

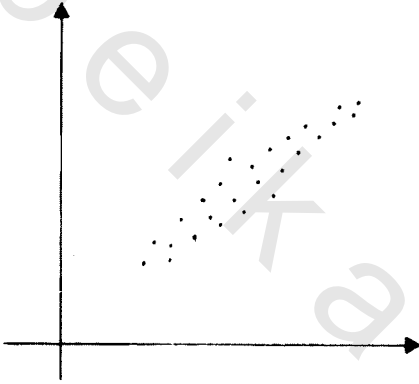
الارتباط والانحدار

(٥ - ١) مقدمة

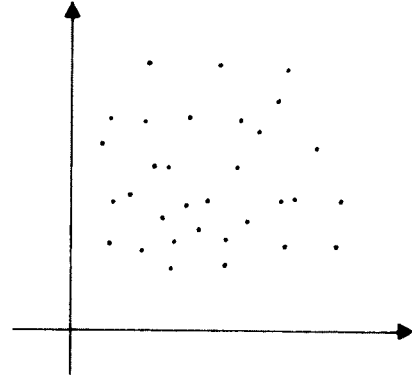
تعرضنا في الفصول السابقة لطرق تنظيم وتلخيص البيانات في توزيعات تكرارية وطرق عرضها بيانيا. كما تعرفنا في الفصلين الثالث والرابع على كيفية حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) وكذلك إيجاد مقاييس التشتت لمجموعة واحدة من البيانات في كل مرة، أو لأكثر من مجموعة من البيانات لغرض المقارنة فيما بينها، وكانت الصفة المشتركة التي تمثل هذه المجموعات أنها تعتمد على متغير واحد وهو المتغير محل الدراسة. ولكن في الحياة العملية قد تكون مفردات العينة محل الدراسة عبارة عن أزواج من القيم لخاصيتين مختلفتين، كما قد يكون المطلوب في مثل هذه الحالة دراسة العلاقة بينهما، ومقياس قوة هذه العلاقة واتجاهها كأن تكون علاقة طردية أو عكسية أو غير ذلك. من هذه العلاقات على سبيل المثال دراسة العلاقة بين الطول والوزن لمجموعة من الطلاب، أو الإنتاج والأجور لمجموعة من العمال، أو الدخل والإنفاق لمجموعة من الأسر، أو النمو للنبات وعمره، أو كمية المحصول والتسميد وهكذا.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بدراسة طرق قياس مقدار العلاقة بين متغيرين محل الدراسة، مثل قياس قوة الارتباط بينهما. وإيجاد مقاييس عددية لقياس قوة الارتباط. نبحث كذلك موضوع إيجاد علاقة رياضية تربط المتغيرين ببعضهما البعض، لكي يمكن التنبؤ بأحد المتغيرات لقيمة محددة للمتغير الأخر، وهي ما تسمى بمعادلة الانحدار.

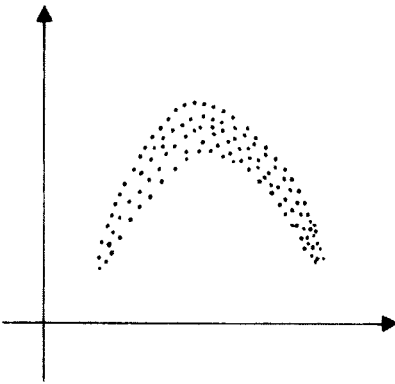
ولكي نبدأ هذه الدراسة يجب أن نتعرف على ما يسمى بأشكال الانتشار وهي عبارة عن رسم بياني على محورين لمجموعة من النقاط تمثل أزواج القيم للبيانات مثل :
 (س_١ ، ص_١) ، (س_٢ ، ص_٢) ، (س_٣ ، ص_٣) ، ، (س_٦ ، ص_٦) بحيث يكون المحور الأفقي يمثل المتغير س والمحور الرأسي يمثل المتغير ص . والمتغيرات لبعض الظواهر محل الدراسة تأخذ صور مختلفة من أشكال الانتشار نبين بعضها بيانياً كما يلي :



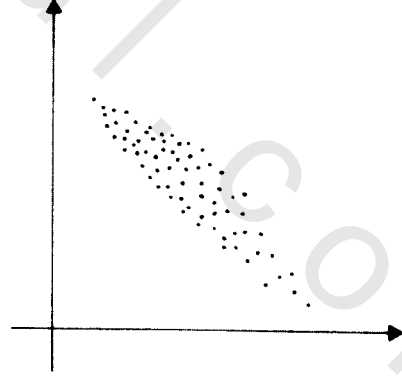
شكل (٥ - ٢) : انتشار قيم
(س ، ص) في اتجاه خطي طردي



شكل (٥ - ١) : انتشار غير منظم



شكل (٥ - ٤) : انتشار قيم
(س ، ص) في خط منحنى



شكل (٥ - ٣) : انتشار قيم
(س ، ص) في اتجاه خطي عكسي

في شكل (٥ - ١): يتضح منه أن أزواج القيم (س، ص) مبعثرة بدون ضابط أو اتجاه معين، أي لا يمكن استنتاج أي علاقة بين المتغيرين (س، ص). ويمكن القول أن المتغيرين س، ص مستقلين ولا يوجد أي ارتباط بينهما.

في شكل (٥ - ٢): نلاحظ أن أزواج المشاهدات (س، ص) تنتشر حول خط مستقيم أي كلما تزداد قيم س تزداد معها قيم ص ومنه نستنتج أنه توجد علاقة خطية طردية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ - ٣): نجد أن شكل الانتشار يأخذ شكل خطي أيضا ولكن عندما تزداد قيم س تقل قيم ص، أي توجد علاقة خطية عكسية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ - ٤): نجد أن البيانات منتشرة حول منحنى أي توجد علاقة غير خطية بين المتغيرين (س، ص).

والمقاييس التي توضح مدى هذا الارتباط بين المتغيرين (س، ص) تسمى بمعامل الارتباط. أما العلاقة الرياضية التي تربط المتغيرين (س، ص) تسمى معادلة خط الانحدار. سوف نكتفي بدراسة معامل الارتباط الخطي وكذلك معادلة الانحدار الخطي بأشكال الانتشار (٥ - ٢)، (٥ - ٣) وذلك لمراعاة مستوى وطبيعة تخصصات الدارسين لهذا الكتاب. وسوف نقوم بدراسة بعض مقاييس الارتباط بين المتغيرين (س، ص) مثل معامل الارتباط الخطي لبيرسون (Pearson) ومعامل الارتباط للرتب لسبيرمان (Spearman) ومعامل الاقتران لكرايمر (Cramer) وكذلك إيجاد معادلة الانحدار الخطي للمتغيرين (س، ص). كما سنحاول تبسيط عرضنا للموضوع كلما أمكن، وذلك باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة.

(٥ - ٢) معامل الارتباط الخطي

يستخدم معامل الارتباط لبيرسون (Pearson) لقياس قوة الارتباط بين متغيرين س، ص عندما تكون أزواج القراءات كمية أي رقمية وذلك في حالة البيانات غير المبوبة أو في حالة البيانات المبوبة وستتناول كلا من هاتين الحالتين فيما يلي.

(٥ - ٢ - ١) معامل الارتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كان لدينا أزواج القيم للمتغيرين س، ص من المجتمع محل الدراسة كالتالي (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢)، (س_٣، ص_٣)،، (س_ن، ص_ن) فإننا نعرف معامل الارتباط الخطي لبيرسون (م_ب) بأنه متوسط مجموع حاصل ضرب القيم المعيارية للظاهرتين المراد دراسة العلاقة بينهما ولكل ظاهرة، ولتكن س_١، ص_١. وهذه هي أفضل طريقة لقياس التغيرات التي تحدث بين ظاهرتين وتحدد طبيعة التغير سواء بالنقص أو الزيادة ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$م_{ب} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i v_i \quad (١) \dots\dots\dots$$

$$\text{حيث } \bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \text{ و } \bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$$

وبالتعويض عن القيم المعيارية س_١، ص_١ فيكون م_ب كالتالي:

$$م_{ب} = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v})}{n \sigma_s \sigma_v} \quad (٢) \dots\dots\dots$$

يلاحظ أن هذه الصيغة لا تعتمد على وحدات القياس للظاهرتين. وعندما تكون البيانات مأخوذة من عينة حجمها ن فإنه يفضل القسمة على (ن - ١) بدلا من ن عندئذ نكتب العلاقة (١) في الصورة التالية:

$$م_{ب} = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v})}{(n-1) \sigma_s \sigma_v} \quad (٣) \dots\dots\dots$$

يلاحظ في بعض الأحيان أن العلاقة (٣) السابقة صعبة إلى حد ما عند حساب قيمتها عددياً، وقد يتعرض الدارس إلى ارتكاب بعض الأخطاء لأنه يحتاج إلى عدد من المقادير

الإحصائية مثل σ_s ، $\sigma_{ص}$ ، $\sigma_{صص}$ ، $\sigma_{صص}$ ولتجاوز مثل هذه الصعوبة سنعمد فيما يلي إلى استنتاج صيغة ستكون غالبا أبسط في الحساب من العلاقة (٣) السابقة وتكون كالتالي:

$$b^2 = \frac{n \text{ مج } ص - \text{مج } ص \text{ مج } ص}{\sqrt{[n \text{ مج } ص - \text{مج } ص]^2 - [n \text{ مج } ص - \text{مج } ص]^2}} \dots \dots (٤)$$

وتعتمد العلاقة (٤) في كونها سهلة حسابيا من سابقها لأننا نحسب فقط المقادير $\text{مج } ص$ ، $\text{مج } ص$ ، $\text{مج } ص$ ، $\text{مج } ص$ ، $\text{مج } ص$ ، $\text{مج } ص$ ، وهي مقادير يمكن الإشارة إليها: بأنه يمكن حسابها مباشرة، وبسرعة أكبر.

مثال (١)

أوجد معامل الارتباط بين الإنفاق $ص$ والدخل $س$ لمجموعة مكونة من سبع أسر والبيانات بمئات الريالات كالتالي:

جدول (٥ - ١): الإنفاق والدخل لسبع أسر

٢٠	١٥	١٣	١٢	١٢	١٠	٨	س
١٩	١٣	١٠	١٠	١٢	٩	٨	ص

ولسهولة الحل نلخص الحسابات في الجدول التالي:

ص ^٢	س ^٢	ص ص	الإنفاق (ص)	الدخل (س)
٦٤	٦٤	٦٤	٨	٨
٨١	١٠٠	٩٠	٩	١٠
١٤٤	١٤٤	١٤٤	١٢	١٢
١٠٠	١٤٤	١٢٠	١٠	١٢
١٠٠	١٦٩	١٣٠	١٠	١٣

ص ^٢	س ^٢	س ص	الإنفاق (ص)	الدخل (س)
١٦٩	٢٢٥	١٩٥	١٣	١٥
٣٦١	٤٠٠	٣٨٠	١٩	٢٠
١٠١٩	١٢٤٦	١١٢٣	٨١	٩٠

ومن ذلك يمكن حساب معامل الارتباط كما يلي:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum (س ص) - \frac{\sum س \sum ص}{n}}{\sqrt{[\sum س^2 - \frac{(\sum س)^2}{n}][\sum ص^2 - \frac{(\sum ص)^2}{n}]}} \\
 &= \frac{٨١ \times ٩٠ - ١١٢٣ \times ٧}{\sqrt{[١٠١٩ - \frac{(٨١)^2}{٧}][١٢٤٦ - \frac{(٩٠)^2}{٧}]}} \\
 &= \frac{٥٧١}{\sqrt{٥٩٦,٤٨}} = \frac{٧٢٩٠ - ٧٨٦١}{\sqrt{٥٧٢ \times ٦٢٢}} = ٠,٩٥٧
 \end{aligned}$$

ملاحظات

نلاحظ أن قيمة معامل الارتباط r تتراوح بين ١-، ١- كما يقال: إن الارتباط طردي إذا كانت قيمة معامل r موجبة (أي محصورة بين الصفر والواحد الصحيح) وتزداد قوة الارتباط كلما قربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر. كما يقال: إن الارتباط عكسي إذا كانت قيمة معامل r سالبة (أي أقل من صفر إلى ١-)، ويكون ارتباطاً عكسياً قوياً كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من ١-، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر.

وتجدر الإشارة إلى أنه لا توجد حدود فاصلة تبين قوة وضعف الارتباط، ولكن يمكن وضع حدود تقريبية لقيم « r » مبنية على الخبرة السابقة، وسوف نذكر ذلك

للقيم الموجبة وبالمثل يمكن تطبيقها عندما تكون «م» سالبة، وذلك بتغيير إشارة الحدود في الجدول التالي:

جدول (٥ - ٢): قيم معامل الارتباط وقوته

قوة الارتباط	قسم معامل الارتباط م
لا يوجد ارتباط يذكر	صفر إلى ٠,٣
ارتباط ضعيف	٠,٣ إلى ٠,٥
ارتباط متوسط	٠,٥ إلى ٠,٧
ارتباط قوي	٠,٧ إلى ٠,٩
ارتباط قوي جداً	٠,٩ إلى ١

وبذلك يكون الارتباط في مثال (١) السابق قوياً جداً.

بعض خصائص معامل الارتباط الخطي لبيرسون

من أهم خصائصه أنه لا يعتمد على القيم نفسها وإنما يعتمد على مقدار تباعد هذه القيم عن بعضها، ولذلك إذا جمعنا أو طرحنا مقداراً ثابتاً من كل قراءات الظاهرتين س أو ص فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير. يتمتع معامل الارتباط بهذه الخاصة بالنسبة للضرب والقسمة كذلك إلا إنه في حالة ضرب أو قسمة مقدار ثابت في كل من س، ص فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير بمثل هذه العمليات البسيطة. ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في المعادلة (٤) السابقة بوضع $س = س \pm ١$.

ص = ص \pm ب فإن المعادلة (٤) تصبح كالتالي:

$$٢ ب = \frac{ن م ج س ص - م ج س م ج ص}{\sqrt{[ن م ج س^٢ - (م ج س)^٢][ن م ج ص^٢ - (م ج ص)^٢]}} \quad (٥)$$

وكذلك في حالة قسمة كل من س، ص على مقدار ثابت أي بوضع

$$س = \frac{س}{١} ، ص = \frac{ص}{ب} \text{ فإن المعادلة (٥) تصبح كالتالي:}$$

$$(٦) \dots\dots\dots = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س مج ص}}{\sqrt{[\text{ن مج س} - \text{مج س}][\text{ن مج ص} - \text{مج ص}]}}$$

ولاستخدام بيانات مثال (١) السابق لتوضيح الأفكار السابقة نورد المثال التالي :

نطرح من جميع قيم س مقداراً ثابتاً وليكن $10 = 1$ كما نطرح من جميع قيم ص مقدار $8 = 8$ في بيانات المثال السابق فنحصل على القيم الجديدة، وهي $س = س - 10$ ، $ص = ص - 8$ فنحصل على بيانات العمودين الأول والثاني من الجدول التالي وبقسمة قيم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً فنحصل على بيانات العمودين الثالث والرابع، ويكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

ص	س	ص = $\frac{ص}{2}$	س = $\frac{س}{2}$	ص	س
٠	١	٠	١-	٠	٢-
٠,٢٥	٠	٠,٥	٠	١	٠
٤,٠٠	١	٢	١	٤	٢
١,٠٠	١	١	١	٢	٢
١,٠٠	٢,٢٥	١,٥	١,٥	٢	٣
٦,٢٥	٦,٢٥	٦,٢٥	٦,٢٥	٥	٥
٣٠,٢٥	٢٥,٠٠	٢٧,٥٠	٥,٥	١١	١٠
٤٢,٧٥	٣٦,٥٠	٣٨,٢٥	١٢,٥	١٠	المجموع

$$= \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س مج ص}}{\sqrt{[\text{ن مج س} - \text{مج س}][\text{ن مج ص} - \text{مج ص}]}}$$

$$= \frac{12,5 \times 10 - 38,25 \times 7}{\sqrt{[(12,5) - 42,75 \times 7][(10) - 36,25 \times 7]}}$$

$$\frac{142,25}{149,12} = \frac{125 - 267,75}{143 \times 100,5 \sqrt{}} = 0,957$$

وهي النتيجة السابقة نفسها أيضا.

وباستخدام القسمة فقط لبيانات مثال (١) تقسم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً، فيكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

ص ^٢	س ^٢	س ص	ص = $\frac{ص}{٢}$	س = $\frac{س}{٢}$	ص	س
١٦	١٦	١٦	٤	٤	٨	٨
٢٠,٢٥	٢٥	٢٢,٥	٤,٥	٥	٩	١٠
٣٦	٣٦	٣٦	٦	٦	١٢	١٢
٢٥	٣٦	٣٠	٥	٦	١٠	١٢
٢٥	٤٥,٢٥	٣٢,٥	٥	٦,٥	١٠	١٣
٤٢,٢٥	٥٦,٢٥	٤٨,٧٥	٦,٥	٧,٥	١٣	١٥
٩٠,٢٥	١٠٠	٩٥	٩,٥	١٠	١٩	٢٠
٢٥٤,٧٥	٣١١,٥	٢٨٠,٧٥	٤٠,٥	٤٥	المجموع	

$$r = \frac{\sum (ص - \bar{ص})(س - \bar{س})}{\sqrt{[\sum (ص - \bar{ص})^2][\sum (س - \bar{س})^2]}}$$

$$= \frac{40,5 \times 45 - 280,75 \times 7}{\sqrt{[40,5^2 - 254,75 \times 7][45^2 - 311,5 \times 7]}}$$

$$= \frac{1822,5 - 1960,25}{143 \times 100,5 \sqrt{}}$$

$$0,957 = \frac{142,75}{149,12}$$

وهي النتيجة السابقة نفسها

(٥-٢-٢) معامل الارتباط الخطي ليرسون في حالة البيانات المبوبة في هذه الحالة تصبح العلاقة (٤) في الشكل التالي:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2][\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2]}} \quad (٧)$$

حيث

ن مجموع التكرارات الكلية.
 n_1 التكرار المشترك للمتغيرين س، ص في الخلايا.
 n_2 مجموع التكرارات الأفقية (أي الصف) لمراكز الفئات للمتغير س.
 n_3 مجموع التكرارات الرأسية (أي العمود) لمراكز الفئات للمتغير ص.
س هي مراكز الفئات للمتغير س.
ص هي مراكز الفئات للمتغير ص.
ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٢)

أوجد معامل الارتباط الخطي ليرسون بين الأجور والانتاج لمجموعة مكونة من ثلاثين عاملاً في مثال (٤) في الفصل الثاني.

الحل:

نلخص الحل والحسابات في الجدول التالي:

القيمة التي في الركن للصف الأول ١٢ هي عبارة عن ضرب التكرار ٣ × مركز الفئة س (-٢) × مركز الفئة ص (-٢) = ٣ × ٢ × ٢ = ١٢ = n_{11} س ص.
وهكذا بالنسبة لباقي الخلايا يمكن حساب n_{ij} س ص بنفس الطريقة. وتجمع أفقياً فيكون العمود الرأسي الأخير في الجدول. وتجمع رأسياً فيكون الصف الأخير n_{j1} س ص في الجدول. وتكون نتيجة مجموع العمود الأخير n_{j1} س ص مساوياً لمجموع الصف الأخير في الجدول n_{j1} س ص = ٤٢.

الأجور س	الانتاج ص	٥٩-٥٠	٦٩-٦٠	٧٩-٧٠	٨٩-٨٠	٩٩-٩٠	ك _١	ك _٢ = $\frac{٧٤,٥ - ٧٠}{١٠}$	ك _٣	ك _٤	ك _٥
٥٩-٥٠	١٢	٣					٣	٢-	٦-	١٢	١٢
٦٩-٦٠	٢	٤	٤				٥	١-	٥-	٥	٦
٧٩-٧٠	٠	٨	٠	٠			١٠	٠	٠	٠	٠
٨٩-٨٠		١	٦	١	٦		٨	١	٨	٨	٨
٩٩-٩٠							٤	٢	٨	١٦	١٦
ك _١	٤	٦	٩	٦	٤	٣٠	٤٢	٤١	٥	٤	٤٢
ص = $\frac{٧٤,٥ - ٧٠}{١٠}$	٢-	١-	٠	١-	٢-	٣-	٢	١٠	٦	٠	٦
ك _٢ ص	٨-	٦-	٠	٦-	٠	١٠	٢٠	٦	٠	٦	١٦
ك _٣ ص	١٦	٦	٠	٦	٠	٢٠	٦	٠	٦	١٦	١٢٠
ك _٤ ص	١٤	٤	٠	٤	٠	١٨	٦	٠	٤	١٤	٤٢

$$\begin{aligned}
 & \text{ب} = \frac{\text{ن مح ك}_1 \text{ ص ص} - (\text{مح ك}_1 \text{ ص}) (\text{مح ك}_2 \text{ ص})}{\sqrt{[\text{ن مح ك}_1 \text{ ص}^2 - (\text{مح ك}_1 \text{ ص})^2] [\text{ن مح ك}_2 \text{ ص}^2 - (\text{مح ك}_2 \text{ ص})^2]}} \\
 & = \frac{2 \times 5 - 42 \times 30}{\sqrt{[2(2) - 48 \times 30] [2(5) - 41 \times 30]}} \\
 & = \frac{10 - 1260}{\sqrt{1436 \times 1200}} \\
 & = 0,95 = \frac{1250}{1315,44}
 \end{aligned}$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي بين مقدار الأجر وكمية الإنتاج.

(٥ - ٣) معامل ارتباط الرتب

يلاحظ أن الارتباط الخطي لبيسون يبين مدى قوة الارتباط بين المتغيرين (س، ص) في حالة البيانات الكمية فقط، ولكن في كثير من الدراسات التطبيقية نصادف

بيانات وصفية يكون المطلوب فيها إيجاد قوة الارتباط بين المتغيرين الوصفيين. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس يستخدم في حالة البيانات الوصفية خاصة إذا أمكن وضعها في صورة ترتيبية، مثل تقديرات الطلاب، أو المراتب العلمية لأعضاء هيئة التدريس بالجامعة، أو المراتب والدرجات لموظفين حسب السلم الوظيفي.

ويمكن ملاحظة أن استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (Spearman) يفيد في مثل حالة هذه البيانات الوصفية السالفة الذكر أو البيانات الكمية كذلك مع مراعاة أن تكون عدد أزواج القيم أقل من ٣٠ حتى يمكن أن يعطي معامل ارتباط الرتب في أغلب الأحيان قوة الارتباط بصورة أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون. ويعرف معامل ارتباط الرتب لسبيرمان r_s بالعلاقة التالية:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum F^2}{n(n^2 - 1)} \quad (٨)$$

حيث إن «ن» عدد المشاهدات، ف فرق الرتبة بين المتغيرين.

ولتوضيح طريقة إيجاد رتب مجموعة من الأرقام نتصور أننا رتبنا الأرقام تصاعدياً أو تنازلياً فيكون الرقم الأول رتبة ١، والرقم الثاني رتبة ٢، وهكذا...

وإذا تساوى رقمان فإننا نأخذ متوسط مجموع الرتبتين لهما، ونوضح ذلك باستخدام الترتيب التصاعدي في ثلاثة الأمثلة التالية، حيث نوضح في المثال (٣) كيفية تحديد رتب القراءات، ومن ثم نطبق ذلك لإيجاد معامل ارتباط الرتب في المثالين التاليين (٤)، (٥).

مثال (٣)

أوجد رتب الأعداد التالية:

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣
---	---	---	---	---	---	---	---

إذا تصورنا ترتيب البيانات تصاعديا فإن الرقم ٢ يحتل المرتبة الأولى (١)،
والرقمين ٣، ٣ يحتلان المرتبة الثانية والثالثة (٢، ٣)، وتكون رتبة كل منهما هي متوسط
الرتبتين (٢، ٣) أي $(\frac{٣+٢}{٢})$ والرقم ٤ يمثل المرتبة (٤) وهكذا باقي الأرقام

ونوضح ذلك بالجدول التالي لقيم «س» ورتبها

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣
رتبة س	١	٤	٢,٥	٧	٥	٦	٢,٥

ولإيجاد معامل الارتباط للرتب حسب العلاقة (٨) نوضح طريقة حسابه بالمثال
التالي .

مثال (٤)

أوجد معامل ارتباط الرتب لسيرمان للدخل والإنفاق لعينة مكونة من ٧ أسر
حسب البيانات المعطاة في مثال (١) السابق .

ويمكن تلخيص الحسابات كما في الجدول التالي :

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س - رتبة ص	ف ^٢
٨	٨	١	١	٠	٠
١٠	٩	٢	٢	٠	٠
١٢	١٢	٣,٥	٥	-١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	٣,٥	٣,٥	٠	٠
١٣	١٠	٥	٣,٥	١,٥	٢,٢٥
١٥	١٣	٦	٦	٠	٠
٢٠	١٩	٧	٧	٠	٠
-	-	-	-	-	٤,٥

$$\begin{aligned} \text{س}^2 &= 1 - \frac{\sum f^2}{n} = 1 - \frac{6 \times 6}{(1 - 6)} \\ &= 1 - \frac{36}{(1 - 49)7} \\ &= 1 - \frac{27}{48 \times 7} \\ &= 1 - \frac{27}{336} \\ &= 1 - 0,08 \\ &= 0,92 \text{ س}^2 \end{aligned}$$

وهو ارتباط طردي وقوي جداً.

مثال (٥)

في دراسة اجتماعية لعينة مكونة من ٥ عائلات عن الوضع المالي لكل من أسرتي الزوج والزوجة، وذلك لمعرفة تأثير الحالة المادية في الزواج بين الأسر، حيث كانت المعلومات كما في الجدول التالي:

جدول (٥ - ٣): الأوضاع المالية لأسر الأزواج والزوجات لخمس أسر

الحالة المالية لأسرة الزوج (س)	جيدة	منخفضة	متوسطة	ممتازة	متوسطة
الحالة المالية لأسرة الزوجة (ص) <td>ممتازة</td> <td>جيدة</td> <td>جيدة</td> <td>ممتازة</td> <td>متوسطة</td>	ممتازة	جيدة	جيدة	ممتازة	متوسطة

أي أن المطلوب هو حساب معامل ارتباط الرتب.

نلخص الحل في الجدول التالي:

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف ²
جيدة	ممتازة	٤	٤,٥	٠,٥-	٠,٢٥
منخفضة	جيدة	١	٢,٥	١,٥-	٢,٢٥

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف ^٢
متوسطة	جيدة	٢,٥	٢,٥	٠	٠
ممتازة	ممتازة	٥	٥	٠,٢٥	٠,٢٥
متوسطة	متوسطة	١	٢,٥	٢,٢٥	١,٥
				مج	٥

$$r_s = \frac{\sum F^2}{N^2} - 1 = \frac{6 \times 6}{(1 - 25) \times 5} - 1$$

$$= \frac{36}{5} - 1 = 7,2 - 1 = 6,2$$

$$r_s = 0,75 = 0,25 - 1 = 0,75$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي .

(٥ - ٤) معامل الاقتران

لقد سبق أن أوجدنا معامل الارتباط لسيرمان (الرتب) للبيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها، ولكن نصادف كثيراً من الدراسات التطبيقية في مختلف أوجه الحياة العملية كعلم الاجتماع والطب والزراعة . . . الخ، بيانات وصفية ليس في طبيعتها صفة الترتيب أي لا يمكن وضع رتب لها، أو لا معنى للرتب فيها، نذكر مثلاً: التدخين فيكون له صفتان (يدخن، أو لا يدخن)، التعليم أي يكون (متعلماً أو غير متعلم)، أو لون الشعر كأن يكون (أشقرًا، أو بنيًا، أو أسودًا)، لون العيون يكون (أزرقًا، أو عسليًا، أو أسودًا، . . .) فصائل الدم تكون (مثلاً أ، +، ب، . . .) وهكذا.

ولتبسيط مفهوم الاقتران بين صفات ما لنفرض أن لكل من المتغيرين أو زوج القراء س، ص صفتان أولى وثانية فإنه يمكن التعبير عن البيانات الناتجة كما في الجدول التالي

جدول (٥ - ٤) : التكرارات المشتركة بين الصفات

الصفة الثانية س _٢	الصفة الأولى س _١	المتغير ص
ب	ا	الصفة الأولى ص _١
د	ج	الصفة الثانية ص _٢

حيث إن ا هي عبارة عن التكرارات المشتركة في الصفة الأولى س_١ والصفة الأولى ص_١ ، هكذا بالنسبة لبقية الرموز ب ، ج ، د .

وقد اقترح بيل (Yule) بأن يعرف معامل الاقتران (م) في هذه الحالة بالعلاقة التالية

$$r = \frac{ad - bc}{ad + bc} \quad (٩) \dots\dots\dots$$

ونوضح طريقة حساب م في المثال التالي .

مثال (٦)

أوجد معامل الاقتران م في بين التعليم والعمل لمجموعة من الأفراد حيث كانت البيانات المجموعة عنهم هي كما يلي :

جدول (٥ - ٥) : الاقتران بين العمل والتعليم

العمل ص	التعليم س	أمي
يعمل	متعلم	٥
لا يعمل	٤	٦

ومن ذلك يمكن حساب معامل الاقتران كما يلي :

$$r = \frac{d - b \cdot j}{d + b \cdot j} = 0,5 = \frac{40}{80} = \frac{4 \times 5 - 6 \times 10}{4 \times 5 + 6 \times 10} =$$

أي يوجد ارتباط متوسط بين التعليم والعمل .

أما عندما تتكون الظواهر من عدة صفات لكل متغير فنذكر على سبيل المثال لا الحصر أنه يمكن وصف لون العين على أنه أزرق - أو عسلي - أو أسود - . . . ، أو لون الشعر حيث يمكن وصفه على أنه (أشقر - أو بني - أو أسود - . . .)

فإننا في مثل هذه الحالات نضع المتغيرين س ، ص وصفاتها الأخرى مهما كان عددها في جدول مبسط كما يلي :

جدول (٥ - ٦) : التكرارات المشتركة بين الصفات

المتغير س / المتغير ص	الصفة الأولى س _١	الصفة الثانية س _٢	الصفة س _م	المجموع
الصفة الأولى ص _١	ك _{١١}	ك _{٢١}	ك _{١م}	ك _{١.}
الصفة الثانية ص _٢	ك _{١٢}	ك _{٢٢}	ك _{٢م}	ك _{٢.}
.....
الصفة ص _ر	ك _{١ر}	ك _{٢ر}	ك _{رم}	ك _{ر.}
المجموع	ك _{١٠}	ك _{٢٠}	ك _{٣٠}	ك _{..}

نقول لمعامل الاقتران في هذه الحالة معامل التوافق، ونرمز له بالرمز τ ويمكن حساب قيمته باستخدام العلاقة التالية:

$$\tau = \sqrt{\frac{1 - J}{J}} \quad (10) \dots\dots\dots$$

حيث إن J تحسب من الجدول السابق كالآتي

$$J = \frac{\sum_{i=1}^m (K_{ij})^2}{K_{i.} K_{.j}} + \dots\dots\dots + \frac{\sum_{i=1}^m (K_{im})^2}{K_{i.} K_{.m}} \quad (11) \dots\dots\dots$$

أي أن نربع تكرار الخلية الأولى، ونقسمه على حاصل ضرب مجموع التكرارات للصف الذي به الخلية الأولى، ومجموع التكرارات للعمود الذي به الخلية الأولى، وهكذا نحسب بقية حدود J من العلاقة (١١) بالنسبة لتكرارات جميع الخلايا. ولتوضيح خطوات حساب معامل التوافق نورد المثال التالي.

مثال (٧)

أوجد معامل التوافق بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصاً باستخدام البيانات التالية:

جدول (٥ - ٧): التكرارات المشتركة بين لون العيون ولون الشعر

المجموع	أسود	بنّي	أشقر	لون الشعر لون العيون
١٥	٤	٥	٦	أزرق
١٥	٦	٦	٣	عسلي
١٥	٦	٧	٢	أسود
٤٥	١٦	١٨	١١	المجموع

لإيجاد معامل التوافق r نحسب أولاً قيمة J كالتالي:

$$J = \frac{r^2(4)}{15 \times 16} + \frac{r^2(5)}{15 \times 18} + \frac{r^2(6)}{15 \times 11} =$$

$$+ \frac{r^2(6)}{15 \times 16} + \frac{r^2(6)}{15 \times 18} + \frac{r^2(3)}{15 \times 11} +$$

$$+ \frac{r^2(6)}{15 \times 16} + \frac{r^2(7)}{15 \times 18} + \frac{r^2(2)}{15 \times 11} +$$

$$+ 0,07 + 0,09 + 0,22 = J$$

$$+ 0,15 + 0,13 + 0,05$$

$$+ 0,15 + 0,18 + 0,02$$

$$J = 1,07$$

$$r = \sqrt{\frac{1 - J}{J}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 1,07}{1,07}}$$

$$= \sqrt{0,07}$$

$$= 0,26$$

أي يوجد ارتباط ضعيف بين لون الشعر ولون العينين.

ولأهمية دراسة مفهوم الاقتران في كثير من المسائل التطبيقية بين متغيرين أو أكثر، وذلك للاستدلال على طبيعة الاقتران أو قياس معامل الاقتران، وذلك للمقارنة والتعرف على قوة مثل هذا الاقتران. نواجه في دراسة الاقتران عددا من تطبيقات الإحصاء مثل تطبيقات الإحصاء في علم الاجتماع لدراسة ظواهر ما، وعلاقة ذلك بالدين أو التعليم أو الجنس أو العادات الأخرى، كما نواجه مثل هذه الدراسات في كثير من العلوم أحيانا، وفي دراسة بعض الخصائص الوراثية مثل لون الشعر أو العين... إلخ.

باستخدام الجدول (١٤) يمكن أن نشير إلى الحد العام على أنه K حيث إن عدد صفوف الجدول L ، وعدد أعمدته M . نرمز لأي قراءة من الجدول K L M بالمشاهدة «مش»، ويسمى المقدار K L M القيمة المتوقعة للقراءة، ونرمز لها بالرمز «مت»، وبذلك نحسب ما يسمى مربع كاي، ونرمز له كـ χ^2 على الصورة

$$\chi^2 = \frac{L(M - \text{مت})^2}{\text{مت}} \dots \dots \dots (12)$$

حيث إن المجموع M يكون على جميع خلايا الجدول.

مثال (٨)

أوجد مربع كاي لبيانات المثال ٧ عند دراسة الاقتران بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصاً.

الحل

أولاً نكوّن جدول القيم المشاهدة كما يلي:

المجموع	أسود	بني	أشقر	لون الشعر من لون العيون
١٥	٤	٥	٦	أزرق
١٥	٦	٦	٣	عسلي
١٥	٦	٧	٢	أسود
٤٥	١٦	١٨	١١	المجموع

أما جدول القيم المتوقعة فيمكن حسابه لكل خلية على حده فبالنسبة للخلية في الصف الأول والعمود الأول التي قيمتها مشاهداتها ٦ فإن القيمة المتوقعة لها

$$\text{مت} = \frac{11 \times 15}{45} = \frac{11}{3}$$

والقيمة المتوقعة للخلية في الصف الثاني والعمود الأول

$$\frac{11}{3} = \frac{15 \times 11}{45} = \text{مت } 12$$

وبالمثل نلاحظ أن

$$6 = \frac{15 \times 18}{45} = \text{مت } 21$$

ومن ذلك يكون جدول القيم المتوقعة هو

لون الشعر من لون العيون	أشقر	بنّي	أسود
أزرق	$\frac{11}{3}$	٦	$\frac{16}{3}$
عسلي	$\frac{11}{3}$	٦	$\frac{16}{3}$
أسود	$\frac{11}{3}$	٦	$\frac{16}{3}$

وبالتالي فإنه باستخدام الجدولين السابقين يكون مربع كاي هو

$$\frac{\chi^2(\frac{11}{3} - 2)}{\frac{11}{3}} + \frac{\chi^2(\frac{11}{3} - 3)}{\frac{11}{3}} + \frac{\chi^2(\frac{11}{3} - 6)}{\frac{11}{3}} = \chi^2_{\text{كا}}$$

$$\frac{\chi^2(6 - 7)}{6} + \frac{\chi^2(6 - 6)}{6} + \frac{\chi^2(6 - 5)}{6} =$$

$$\frac{\chi^2(\frac{16}{3} - 6)}{\frac{16}{3}} + \frac{\chi^2(\frac{16}{3} - 6)}{\frac{16}{3}} + \frac{\chi^2(\frac{16}{3} - 4)}{\frac{16}{3}} = \chi^2_{\text{كا}}$$

$$\begin{aligned}
 & ٠,٧٦ + ٠,١٢ + ١,٤٨ = \\
 & ٠,١٧ + ٠,٠٠ + ٠,١٧ + \\
 & ٠,٠٨ + ٠,٠٨ + ٠,٣٣ + \\
 & ٣,١٩ =
 \end{aligned}$$

بعد حساب مربع كاي يمكن حساب معامل كارل بيرسون للاقتران بالصيغة التالية :

$$r = \frac{\sum K^2}{\sum K + ١} \sqrt{\frac{٢}{٢٠}} \quad (١٣) \dots\dots\dots$$

كما اعتاد بعض الإحصائيين على استخدام كمية أخرى تسمى مربع فاي، ويرمز لها بالرمز F^2 وهي

$$F^2 = \frac{\sum K^2}{\sum K}$$

وبذلك فإنه يمكن حساب معامل بيرسون للاقتران باستخدام مربع فاي من

$$r = \frac{F^2}{F^2 + ١} \sqrt{\frac{٢}{٢٠}} \quad (١٤) \dots\dots\dots$$

مثال (٩)

أوجد معامل بيرسون للاقتران لبيانات المثال ٨ السابق باستخدام مربع كاي ومربع فاي.

الحل

سبق أن حسبنا مربع كاي فكانت قيمته

$$\sum K^2 = ٣,١٩$$

وبذلك يكون معامل بيرسون للاقتران

$$r = \frac{٣,١٩}{٣,١٩ + ٤٥} \sqrt{\frac{٢}{٢٠}} = ٠,٢٦$$

ولحساب مربع فاي يكون لدينا:

$$F^2 = \frac{3,19}{45}$$

$$= 0,07$$

وبالتالي فإن معامل بيرسون للاقتران هو:

$$r = \frac{0,07}{\sqrt{0,07+1}} = 0,26$$

وقد لوحظ أن معامل بيرسون للاقتران r لا يساوي الوحدة حتى في حالة الاقتران الكلي بين متغيرين عندما تكون التقسيمات L ، M محدودة وتقترب من الوحدة عندما تكون قيم L ، M كبيرة جداً.

وقد لوحظ أنه في حالة $L = M$ فإن القيمة العظمى لمعامل بيرسون للاقتران هي

$$r = 0,707 \quad \text{فإن} \quad M = 2$$

$$r = 0,816 \quad \text{فإن} \quad M = 3$$

$$r = 0,949 \quad \text{فإن} \quad M = 10$$

وبذلك يمكن استخدام معامل بيرسون للاقتران فقط للمقارنة بين قيمة بيانات مختلفة في حالة تساوي أبعاد هذه البيانات أي أن لها نفس الصفوف والأعمدة.

ولتجاوز هذه المشكلة فقد اقترح تشابرو وما يسمى معامل تشابرو للاقتران، ويرمز له بالرمز $r_{\text{ش}}$ وبحسب بالصيغة التالية:

$$r_{\text{ش}} = \frac{F^2}{\sqrt{(1-M)(1-L)}} \quad (15)$$

أو

$$(16) \dots\dots\dots \frac{r^2}{\sqrt{(1-m)(1-l)(1-m^2)}} = r^2$$

حيث إن العلاقتين (١٥) و (١٦) متكافئتان .

وقد تبين أن معامل تشابرو يقع بين الصفر والواحد عندما تكون $l = m$.

مثال (١٠)

أوجد معامل تشابرو للاقتران لبيانات مثالي ٨ و ٩ السابقين . وبما أننا سبق وأن حسبنا المقدارين r^2 و m عندئذ يكون معامل تشابرو للاقتران حسب العلاقة (١٥) هو:

$$\frac{0,07}{\sqrt{(1-3)(1-3)}} = r^2$$

$$0,035 =$$

بينما يكون نفس المعامل باستخدام العلاقة (١٦) هو:

$$\frac{r^2(0,26)}{\sqrt{(1-3)(1-3)(1-0,26)}} = r^2$$

$$0,035 =$$

أي أن:

$$m = 0,19$$

(٥ - ٥) خط الانحدار

سبق أن درسنا في هذا الفصل طرق حساب قيمة معامل الارتباط الخطي بين متغيرين س، ص بعدة طرق، وذلك في معامل الارتباط لبيرسون، أو معامل الارتباط للرتب لسبيرمان، كما تعرفنا على كيفية إيجاد قيمة معامل الاقتران لكارل بيرسون وغيره . ومن الملاحظ أن جميع المقاييس السابقة تبين أو تعطي قوة الارتباط بين أي متغيرين

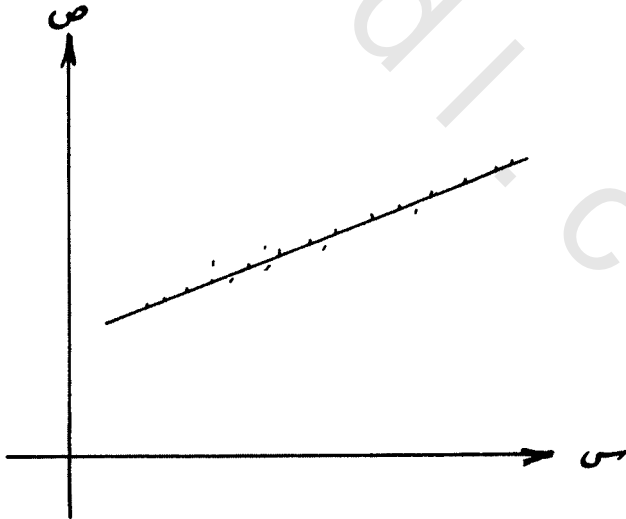
فقط، ولكن إذا كان يود الدارس أو الباحث استقصاءً أو بحثاً لأحد المتغيرين عند معرفة قيمة محددة للمتغير الآخر فإنه لا يمكن استخدام معامل الارتباط أو معاملي الاقتران والتوافق ولا بد للوصول إلى إيجاد علاقة جبرية محددة بين المتغيرين (س، ص)، تسمى عادة العلاقة الرياضية التي تفرض التوقع أو التنبؤ بسلوك أحد المتغيرين عند معرفة الآخر بمعادلة خط الانحدار. وتشير معادلة خط الانحدار إلى انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر، وسوف ندرس فيما يلي معادلة خط انحدار المتغير ص على المتغير س وكذلك معادلة خط انحدار المتغير «س» على المتغير «ص» ويمكن تلخيص الصورتين الجبرية والبيانية لخطي الانحدار فيما يلي.

(٥ - ٥ - ١): انحدار ص على س يعطي بالمعادلة التالية

(١٧)

$$ص = اس + ب$$

ويمكن توضيح المقصود بالشكل البياني التالي:



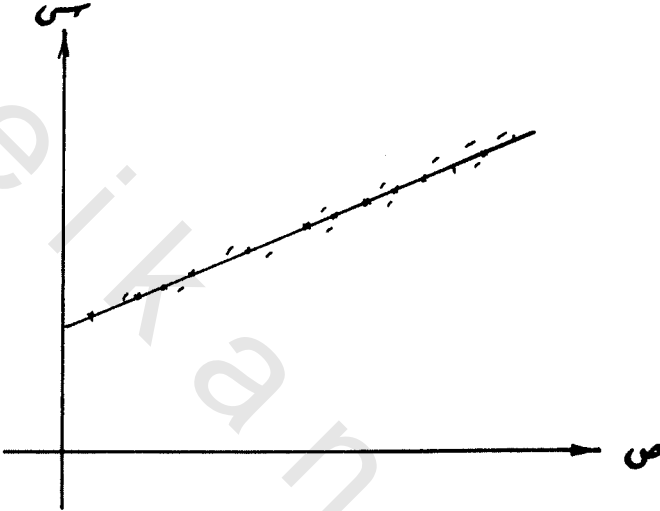
شكل (٥ - ٥): شكل خط انحدار ص على س

(٥ - ٥ - ٢): انحدار س على ص ويعطى بالمعادلة التالية

(١٨)

$$س = ا ص + ب$$

ويمكن توضيح المقصود بالعلاقة السابقة بالرسم البياني التالي:



شكل (٥ - ٦): شكل خط انحدار س على ص

حيث إن أحد المتغيرين يعتمد على الآخر سواء كان الاعتماد طردياً أو عكسياً. ويمكن تحديد ورسم خط الانحدار بعدة طرق: منها تمهيد خط مناسب بعد رسم شكل الانتشار للبيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) وهذه الطريقة تقريبية جداً، ولا تستخدم كثيراً، لأنها تختلف من شخص لآخر، ولهذا كان لا بد من إيجاد طريقة لتوفيق خط الانحدار بحيث لا تعتمد على انطباع الأشخاص، ولكن تعتمد على البيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) فقط من المعادلة (١٧) أو (١٨). ومن ذلك يمكن تحديد الصيغة الرياضية لخط انحدار ص على س بالضبط إذا عُلِمَت قيمتا الثابتين ا، ب واللذين يمكن حسابهما باتباع طريقة المربعات الصغرى التي نوردتها فيما يلي:

إذا كان الخطأ في تمثيل النقطة (س_ر، ص_ر) عن خط الانحدار هو ϵ_r فإن:

$$خ^2 = ص^2 - اس - ب$$

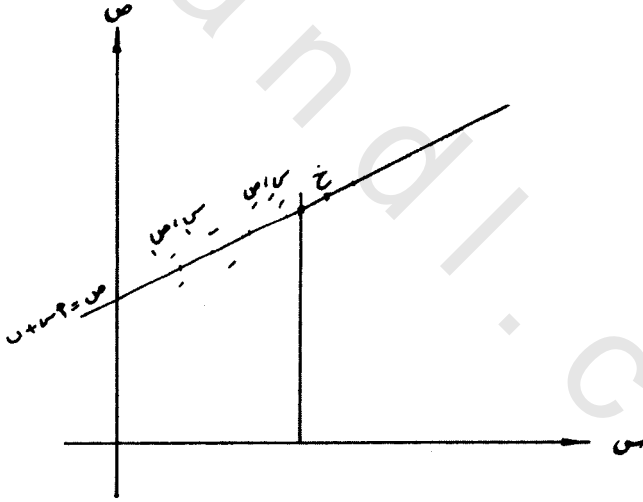
عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو:

$$م = مج خ^2 = مج (ص^2 - اس - ب)$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى (أي أن الأبعاد الرأسية للنقطة عن الخط المقترح أصغر ما يمكن) فإننا نفاضل (م) بالنسبة لكل من (ا) و (ب) وتساوي نتيجة التفاضل في كل منها بالصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$مج ص = ا مج س + ن ب \quad (١٩)$$

$$مج س ص = ا مج س^2 + ب مج س \quad (٢٠)$$



شكل (٥ - ٧): كيفية إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

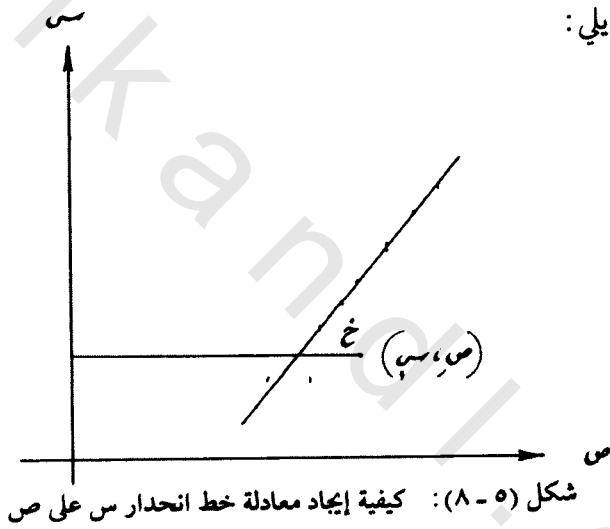
ويحل المعادلتين السابقتين نحصل على قيمتي الثابتين (ا) و (ب) كما يلي:

$$ا = \frac{ن مج س ص - مج س مج ص}{ن مج س^2 - (مج س)^2}$$

ويسمى الثابت (ا) عادة بمعامل انحدار ص على س .

$$ب = \frac{\text{مجم ص}}{ن} - ا \frac{\text{مجم س}}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء الذي يقطعه خط انحدار ص على س من محور ص .
ويمكن إعادة الخطوات السابقة لإيجاد معادلة خط انحدار ص على س المعطاة بالمعادلة (١٨) وكذلك حساب الثابت ا و ب للمعادلة (١٨)، بطريقة المربعات الصغرى كما يلي :



$$خ = س - اص - ب$$

عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو

$$م = \sum (س - اص - ب)^2$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى فإننا نفاضل (م) بالنسبة إلى ا و ب على التوالي ونساوي الناتج في كل منها بصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\text{مجم ص} = ا \text{مجم ص} + ن ب \quad (٢١)$$

$$\text{مجم س ص} = ا \text{مجم ص س} + ب \text{مجم ص} \quad (٢١)$$

ويحل المعادلتين نحصل على قيمتي الثابتين ا و ب كما يلي :

$$1 = \frac{ن مج ص - مج ص مج ص}{ن مج ص^2 - (مج ص)^2}$$

حيث ا يسمى معامل انحدار س على ص .

$$ب = \frac{مج ص}{ن} - ا \frac{مج ص}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء المقطوع من محور س لخط انحدار س على ص .

مثال (١١)

أوجد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) ومن ثم أوجد مقدار الإنفاق عندما يكون الدخل ٣٠٠٠ ريال كما أوجد معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) وذلك باستخدام البيانات المعطاة في مثال (١) السابق .

الحل

نلخص الحل في الجدول التالي :

س	ص	س ص	س ^٢	ص ^٢
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٢	١٠	١٢٠	١٤٤	١٠٠
١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠
١٥	١٣	١٩٥	٢٢٥	١٦٩
٢٠	١٩	٣٨٠	٤٠٠	٣٦١
٩٠	٨١	١١٢٣	١٢٤٦	١٠١٩

أولا

لإيجاد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) نحسب التالي:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum \text{ن مج س ص} - \text{ن مج س}^2}{\sum \text{ن مج س}^2 - (\text{ن مج س})^2} &= \text{ا} \\
 \frac{81 \times 90 - 1123 \times 7}{7(90) - 1246 \times 7} &= \\
 0,92 = \frac{571}{662} &=
 \end{aligned}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مج ص}}{\text{ن}} - 1 \times \frac{\text{ن مج س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{90}{7} \times 0,92 - \frac{81}{7}$$

$$= 11,83 - 11,57$$

$$= 0,26$$

معادلة خط انحدار ص على س تصبح

$$\text{ص} = 0,92 \text{ س} + (-0,26)$$

$$= 0,92 \text{ س} - 0,26$$

ويكون قيمة الإنفاق ص عندما يكون الدخل س = 3000 ريال هو

$$\text{ص} = 0,92(30) - 0,26$$

$$= 27,60 - 0,26$$

$$= 27,34$$

أي أن الإنفاق = 27,34 × 100 = 2734 ريالاً

ثانيا

لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص نحسب قيم «ا» و«ب» كما يلي:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum \text{ن مج س ص} - \text{ن مج س}^2}{\sum \text{ن مج ص}^2 - (\text{ن مج ص})^2} &= \text{ا} \\
 \frac{\sum \text{ن مج س ص} - \text{ن مج س}^2}{\sum \text{ن مج ص}^2 - (\text{ن مج ص})^2} &=
 \end{aligned}$$

$$\frac{81 \times 90 - 1123 \times 7}{\sqrt{(81) - 1091 \times 7}} =$$

$$1 \approx 0,998 = \frac{571}{572} =$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجم س}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجم ص}}{\text{ن}}$$

$$\frac{81}{7} \times 1 - \frac{90}{7} =$$

$$11,57 - 12,86 =$$

$$1,29 =$$

معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) تكون كالتالي:

$$\text{س} = \text{ص} + 1,29$$

(٥ - ٦) تمارين

١ - البيانات التالية تمثل الدخل لمجموعة من المزارعين مكونة من ٧ أفراد، وكذلك الإنفاق بآلاف الريالات مقربة لأقرب ألف.

الدخل والإنفاق لسبعة مزارعين

٨	٦	٧	٧	٦	٥	٥	الدخل س
٧	٦	٦	٧	٥	٥	٤	الإنفاق ص

١ (ا) اوجد معامل الارتباط لبيرسون وسييرمان للدخل والإنفاق.

ب) اوجد معادلة خط الانحدار ص على س .

ج) اوجد الإنفاق عندما يصبح الدخل ١٠٠٠٠ ريال.

٢ - الجدول التالي يوضح سعر ثمانية من كتب الإحصاء التطبيقي وعدد صفحات كل منها.

أسعار وعدد صفحات ثمانية كتب في الإحصاء

١٢٠	٩٠	١٠٠	٨٠	٨٠	٦٠	٧٠	٥٠	سعر الكتاب
٣٠٠	٢٣٠	٢٥٠	٢٠٠	٢٠٠	١٨٠	١٨٠	١٥٠	عدد الصفحات

١ (اوجد معامل الارتباط بين سعر الكتاب وعدد صفحاته .

ب) اوجد معادلة خط الانحدار لسعر الكتاب على عدد الصفحات .

٣ - الجدول التالي يمثل عمر الزوج س وعمر الزوجة ص لعينة مكونة من ١٠ أسر .

أعمار الأزواج والزوجات في عشرة أسر

٧٠	٥٥	٥٢	٥١	٢٨	٣٨	٤٠	٢٩	٢٥	٦٠	عمر الزوج س
٦٥	٥٥	٥٠	٣٨	٢٠	٣٠	٤٠	٢١	١٧	٦٠	عمر الزوجة ص

١ (اوجد معامل ارتباط عمر الزوجة ص وعمر الزوج س بطريقتين مختلفتين .

ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم معادلة انحدار س على ص .

ج) اوجد عمر الزوجة عندما يكون عمر الزوج ٨٠ سنة .

٤ - الجدول التالي يمثل تقديرات ثمانية طلاب في مادتي الإحصاء والفيزياء .

تقديرات ثمانية طلاب في الإحصاء والفيزياء

هـ	ب	ب	ج	د	د	هـ	أ	الإحصاء
د	أ	ب	هـ	د	ج	هـ	ب	الفيزياء

اوجد معامل الارتباط بين تقديرات الإحصاء والفيزياء .

٥ - الجدول التالي يمثل تكاليف الدعاية س بمئات الريالات والمبيعات ص بمئات

الريالات .

تكاليف الدعاية وقيمة المبيعات بمئات الريالات

٧	٥	٤	١٠	٩	١٠	٩	تكاليف الدعاية س
١٤٠	١٢٠	١٢٠	١٩٠	١٥٠	١٨٠	١٦٠	المبيعات ص

- (ا) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س ، ص .
 (ب) احسب معامل الارتباط بين تكاليف الدعاية والمبيعات .
 (ج) اوجد معادلة خط انحدار ص على س .
 (د) اوجد المبيعات (ص) عندما تصير الدعاية ١٢٠٠ ريال .

٦ - البيانات التالية تمثل اختبار الذكاء واختبار مادة الإحصاء التي حصلنا عليها لمجموعة مكونة من ٦ طلاب .

درجة الذكاء ودرجة الإحصاء لستة طلاب

٨١	٧٥	٦٠	٩٠	٨٠	٧٠	درجة الذكاء س
٨٠	٧٤	٦٥	٩٥	٨٠	٦٠	درجة الإحصاء ص

- (ا) اوجد معامل الارتباط بين س ، ص بطريقتين مختلفتين .
 (ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س ، وكذلك خط انحدار س على ص .
 (ج) ارسم خطي الانحدار وأوجد نقطة التقاطع .

٧ - الجدول التالي يمثل درجات أعمال السنة س ، ودرجات الامتحان النهائي ص لعينة مكونة من سبعة طلاب .

درجات أعمال السنة والامتحان النهائي لسبعة طلاب

٢٨	٢٥	٣٣	٣٥	٣٠	٢٥	١٥	أعمال السنة س
٤٠	٣٥	٤٥	٤٦	٥٠	٤٠	٤٥	الامتحان النهائي ص

ا) اوجد معامل الارتباط بين المتغيرين (س ، ص) .
 ب) اوجد معادلة خط الإنحدار لدرجة الامتحان النهائي (ص) على درجة أعمال السنة (س) .

ج) اوجد درجة الامتحان النهائي عندما تكون درجة أعمال السنة ٣٩ .

٨ - في تجربة لدراسة تأثير تطعيم مجموعة من الحيوانات ضد مرض معين كانت النتائج كما يلي .

التكرارات المشتركة للتطعيم والإصابة بالمرض

التطعيم / الإصابة	أصيب بالمرض	لم يصب بالمرض
طمم	٥	١٢
لم يطعم	٩	٤

أوضح مدى تأثير التطعيم في الوقاية من هذا المرض .

٩ - كانت نتيجة دراسة ألوان البشرة لمجموعة من الأمهات وأول أبنائهن أو بناتهن كما يلي

التكرارات المشتركة لألوان بشرة الأمهات وأوائل الأطفال

الأمهات / الأبناء / البنات	أبيض	قمحي	أسمر
أبيض	٢٧	٦	٧
قمحي	٨	١٧	٥
أسمر	٥	٧	١٨

بين فيما إذا كان هناك توافق في لون البشرة للطفل الأول وللأم وناقش ذلك .

١٠ - أجري بحث في إحدى عيادات العلاج النفسي عن مدى ارتباط الوضع الاجتماعي ونوعية المرض فكانت النتائج كما يلي :

التكرارات المشتركة بين الأوضاع الاجتماعية والأمراض النفسية

فصام شخصية	اضطرابات شخصية	كآبة	أعصاب	نوع المرض / الوضع الاجتماعي
٨	١٢	٥	٢٥	عالٍ
١٢	١٥	٢٠	٨	متوسط
٩	٨	١١	٧	منخفض

ادرس الاقتران بين الوضع الاجتماعي ، ونوع المرض .

١١- في دراسة لعينة من موظفي جامعة الملك سعود كانت العلاقة بين العمر (للأب) وعدد الأطفال كما يلي :

التكرارات المشتركة لفئات العمر للآباء وأعداد الأطفال

١١-٨	٧-٥	٥-٣	٢-٠	عدد الأطفال / العمر
			١٢	٢٥-٢٠
		٥	٧	٣٠-٢٥
		٨	٥	٣٥-٣٠
	٤	٧		٤٠-٣٥
	٣	٦		٤٥-٤٠
	٩	٤		٥٠-٤٥
٥	٧	٢		٥٥-٥٠
١٥	١٠			٦٠-٥٥

أوجد معامل الارتباط بين عمر الأب وعدد الأطفال .

١٢- لدراسة العلاقة بين الدخل (س) بآلاف الريالات والمصروف (ص) بآلاف الريالات في إحدى المدن - أخذت عينة من الأسر فكانت لدينا النتائج الآتية :

$$\bar{س} = ٥ ، \bar{ص} = ٤ ، \text{مجم س ص} = ٧٥٠ ، \text{مجم س}^2 = ١٤٨٠ ،$$

$$\text{مجم ص}^2 = ٥٠٠ ، \text{مجم ص س} = ٨٠$$

(أ) اوجد معامل الارتباط بين س، ص وبين نوعه .

(ب) اوجد خط انحدار س على ص .

(ج) قَدِّر قيمة الدخل عندما يكون الاستهلاك ٦ آلاف ريال .

١٣- البيانات التالية تمثل تقديرات ثمانية طلاب في مقررین دراسيين .

تقديرات ثمانية طلاب في مقررین

المقرر الأول	أ	ب	د	هـ	جـ	د	هـ	ب
المقرر الثاني	أ	جـ	هـ	د	جـ	د	هـ	ب

اوجد معامل الارتباط لتقديرات هذين المقررین .