_n}$ أعداد موجبة كيفية وأن :

$$P_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \longrightarrow +\infty$$

٤٧ - برهن أن أي مجموعة جزئية مفتوحة من المجموعة المستوية R^2 هي اجتماع أقراص مفتوحة .

٤٨ - برهن أنه إذا كانت نقطة ما P منتمية إلى مجموعة مفتوحة G من R^2 فانه يوجد قرص D مركزه P تحتويه المجموعة G .

٤٩ - لتكن D_p قرصاً مفتوحاً في المستوي R^2 مركزه P ونصف قطره S برهن أنه يوجد قرص مفتوح يتمتع بالصفات الثلاثة التالية : ١ - إحداثيا مركزه عددان عاديان . ٢ - نصف قطره عدد عادي . ٣ - P منتمية إلى D و D_p يحوي D .

٥٠ - برهن أن المتتالية $\left\{ n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right\}$ متقاربة وأن نهايتها تساوي الصفر .

٥١ - برهن أن المتتاليات التي تثبت حدودها العامة بما يلي ، متقاربة واحسب نهاية كل منها وتأكد من أن نهاية القسم الحقيقي لكل منها يساوي القسم الحقيقي لنهايتها ونهاية القسم الوهمي يساوي القسم الوهمي لنهايتها :

(a) $\dfrac{i n^2 - i n + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n-1)}$ (b) $\left| \dfrac{(n^2 + 3i)(n - i)}{in^3 - 3n + 4 - i} \right|$

(C) $\sqrt{n + 2i} - \sqrt{n + i}$ (d) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n + 2i} - \sqrt{n + i}\right)$

٥٢ - نعرف المتتالية v_n بدلالة المتتالية u_n بالعلاقات .

$$v_0 = u_0 \quad , \quad v_n = u_n - \alpha u_{n-1} \quad , \quad (\alpha \neq 1)$$

برهن أنه إذا انتهت المتتالية v_n إلى نهاية معينة l فان المتتالية u_n تنتهي إلى $\dfrac{l}{1-\alpha}$.

٥٣ – لتكن المتتالية $\{u_n\}$ المتقاربة نحو الصفر . برهن أن المتتالية .

$$v_n = \alpha_{n,1}\, u_1 + \alpha_{n,2}\, u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}\, u_n$$

متقاربة نحو الصفر أيضاً وذلك إذا حققت الأعداد $\alpha_{n,p}$ الشرطين التاليين :

١ – يسعى العدد $\alpha_{n,p}$ إلى الصفر عندما $n \to \infty$ وذلك مهما كان p

٢ – $|\alpha_{n,1}| + |\alpha_{n,2}| + \cdots + |\alpha_{n,n}| \leqslant M$ مهما كان العدد n .

٥٤ – إذا كانت المتتالية $|z_n| \to \zeta$ برهن أن :

$$z'_n = \alpha_{n,1}\, z_1 + \alpha_{n,2}\, z_2 + \cdots + \alpha_{n,n}\, z_n \to \zeta$$

وذلك إذا حققت الأعداد $\alpha_{\lambda,\mu}$ شرطي التمرين السابق بالإضافة إلى الشرط التالي :

$$A_n = \alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} + \cdots + \alpha_{n,n} \to 1$$

٥٥ – إذا كانت المتتاليتان $u_n \to u$ $v_n \to v$ فان :

$$z_n = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{n} \to u \cdot v$$

$$z'_n = \frac{u_1 v_n + v_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n} \to u \cdot v$$

٥٦ – إذا كانت المتتالية $\{w_n\} \to w$ برهن أن .

$$w'_n = \frac{C_n^1 w_1 + C_n^2 w_2 + \cdots + C_n^n w_n}{2^n} \to w$$

٥٧ – إذا تقاربت السلسلة التي حدها العام a_n نحو A والسلسلة

التي حدها العام b_n نحو B برهن أن السلسلة ذات الحد العام $a_n + b_n$ تتقارب نحو $A + B$.

٥٨ – ليكن $a_n = \alpha_n + i\,\beta_n$ الحد العام لسلسلة متقاربة حيث نفرض أن $\alpha_n \geqslant 0$. برهن أنه إذا كانت السلسلة التي حدها العام a_n^2 متقاربة فان السلسلة ذات الحد العام $|a_n|^2$ متقاربة .

٥٩ – سلسلة ديرخلي Direchlet : لتكن السلسلة :

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \quad e^{-\lambda_n z}$$

حيث العوامل a_n أعداد حقيقية أو مركبة و λ_n أعداد موجبة متزايدة و $\lambda_n \longrightarrow \infty$.

برهن أنه إذا كانت هذه السلسلة ، التي تسمى بسلسلة ديرخلي ، متقاربة من أجل $z = z_0$ فانها تكون متقاربة من أجل أي قيمة لـ z يكون من أجلها :

$$|\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leqslant k < \frac{\pi}{2}$$

٦٠ – لتكن السلسلة التي حدها العام a_n ولنفرض $a_0 + a_1 + \dots + a_n = S_n$ ولنتصور متتالية عددية $b_0 , b_1 , \dots$ بحيث يتحقق الشرطان :

آ – المتتالية $b_{n+1} S_n$ متقاربة .

ب - السلسلة التي حدها العام $S_n (b_n - b_{n+1})$ متقاربة .

برهن ضمن هذه الشروط ، أن السلسلة التي حدها العام $a_n b_n$ متقاربة .

٦١ – لنفرض أن المجاميع الجزئية المعرفـــة في المسألة السابقة تحقق العلاقة :

$$\left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| < M$$

حيث M عدد موجب ثابت ولنفرض أن الأعـداد b_n الموجبـــة متناقصة باطراد وتسعى نحو الصفر ($b_n \to o$) بشكل يكون فيـه $\sqrt{n}\, b_n \to o$ وتكون السلسلة التي حدها العـــام $\sqrt{n}\,(b_n - b_{n+1})$ متقاربة . برهن ضمن هذه الشروط أن السلسلة التالية متقاربة :

$$\sum_{1}^{\infty} a_n b_n$$

٦٢ – إذا حققت السلسلة $\sum \alpha_n z^n$ أحد الشرطـــين التاليين من أجل $z = z_o$.

آ – $|\alpha_n z_o^n| < k\, n^h$

ب – $|\alpha_o + \alpha_1 z_o + \cdot \cdot + \alpha_n z_o^n| < k\, n^h$

حيث k و h عددان ثابتان موجبان مستقلان عن n ، فان السلسلة $\sum \alpha_n z^n$ تكون متقاربة مطلقاً من أجل $|z| < |z_o|$

✶ ✶ ✶