الفصل الأول

الاعداد المركبة

تعريف الاعداد المركبه : من المعلوم أنه يمكن حمل كل مستو على محورين متعامدين $x'ox$ ، $y'oy$ وبذلك تتعين كل نقطة من المستوي بزوج مرتب من الأعـداد الحقيقية (x , y) إن المقابلة بين مجموعة نقاط المستوي ومجموعة الأزواج المعرفة بالشكل السابق هي مقابلة واحد لواحد .

نسمي عدداً مركباً الزوج المرتب $z = (x , y)$ حيث كل من x ، y يمثل عدداً حقيقياً ونربط بين هذا العدد والنقطة M من المستوى المحمول على المحورين $x'ox$ ، $y'oy$ التي إحداثياها (x , y) . نسمي النقطة M صورة العدد المركب $z = (x , y)$ كما نسمي المستوي xoy بالمستوي المركب أو بمستوي غوص Gauss أو بمستوي أركان Argand .

نعرف على مجموعة الأعداد المركبة قانونين داخلين :

الأول هو الجمع ونعرفه بالقاعدة التالية :

$$z_1 = (x_1 , y_1) , \ z_2 = (x_2 , y_2) \ ; \ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

الثاني هو الضرب ونعرفه بالقاعدة :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ملاحظات : ١ ـ يمكن تعريف العدد المركب بزوج مرتب من الأعداد يمثل الإحداثيين القطبيين للنقطة M ، صورة العدد المركب ، أي : $z = (\varrho , \omega)$ ونعرف عندها عملية الضرب بالعلاقة :

$$z_1 \cdot z_2 = (\varrho_1 , \omega_1) \cdot (\varrho_2 , \omega_2) = (\varrho_1 \cdot \varrho_2 , \omega_1 + \omega_2)$$

٢ – لكي يكون $z_1 = z_2$ يلزم ويكفي أن يكون : $y_1 = y_2$ ، $x_1 = x_2$

٣ – إن الأعداد (x , o) متحدة الشكل isomorphe من أجل عمليتي الجمع والضرب مع مجموعة الأعداد الحقيقية لذا نكتب : $x = (x , o)$.

٤ – نرمز بـ $i = (0 , 1)$ فيكون :

$$i^2 = i \cdot i = (-1 , 0) = -1 ,$$

$$z = (x , y) = (x , o) + (o , y) = x + (0 , 1)(y , 0) = x + i y$$

إن الرمز $z = x + i y$ يسمى بالرمز الجبري للأعداد المركبة حيث x ، y عددان حقيقيان و i العدد الوهمي الذي يحقق العلاقة $i^2 = -1$.

تكتب عادة $x = \mathcal{R} z$ ، $y = \mathcal{T} z$

استناداً إلى ماتقدم يمكننا ان نبدل كل عدد مركب z في أي عمليـــة حسابية بالرمز $x + i y$ ونجري هذه العملية كما نجريهـــا على الأعداد الحقيقية ويكفي أن نبدل في النتيجة i^2 بـ -1

٥ – إن العدد المعدوم $o = (o , o)$ هو العدد الحيادي بالنسبة للجمع :

$$z + o = (x , y) + (o , o) = (o , o) + (x , y) = (x , y)$$

٦ – إن الوحدة $z = (1 , 0)$ هو العدد الحيادي للضرب :

$$(x , y) \cdot (1 , 0) = (1 , 0) \cdot (x , y) = (x , y)$$

خواص الأعداد المركبة

١ **العددان المترافقان هما :**

$$z = x + i y \ , \ \bar{z} = x - i y$$

ويكون $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

٢ – **قياس عدد مركب** : نسمي بقياس عدد مركب z العدد الحسابي :

$$| z | = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ | z |^2 = z \cdot \bar{z}$$

٣ – **التمثيل المثلثي لعدد مركب** : $z = \varrho (\cos \Theta + i \sin \Theta)$

٤ – **رفع الأعداد المركبة** :

$$z^n = \varrho^n (\text{son}\, \Theta + i \sin \Theta)^n = \varrho^n (\cos n \Theta + i \sin n \Theta)$$

حيث n عدد عادي .

٥ - **دستور موافر :** $(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos n\Theta + i\sin n\Theta$

٦ - **خواص قياسات الأعداد المركبة :**

$$|zz'| = |z|.|z'| \;,\; |z+z'| \leqslant |z| + |z'| \;,\; |z| - |z'| \leqslant |z-z'|$$

إذا رمزنا للعدد المركب بالرمز القطبي $z = (\varrho , \omega)$ فانه يكون $\varrho = |z|$ أي :

$$z = |z|(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

٧ - **التمثيل الأسي لعدد المركب :** استناداً إلى نشر كل من التوابع e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ حسب دستور ماك - لوران فانه يمكننا أن نكتب :

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \;،\; e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$z = \varrho(\cos x + i\sin x) = \varrho e^{ix}$$

★ ★ ★

تمارين

١ – برهن انه يمكن كتابة معادلة أي دائرة واقعة في المستوي المركب بالشكل التالي :

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

حيث α ، γ عددان حقيقيان أما β فيمكن أن يكون مركباً .

الحل : إن المعادلة العامة لدائرة واقعة في المستوي xy هي :

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (1,1)$$

حيث A ، B ، C ، D أعداد حقيقية ثابتة .

لنفرض أن $z = x + iy$ عدد مركب و $\bar{z} = x - iy$ العدد المرافق له فيكون :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \ , \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \ , \ x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

لنبدل في معادلة الدائرة (1،1) فتأخذ الشكل التالي :

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + D = 0$$

وبعد الاصلاح تأخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{z} + D = 0$$

أو بالشكل :

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(B - iC)z + \frac{1}{2}(B + iC)\bar{z} + D = 0$$

٢ – مثل هندسياً مجموعة قيم z التي تحقق العلاقة :

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \qquad (1 , 2)$$

الحل : إن هذه المعادلة تكافىء المعادلة :

$$|z-3| = 2\,|z+3|$$

وإذا فرضنا أن $z = x + i\,y$ فانه يكون :

$$|x + i\,y - 3| = 2\,|x + i\,y + 3|$$

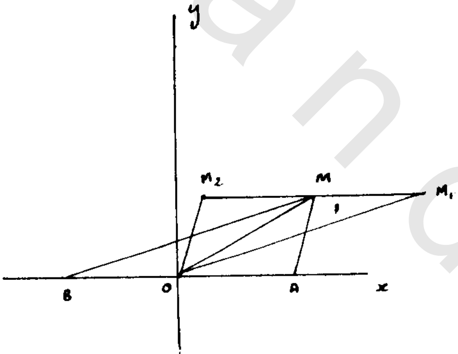
$$(x-3)^2 + y^2 = 4\left[\,(x+3)^2 + y^2\,\right]$$

$$3\,(x^2 + y^2) + 30\,x + 27 = 0$$

$$(x+5)^2 + y^2 = 16$$

وهي كما يلاحظ معادلة دائرة مركزها $(-5 , 0)$ ونصف قطرها (4).

الحـل الهندسي : لتكن النقطة M صورة العدد المركب z والنقطة M_1 صورة العدد المركب $z + 3$ والنقطة M_2 صورة العدد المركب $z - 3$ لننشىء MA موازياً لـ M_2O فيكون $A = (3 , 0)$



شكل – ١

ولننشىء MB موازياً لـ M_1O فيكون $B = (-3 , 0)$.

ونلاحظ أن :

$$|OM_2| = |AM| = |z-3| \quad \text{و} \quad |OM_1| = |BM| = |z+3|$$

إستناداً إلى العلاقة المفروضة (2 و 1) نلاحظ أن نسبة بعدي النقطـة M عن النقطتين الثابتتين B و A تساوي قيمة ثابتة هي (٢) أي :

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

ومن المعروف ان المحل الهندسي للنقطة M التي تتمتع بهذه الصفة هو محيط دائرة قطرها القطعة المستقيمة التي مبدؤها النقطة التي تقسم AB داخلاً بنسبة 2 الى 1 ونهايتها النقطة التي تقسم هذه القطعة المستقيمة خارجاً بالنسبة ذاتها . ويبرهن بسهولة أن هذه الدائرة هي التي وجدناها اعلاه تحليلياً .

حل آخر : استناداً إلى العلاقة :

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

يمكننا كتابة العلاقة (١,٢) بالشكل التالي :

$$\left(\frac{z-3}{z+3}\right)\left(\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3}\right) = 4$$

ومنه
$$z\bar{z} + 5\bar{z} + 5z + 9 = 0$$

وهي معادلة دائرة كما برهنا في التمرين السابق (١) .

٣ – مثل هندسياً مجموعة الحلول z التي تحقق المتراجحة :

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

إذا أعدنا ما أجريناه في التمرين (٢) فاننا نصل إلى المتراجحة :

$$(x+5)^2 + y^2 > 16$$

وهذا يعني أن بعد النقطة (x , y) عن النقطة (0 , 5-) أكبر من (4) أي أن النقطة (x , y) واقعة خارج الدائرة التي مركزها (0 , 5 –) ونصف قطرها يساوي (4) .

٤ – أوجد جذور المعادلة :

$$(1+z)^5 = (1-z)^5$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^5 = 1 \qquad (1,4)$$

وبأخذ الجذر من أس خمسة لطرفي هذه العلاقة نجد :

$$\frac{1-z}{1+z} = \sqrt[5]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \qquad (2,4)$$

وإذا رمزنا بـ $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ فان القيم المختلفة للطرف الايمن من العلاقــة (2 و 4) هي :

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$$

فاذا بدلنا الطرف الأيمن من العلاقة (2 و 4) بواحدة من هــذه القيم على التوالي فاننا نجد جذور المعادلة (1 و 4) وهي :

$$0, z_1 = \frac{1-\omega}{1+\omega}, z_2 = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}, z_3 = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}, z_4 = \frac{1-\omega^4}{1+\omega^4}$$

٥ – برهن صحة العلاقة :

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)x + \dots + R_n\right]$$

حيث :

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\cos x & \text{إذا كان } n \text{ فردياً} \\ \dfrac{n!}{2\left(\frac{n}{2}!\right)^2} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً} \end{cases}$$

الحل إن من المعروف أن :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad \cos^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$$

لننشر القوة الاخيرة حسب دستور نيوتن :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \qquad (1,5)$$

ولنذكر من خواص دستور نيوتن مايلي :

١ – إن عدد حدود منشور دستور نيوتن $(a+b)^n$ يساوي الى $n+1$ فاذا كان الاس n فردياً كان عدد حدوده زوجياً وإذا كان n زوجياً كان عدد حدوده فردياً .

٢ – إن عاملي الحدين المتساويي البعد عن الحد الأول والحد الأخير متساويان .

أي أن $C_n^p = C_n^{n-p}$

وهما عاملا الحدين :

$$C_n^{n-p} a^p b^{n-p} \quad , \quad C_n^p a^{n-p} b^p$$

٣ – إذا كان n زوجياً فانه يوجد حد متوسط واقع في منتصف سلسلة منشور دستور نيوتن وهو :

$$C_n^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

وتكون بقية الحدود متناظرة بالنسبة لهذا الحد ولكل حدين متناظرين بالنسبة لهذا الحد عاملان متساويان .

٤ – إذا كان n فردياً فانه يوجد في هذه السلسلة حدان من الشكل :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \quad , \quad C_n^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

حيث يكون :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$$

لنبدل في الدستور (1 ، 5) a بـ e^{ix} و b بـ e^{-ix} فنجد :

$$\left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^n=\frac{1}{2^n}\left[e^{nix}+C_n^1 e^{(n-1)ix}e^{-ix}+C_n^2 e^{(n-2)ix}e^{-2ix}+\dots\right.$$
$$\left.+C_n^{n-2}e^{2ix}e^{-(n-2)ix}+C_n^{n-1}e^{ix}e^{-(n-1)ix}+e^{-nix}\right]$$

بما أن عاملي الحدين المتساويي البعد عن الحد الأول والأخير متساويان فإنه يمكننا جمعهما الى بعضهما ووضع العامل المشترك خارج قوس فنجد :

$$(2,5)\quad \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^n=\frac{1}{2^n}\left\{(e^{nix}+e^{-nix})+C_n^1\left[e^{(n-2)ix}+e^{-(n-2)ix}\right]\right.$$
$$\left.+C_n^2\left[e^{(n-4)ix}+e^{-(n-4)ix}\right]+\dots\right\}$$

ولنلاحظ أنه إذا كان n فردياً فان عدد حدود دستور نيوتين سيكون زوجياً ومعنى ذلك انه سنحصل على $\frac{n+1}{2}$ من المعترضات في الدستور (2 ، 5) ويكون الحد الأخير هو :

$$C_n^{\frac{n-1}{2}}\left[e^{\frac{n+1}{2}ix}\cdot e^{-\frac{n-1}{2}ix}+e^{\frac{n-1}{2}ix}e^{-\frac{n+1}{2}ix}\right]$$
$$=C_n^{\frac{n-1}{2}}\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]$$

إذا ادخلنا $\frac{1}{2}$ داخل القوسين {} وبدلنا حسب دستور اولر .

$$\frac{e^{pix}+e^{-pix}}{2}=\cos px$$

فان الدستور (2 ، 5) يأخذ الشكل الثاني وذلك بعد أن نبدل فيه C_n^p بقيمتها وهي:

$$C_n^p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

$$\cos^n x=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx+n\cos(n-2)x+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)x+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}\cos x\right]$$

أما إذا كان n زوجياً فان عدد الحدود سيكون فردياً وأن الدستور (2 ، 5) سيحوي $\frac{n}{2}$ من المعترضات ويحوي الحد المتوسط وهو :

$$C_n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2} ix} e^{-\frac{n}{2} ix} = C_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)\left(\frac{n}{2}!\right)}$$

ولو أدخلنا $\frac{1}{2}$ داخل القوسين {} وبدلنا حسب دستور اولرفسوف نجد :

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)x + \cdots + \frac{n!}{2\left(\frac{n}{2}!\right)\left(\frac{n}{2}!\right)}\right]$$

وهو المطلوب برهانه :

طريقة ثانية : يمكن برهان هذا الدستور بطريقة البرهان بالتراجع وذلك باتباع المراحل التالية :

١ - نبرهن أنه صحيح من أجل قيمة ما لـ n مثل $n = 2$ مثلاً حيث

$$(3,5) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 1\right)$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n!}{2\left(\frac{n}{2}!\right)^2} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$$

٢ - نفرض أن هذا الدستور صحيح من أجل $n = p$ ونكتب :

$$(4,5) \quad \cos^p x = \frac{1}{2^{p-1}}\left[\cos px + C_p^1 \cos(p-2)x + C_p^2 \cos(p-4)x + \cdots\right]$$

٣ - نضرب طرفي هذه العلاقة بـ $\cos x$ ونبرهن أن الناتج مطابق للدستور المفروض من أجل $n = p+1$ أي :

$$(5,5) \quad \cos^{p+1} x = \frac{1}{2^p}\left[\cos(p+1)x + C_{p+1}^1 \cos(p-1)x + C_{p+1}^2 \cos(p-3)x + \cdots\right]$$

في الحقيقة إذا ضربنا طرفي العلاقة (5 ، 4) بـ $\cos x$ فان الطرف الأيمن منها يأخذ الشكل :

$$\frac{1}{2^{p-1}}\left[\cos px \cos x + C_p^1 \cos(p-2)x \cos x + C_p^2 \cos(p-4) \cos x + \cdots\right.$$

لنفرق كل جداء من هذه الجداآت الى مجموع تمام جيبين حسب العلاقة :

$$\cos h x \cos x = \frac{1}{2}\cos(h+1)x + \frac{1}{2}\cos(h-1)x$$

فنلاحظ مثلاً أن الجداء الأول يأخذ الشكل :

$$\cos px \cos x = \frac{1}{2}\cos(p+1)x + \frac{1}{2}\cos(p-1)x \qquad (6,5)$$

أما الجداء الثاني فيأخذ الشكل :

$$C_p^1 \cos(p-2)x \cos x = \frac{1}{2} C_p^1 \cos(p-1)x + \frac{1}{2} C_p^1 \cos(p-3)x$$

وبجمع هاتين العلاقتين إلى بعضهما نجد الحد الأول من الدستور (5,5) والحد الثاني كل منهما مضروب بـ $\frac{١}{٢}$ وذلك لأن :

$$C_p^1 + 1 = p + 1 = C_{p+1}^1$$

وإذا تابعنا هذه العملية وأخرجنا $\frac{١}{٢}$ خارج القوسين فاننا نجد الحد العام في الدستور (5, 5) الذي هو :

$$C_{p+1}^h \cos(p+1-2h)x$$

وينتج هذا عن العلاقتين المشابهتين للعلاقة (5 و 6) حيث نبدل p بـ $p-2h$ ثم بـ $p-2h+2$ فقط إن الحدين الموافقين لهاتين القيمتين لـ m في العلاقة (5 و 4) بعد ضرب طرفيها بـ $\cos x$ هما :

$$(8,5) \qquad C_p^h \cos(p-2h)x \cos x = \frac{1}{2} C_p^h \cos(p+1-2h)x + \frac{1}{2} C_p^h \cos(p+1-2h-2)x$$

$$(9,5) \quad C_p^{h-1}\cos(p-2h+2)\cos x = \frac{1}{2}C_p^{h-1}\cos(p+1-2h+2) + \frac{1}{2}C_p^{h-1}\cos(p+1-2h)x$$

ونلاحظ أن الحد العام (5 و 7) ينتج من إضافة الحد الأول من الطرف الأيمن من العلاقة (5 و 8) إلى الحد الثاني من الطرف الثاني من العلاقة (5 و 9) أي :

$$\frac{1}{2}(C_p^h+C_p^{h-1})\cos(p+1-2h)x$$

ومن المعروف أن :

$$C_p^h + C_p^{h-1} = C_{p+1}^h$$

ويكون الحد الناتج بعد إخراج العدد $\frac{1}{2}$ خارج القوسين هو :

$$C_{p+1}^h\cos(p+1-2h)x$$

وهو الحد العام في العلاقة (5 و 5) وبذلك نكون قد برهنا أن الحدود الناتجة عن ضرب طرفي العلاقة (5 و 4) بـ $\cos x$ مطابقة لحدود العلاقة (5 و 5) .

بقي علينا أن نميز من أجل الحد الأخير بين الحالة التي يكون فيها العدد n زوجياً وبين الحالة التي يكون فيها هذا العدد فردياً :

إذا كان p في الدستور (5 , 4) زوجياً فان عوامل x في $\cos mx$ كلها زوجية وإن الباقي هو :

$$R_p = \frac{p\,!}{2(\frac{p}{2}!)^2}$$

وبعد ضرب هذا الدستور بـ $\cos x$ فسوف نحصل على حدين فقط فيهما $\cos x$ الأول هو :

$$(10,5) \qquad R_p\cos x = \frac{p\,!}{2(\frac{p}{2}!)^2}\cos x$$

أما الحد الثاني فيأتي من تفريق الجداء الأخير الى مجموع وهو :

$$C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos\left[p-2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right] x \cos x = C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos 2x \cos x$$

$$= \frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos 3x + \frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos x$$

إن الحد الثاني الذي سيضاف إلى الحد (10 , 5) ليكون الحد الأخير من الدستور (5 , 5) هو :

$$\frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos x$$

ويكون الحد الاخير من (5 , 5) في هذه الحاله بعد إخراج $\frac{١}{٢}$ خارج القوسين هو :

$$R_{p+1} = \left[\frac{p!}{\left(\frac{p}{2}\right)!} + \frac{p!}{\left(\frac{p}{2}-1\right)!\left(\frac{p}{2}+1\right)!}\right] \cos x$$

$$= \frac{(p+1)!}{\left[\frac{(p+1)-1}{2}\right]! \cdot \left[\frac{(p+1)+1}{2}\right]!}$$

وهو مطابق لقيمة R_n عندما يكون $n = p + 1$ فردياً .

أما إذا كان p فردياً فان الحد الأخير في الدستور (4,5) بعد ضربه بـ $\cos x$ هو :

$$\frac{p!}{\left(\frac{p+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)!}$$

واذا بدلنا في هذا الحد $\cos^2 x$ بـ $\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ فان الحد الأخير في (5 , 5) يكون بعد إخراج $\frac{١}{٢}$ خارج القوسين ، من الشكل التالي :

$$R_{p+1} = \frac{p\,!}{\frac{p+1}{2}\,!\;\frac{p-1}{2}\,!} = \frac{(p+1)\,!}{2\,.\,\frac{p+1}{2}\,!\,.\,\frac{p-1}{2}\,!\,\frac{p+1}{2}}$$

$$R_{p+1} = \frac{(p+1)\,!}{2\left(\frac{p+1}{2}\,!\right)^2}$$

وذلك إذا ذكرنا أن العدد الطبيعي الذي يلي مباشرة العدد الطبيعي $\frac{p-1}{2}$ هو $\frac{p+1}{2}$

وبذلك نكون قد برهنا الدستور المطلوب في حالتيه .

٦ برهن أنه إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً أكبر من الواحد فانه يكون :

$$(1,6) \qquad (z+a)^{2m} - (z-a)^{2m} = 4\,m\,a\,z \prod_{K=1}^{m-1} \left[z^2 + a^2 \cot g^2 \frac{k\,\pi}{2\,m} \right]$$

الحل : يمكننا كتابة المعادلة (١) بالشكل التالي :

$$\left[\frac{z+a}{z-a}\right]^{2m} = 1 = \cos 2\,k\,\pi + i \sin 2\,k\,\pi$$

ثم بأخذ جذر الطرفين من اس 2 m نجد :

$$(2,6) \qquad \frac{z+a}{z-a} = \cos \frac{2\,k\,\pi}{2\,m} + i \sin \frac{2\,k\,\pi}{2\,m}$$

حيث $k = 0 , 1 , 2 , \ldots , 2\,m-1$.

إذا حللنا مجموعة المعادلات (6 ، 2) فاننا نجد 2 m قيمة لـ z نرمز لها بـ :

$$z_0 , z_1 , \ldots , z_m , \ldots z_{2m-2} , z_{2m-1}$$

ينتج الجذر z_0 عن المعادلة (6 ، 2) من أجل $k = 0$ أي عن المعادلة :

$$\frac{z+a}{z-a} = 1$$

إن هذه المعادلة لاتتحقق من أجل أي قيمة محدودة لـ z ونقول إن حلها

هو $z_o = \infty$. يفسر هذا بان المعادلة المفروضة(6 , 1) لاتحوي حـــداً من الدرجة $2m$ بل الحد الأعلى درجة الذي تحويه هو من الدرجة $2m - 1$ كما هو واضح من شكلها المعطى بنص المسألة . إنها معادلة من الدرجة $2m - 1$ والجذر z_o ليس له وجود وإن عدد جذورها هو $2m - 1$ فقط .

أما الجذر z_m فينتج عن المعادلة (6 , 2) بأن نجعل فيها $k = m$ وتأخذ عندها الشكل التالي :

$$\frac{z + a}{z - a} = -1$$

ومنها نستنتج ان $z_m = o$ وهذا يعني أن المعادلة (6 , 1) هي معادلة فردية وأنها كثير حدود لايحوي عدداً ثابتاً أما بقية الجذور فانه يمكن تجميعها أزواجاً من الشكل :

$$z_p = \frac{-a\left(1 + \cos\frac{p\pi}{m} + i\sin\frac{p\pi}{m}\right)}{1 - \cos\frac{p\pi}{m} - i\sin\frac{p\pi}{m}}$$

$$z_{2m-p} = \frac{-a\left(1 + \cos\frac{p\pi}{m} - i\sin\frac{p\pi}{m}\right)}{1 - \cos\frac{p\pi}{m} + i\sin\frac{p\pi}{m}}$$

ونبرهن بسهولة أن :

$$(z - z_p)(z - z_{2m-p}) = z^2 + a^2\cot^2\frac{p\pi}{2m})$$

حيث p يمكنها أن تأخذ القيم $1 , 2 , \ldots , m - 1$ فقط لأننا حذفنـــا من القيم (6 , 2) القيمة (0) التي لاتقابل جذراً للمعادلة (6 , 1) والقيمة m التي تقابل الجذر $z_m = o$.

استناداً إلى قواعد تفريق كثيرات الحدود فانه يمكننا أن نكتب :

$$(4,6) \quad (z+a)^{2m} - (z-a)^{2m} = A\,z \prod_{k=1}^{m-1} \left(z^2 + a^2 \cot^2 \frac{k\pi}{2m} \right)$$

لإيجاد العدد A نطابق بين طرفي هذه العلاقة ونكتب أن للحدين المتساويين بالدرجة والموجودين في طرفي العلاقة (6 و 4) عاملين متساويين . إن الطرف الأيسر من (4 , 6) لايحوي حداً من الدرجة $2m$ والحد الأعلى درجة فيه هو من الدرجة $2m-1$ وهو :

$$2\,m\,z^{2m-1}\,a - (\,2\,m\,z^{2m-1}\,a\,) = 4\,m\,a\,z^{2m-1}$$

أما الحد الذي يقابله في الطرف الأيمن فهو $A\,z^{2m-1}$ وبذلك نستنتج أن $A = 4\,ma$ وعندها تأخذ العلاقة (6 و 4) الشكل المطلوب برهانه

★ ★ ★

تمارين للحل

٧ – أوجد المجموعة A التي تحقق العلاقة $|z-1| < 3$ والمجموعة B التي تحقق العلاقة $|z-2i| < 2$ ثم مثل هندسياً :

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$

٨ – برهن من أجل $m = 2, 3, 4, \dots$ صحة العلاقة :

$$\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin(m-1)\frac{\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

٩ – فرق $z^m - 1$ إلى مضاريب من الدرجة الأولى .

١٠ – عين المنحنيات التي تمثلها المعادلات التالية :

(a) $|z-i| = 2$ (b) $|z+2i| + |z-2i| = 6$

(c) $|z-3| - |z+3| = 4$ (d) $(z+3)(\bar{z}+3) = 3$

(e) $\mathcal{J}(z^2) = 4$.

١١ – اكتب معادلة قطع ناقص يقع محرقاه في النقطتين $(4, 0)$ $(0, 0)$ ويساوي طول قطره الكبير (10) .

١١ – عين هندسياً الساحات الممثلة بكل من العلاقات :

(a) $1 < |z+i| \leqslant 2$ (b) $\mathcal{R}(z^2) > 1$

(c) $|z+3i| > 4$ (d) $|z+2-3i| + |z-2+3i| < 10$

١٣ – بعد دراسة التمرين المحلول رقم (5) أوجد دستوراً مشابهاً من أجل $\sin^n x$.

١٤ – برهن أنه إذا كانت النقاط z_3 ، z_2 ، z_1 على إستقامة واحدة فانه يوجد ثلاثة أعداد ثابتة γ ، β ، α بحيث يكون :

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \quad \text{بشرط :} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

١٥ أوجد المحل الهندسي للنقطة z المعرفة بالمعادلة التالية :

$$|z - a| \cdot |z + a| = a^2 \quad , \quad a > 0 \text{ حيث}$$

١٦ – إذا كان $p_n = a_n^2 + b_n^2$ (a_n ، b_n عـــددان طبيعيان و $n = 1 , 2 , \dots$) .

برهن أنه من أجل أي عدد طبيعي m يمكن إيجاد عددين طبيعيين $A \cdot B$ بحيث يكون :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = A^2 + B^2$$

مثال :

$$5 = 2^2 + 1 \quad . \quad 10 = 3^2 + 1 \quad . \quad 13 = 3^2 + 2^2$$

$$5 \cdot 10 \cdot 13 = 650 = 5^2 + 25^2$$

١٧ – برهن صحة العلاقتين :

(a) $$\cos \Theta + \cos(\Theta + \alpha) + \cdots + \cos(\Theta + n\alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cdot \cos\left(\Theta + \frac{1}{2} n \alpha\right)$$

(b) $$\sin \Theta + \sin(\Theta + \alpha) + \cdots + \sin(\Theta + n\alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cdot \sin\left(\Theta + \frac{1}{2} n \alpha\right)$$

١٨ – برهن العلاقة التالية مستفيداً من التمرين المحلول رقم (٦) .

$$\cot \frac{\pi}{2m} \cdot \cot \frac{2\pi}{2m} \cdots \cot \frac{(m-1)\pi}{2m} = 1$$

١٩ – استفد من التمرين المحلول رقم (٦) وبرهن صحة العلاقتين التاليتين ثم عممها :

(a) $\quad \text{cse}^2 \frac{\pi}{7} + \text{cse}^2 \frac{2\pi}{7} + \text{cse}^2 \frac{3\pi}{7} = 8$

$$\text{tg}^2 \frac{\pi}{16} + \text{tg}^2 \frac{3\pi}{16} + \text{tg}^2 \frac{5\pi}{16} + \text{tg}^2 \frac{7\pi}{16} = 28$$

٢٠ - برهن أن معادلة الدائرة المارة من النقاط z_1 , z_2 , z_3 هي :

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \Big/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2} \Big/ \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}$$

٢١ - إذا كان $\sin \Theta \neq 0$ برهن صحة العلاقتين التاليتين :

(a) $$\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \Theta - \cos \frac{k\pi}{n} \right)$$

(b) $$\frac{\sin (2n+1)\Theta}{\sin \Theta} = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

٢٢ - برهن صحة العلاقة :

$$\cos 2n\Theta = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\cos^2 \Theta}{\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \right]$$

٢٣ - عين المحل الهندسي للنقطة $z = x + iy$ فيما إذا كان :

(a) $\left| z - \frac{1}{z} \right| = 2$, (b) $\left| z + z^3 \right| = 2$

٢٤ - ليكن Θ عدد حقيقي وليكن : $a = \sin \Theta + i \cos \Theta$

ولتكن المعادلة : $z^2 - 2az + 1 = 0$

آ - برهن أن جذري هذه المعادلة (z_2 , z_1) قيـاسين متعاكسين ودليلين متناظرين .

ب - ماهو الشرط اللازم والكافي الذي يجب على a أن يتمتع به

ليكون جذرا هذه المعادلة حقيقيين أو وهميين صرفاً .

ج - احسب قياس ودليل الأعداد : $z_1 \pm i$ ، $z_2 \pm i$ ثم أوجد العلاقات المهمة الكائنة بين هذه الأعداد .

٢٥ - إذا فرضنا : $u = \cos x + i \sin x$ أحسب التركيبين .

$$\left(u + \frac{1}{u}\right)^n \quad , \quad \left(u - \frac{1}{u}\right)^n$$

واستنتج صيغة كل من $\sin^n x$ ، $\cos^n x$ بشكل تابع خطي لجيوب وتمام جيوب اضعاف القوس x .

٢٦ - أوجد معادلة دائرة نصف قطرها (2) ويقع مركزها في النقطة (2 , 3 -) .

٢٧ - عين هندسياً مجموعة النقاط z التي تحقق كلا من العلاقتين التاليتين :

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \quad , \quad \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

★ ★ ★