كثيرات الحدود

و

التوابع المرتبطة بها

إن كثير الحدود هوتابع لمتحول ما x ويأخذ الشكل العام التالي:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

وهذه التوابع تعتبر هامة جداً في كثير من التطبيقات الرياضية والهندسية.
ولنأخذ على سبيل المثال التابع التالي:

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

لتعريف هذا التابع في ماتلاب وحساب قيمه ضمن مجال قيم صحيحة للمتحول x يتراوح بين 0 و10 نكتب في نافذة أوامر ماتلاب مايلي:

$$x = [0:10];$$
$$f = 3 * x.\hat{}2 + 2 * x - 1;$$

يمكن تعريف هذا التابع بطريقة أخرى كمايلي:

$$a = [3 \quad 2 \quad 1];$$
$$f = polyval[a, x];$$

حيث a هي مصفوفة أمثال كثير الحدود
وx هي مصفوفة قيم المتحول x المذكورة أعلاه.

ضرب كثيرات الحدود

بفرض لدينا كثيري الحدود:

$$f(x) = 3x^2 + 1$$
$$g(x) = 2x^3 + x^2 + 2$$

عند ضرب كثيري الحدود هذين ينتج لدينا كثير حدود جديد هوالتالي:

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x) * g(x) \\ &= (3x^2 + 1) * (2x^3 + 2x^2 + 2) \\ &= 6x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2 \end{aligned}$$

يمكن الحصول على هذه النتائج في ماتلاب كمايلي:

$$f = [3 \quad 0 \quad 1];$$
$$g = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 2];$$
$$s = conv(f, g);$$

حيث أن التابع conv يقوم بضرب مصفوفتي أمثال كثيري الحدود وينتج مصفوفة أمثال لكثير حدود جديد هوناتج الضرب.

قسمة كثيرات الحدود

عند قسمة كثيري حدود نحصل عادة على ناتجين هما حاصل القسمة وباقي القسمة وتكون العلاقة الرابطة بين كل من المقسوم والمقسوم عليه والنواتج هي العلاقة التالية:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + f(x).r(x)$$

وللحصول على هذه النتائج في ماتلاب يستخدم التابع التالي:

$$[q, r] = deconv(g, f)$$

كما في المثال التالي:

$$g = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 2];$$
$$f = [3 \quad 0 \quad 1];$$
$$[q, r] = deconv(g, f);$$

جذور (أصفار) كثيرات الحدود

يعرف جذر كثير الحدود $y=f(x)$ بأنه قيمة المتحول x التي يكون عندها التابع y مساوياً الصفر وبيانياً هوقيم x التي يتقاطع عندها المنحني الممثل للتابع $f(x)$ مع المحور OX
وللحصول على أصفار كثير حدود معطى بالمصفوفة:

$$f = [2 \quad 3 \quad 1]$$

نكتب:

$$r = roots(f);$$

فنحصل على المصفوفة r التي قيمها هي أصفار التابع $f(x)$
يوفر ماتلاب أيضاً تابعاً هاماً هو $f= poly(r)$ حيث يولد هذا التابع كثير حدود $f(x)$ جذوره هي القيم المعطاة بالمصفوفة r

مثال:

الأمر التالي:

$$j = poly([2 \quad -2]);$$

يولد لنا التابع:

$$j(x) = x^2 - 4$$

الذي نعلم أن له الجذرين 2+ و2-

مشق كثير الحدود

يمكن إيجاد المشتقات لكثيرات الحدود المخلة إلى ماتتلاب على شكل مصفوفات أمثال كما في المثال التالي:

$$f1 = [3 \quad 2 \quad 4];$$
$$f2 = [1 \quad 5 \quad -3 \quad 3];$$
$$g1 = polyder(f1);$$
$$g2 = polyder(f1, f2);$$
$$g3 = polyder(polyder(f2));$$

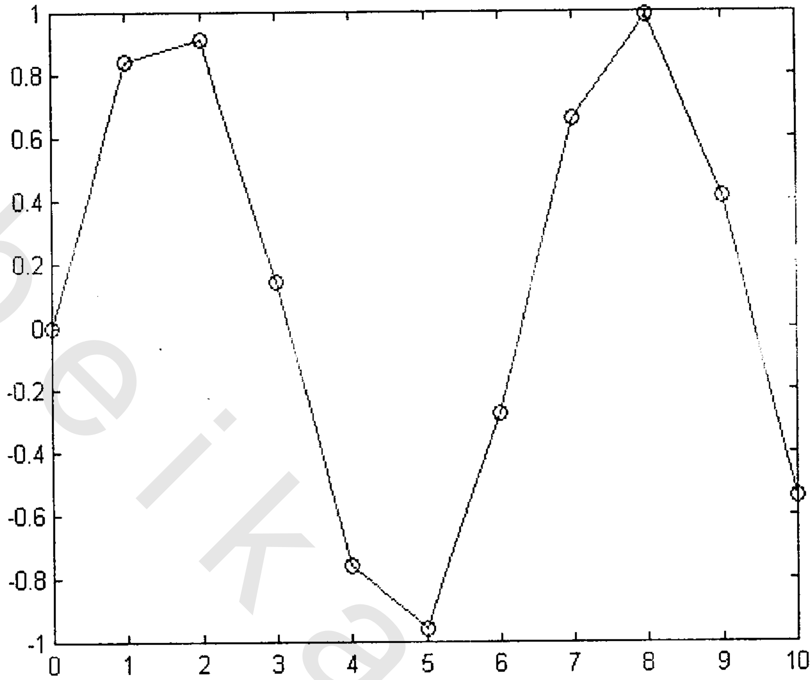
حيث عرفنا في السطر الأول والثاني كلاً من التابعين f1(x) وf2(x) على شكل مصفوفات أمثال ويقوم السطر الثالث بحساب المشتق الأول للتابع f1(x) أما السطر الرابع فيحسب المشتق الأول لكثير الحدود الناتج من ضرب كثيري الحدود f1(x) وf2(x) أما السطر الخامس فيحسب المشتق الثاني للتابع f2(x)

إيجاد القيم البينية

بفرض أننا عرفنا تابعاً في ماتلاب على شكل مصفوفة أمثال ثم حسبنا قيم ذلك التابع عند قيم محددة للمتحول معطاة بمصفوفة ما؛ يمكننا أن نحسب الآن قيماً أخرى للتابع المعطى عند قيم للمتحول تقع ضمن المجال الذي تم إدخاله في البداية وللتوضيح لنأخذ المثال التالي:

```
x = [0:10];
y = sin(x);
x_more = [0:0.25:10];
y_more = interp1(x, y, x_more);
subplot(2,2,1), plot(x, y, 'o', x_more, y_more)
```

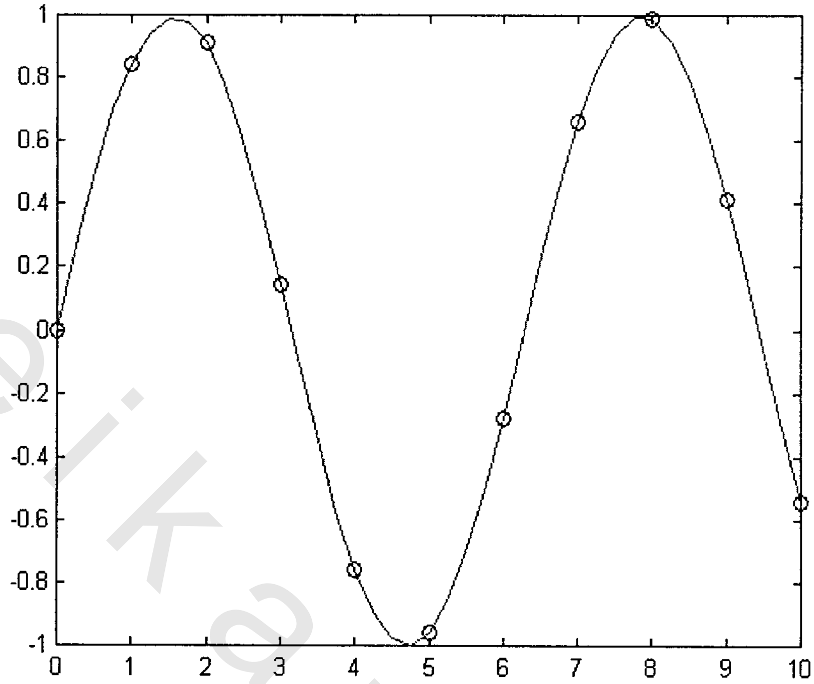
تقوم الكتلة البرمجية السابقة بحساب قيم التابع y في المجال المعطى بين 0 و10 بخطوة مقدارها 1 ثم تحسب من جديد قيم هذا التابع في المجال الجديد بين 0 و10 ولكن هذه المرة بخطوة مقدارها 0.25 وتسند القيم إلى التابع y_more وأخيراً يتم رسم كل من التابعين y وy_more على نفس الشكل البياني وتظهر النتيجة بالشكل التالي:



حيث تظهر قيم التابع y على شكل دوائر بينما تظهر قيم التابع y_more على شكل خطوط مستقيمة تصل بين تلك الدوائر.
يمكن بشكل آخر أن نحسب قيم التابع y_more بتقريبات خط ناعم يصل بين تلك القيم المحسوبة للتابع y وذلك باستخدام الخاصة 'spline' التي تدخل في تعليمة interp1 كمايلي:

$$y\_more = \text{int}\, erp1(x, y, x\_more, 'spline');$$

وفي هذه الحالة سوف تظهر نتيجة الرسم بالشكل التالي:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10