الفصل الثامن

المعادلات التفاضلية الخطية

١ – تعاريف : المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي معادلة تفاضلية من الشكل :

$$A\,\frac{d^n y}{d x^n} + A_1\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A^{n-1}\,\frac{dy}{dx} + A_n y = B(x) \qquad (1)$$

حيث $A_1 , A_2 , \dots A_n$ توابع لـ x تدعى بأمثال المعادلة ونسمي $B(x)$ بالطرف الثاني.
إذا كانت الأمثال ثابتة وغير تابعة لـ x قلنا إن المعادلة ذات امثال ثابتة و اذا كان $B(x) \equiv o$ قلنا إن المعادلة الخطية متجانسة أو بدون طرف ثاني .

٢ – خواص المعادلة التفاضلية الخطية :

آ – إن الحل العام لمعادلة تفاضلية تامة يساوي مجموع حل خاص للمعادلة المفروضة مع الحل العام للمعادلة التي تنتج عن هذه المعادلة بحذف طرفها الثاني .

ب – إذا كان z_1 ، $z_2 , \dots , z_p$ حلولاً للمعادلة (١) بدون طرف ثان وإذا كان : $c_1 , c_2 , \dots , c_p$ ثوابت اختيارية فان التابع : $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_p z_p$ هو حل للمعادلة المذكورة .

حـ – إذا عرفنا حلاً خاصاً لمعادلة خطية متجانسة من المرتبة n ولنرمز له بـ Z فان تغيير التابع حسب العلاقة $y = Z u$ يقودنا الى معادلة تفاضلية من المرتبة $n - 1$ بالنسبة للتابع u وبذلك نكون قد خفضنا مرتبة المعادلة المفروضة مرتبة واحدة .

٢ – مجموعة الحلول الاساسية : إذا كانت y_1 ، $y_2 , \dots , y_n$ مجموعة حلول للمعادلة الخطية المتجانسة ذات الأمثال المتحولة :

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\, y = o \qquad (2)$$

وكانت هذه الحلول مستقلة عن بعضها خطياً ، فان الحل العام للمعادلة المتجانسة المفروضة هو :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdot\cdot + c_n y_n$$

حيث $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ n ثابتاً اختيارياً ،

المعادلة التامة ـ ايجاد حل خاص لها :طريقة تحويل الثوابت الاختيارية :

لتكن المعادلة : $(3) \quad y^n + a_1(x) y^{n-1} + \ldots + a_n(x) y = b(x)$

ولنفرض ان الحل العام لهذه المعادلة بدون طرف ثان هو :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

لإيجاد حل للمعادلة (3) نطبق طريقة تحويل الثوابت الإختيارية التي تقودنا الى حل جملة المعادلات الخطية التالية، بالنسبة للمشتقات $c_1', c_2', \ldots, c_n'$:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n \equiv 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' \equiv 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} \equiv 0$$

٥ ـ إذا كان $b(x)$ الطرف الثاني للمعادلة (٢) مؤلف من مجموع توابع من الشكل: $b(x) = \sum b_m(x)$ وإذا كان Y_m حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية الناتجة عن المادلة (٣) بابدال طرفها الثاني بـ $b_m(x)$ فان المجموع $\sum Y_m$ هو حل خاص للمعادلة التامة (٣) .

٦ ـ **المعادلة الخطية ذات الأمثال الثابتة** : إذا كانت امثال المعادلة الخطية ثابتة فانها تقبل حلولاً خاصة من الشكل $y = e^{rx}$ حيث r عدد ثابت .

إن المعادلة : $\quad f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (4)$

التي تنتج عن ابدال y ومشتقاته الداخلة في المعادلة الخطية بـ e^{rx} ومشتقاته المقابلة تسمى بالمعادلة المميزة . يكون لها في الحالة العامة ، n جذراً مختلفة $r_1, r_2, \ldots, r_n$ وينتج ، عن هذه الجذور حلول للمعادلة الخطية هي $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$. إن هذه الحلول مستقلة عن بعضها خطياً ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هي :

$$y = \sum_1^n c_k e^{r_k x}$$

حيث c_k ثوابت اختيارية .

٧ ـ **الحالة التي يكون فيها للمعادلة المميزة جذور مضاعفة** : لنفرض أن للمعادلة المميزة (٤) جذراً مضاعفاً r' من المرتبة q فان حل المعادلة التفاضلية الخطية المقابل لهذا الجذر

هو : $P(x)\,e^{r'x}$ حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة $q-1$ بالنسبة لـ x امثاله اختيارية .

مسائل وتمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية :

٣٣٨ $y^{(3)} + 3y'' - y' - 3y = 3x^2 + 10\sin 3x$

الحل : إن هذه المعادلة خطية ذات امثال ثابتة نحلها اولا بدون طرف ثان فنشكل معادلتها المميزة :

$$\varrho^3 + 3\varrho^2 - \varrho - 3 = 0$$

ونلاحظ أن لهذه المعادلة ثلاثة جذور حقيقية هي :

$$\varrho_1 = 1 \quad , \quad \varrho_2 = -1 \quad , \quad \varrho_3 = -3$$

ويكون الحل العام للمعادلة بدون طرف ثان هو :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} \tag{1}$$

لايجاد حل خاص للمعادلة التامة (١) نحول الثوابت الاختيارية c_1, c_2, c_3 فنحصل على جملة المعادلات الخطية التي تعطينا المشتقات c_1', c_2', c_3' :

$$(2)\quad \begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} + c_3' e^{-3x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} - 3c_3' e^{-3x} = 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^{-x} + 9c_3' e^{-3x} = 3x^2 + 10\sin 3x \end{cases}$$

إذا جمعنا المعادلة الثانية الى الاولى وجمعناها أيضاً الى المعادلة الثالثة ، نحصل على جملة المعادلتين :

$$(3)\quad \begin{cases} 2c_1' e^x - 2c_2' e^{-3x} = 0 \\ 2c_1' e^x + 6c_3' e^{-3x} = 3x^2 + 10\sin 3x \end{cases}$$

إذا طرحنا المعادلة الاولى من الثانية فاننا نجد :

$$8c_3' = e^{3x}(3x^2 + 10\sin 3x) \quad \text{ومنه} \quad 8c_3' e^{-3x} = 3x^2 + 10\sin 3x$$

$$8c_3 = \int 3x^2 e^{3x}\,dx + 10\int e^{3x}\sin 3x\,dx$$

ونجد بعد اجراء التكامل الموجود في الطرف الأيمن :

$$8c_3 = 3e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) + \frac{10e^{3x}}{6}(\sin 3x - \cos 3x)$$

لم نضع ثابتاً اختيارياً لأننا نفتش عن حل خاص .

ثم نستخرج من المعادلتين (٣) قيمة c_1' :

$$8c_1' e^{x} = 3x^2 + 10\sin 3x$$

$$8c_1 = 3\int x^2 e^{-x}\,dx + 10\int e^{-x}\sin 3x\,dx$$

$$8c_1 = -3e^{-x}(x^2 + 2x + 2) - e^{-x}(3\cos 3x + \sin 3x)$$

ثم نستخرج من المعادلة الاولى من جملة المعادلات (٢) c_2' :

$$8c_2' = -6x^2 e^{x} - 20e^{x}\sin 3x$$

$$8c_2 = -6e^{x}(x^2 - 2x + 2) - 2e^{x}(\sin 3x - 3\cos 3x)$$

إذا حملنا قيم التوابع c_3 , c_2 , c_1 في العلاقة (١) فاننا نجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثاني :

$$y_1 = -\frac{1}{9}(9x^2 - 6x + 20) + \frac{1}{6}(\cos 3x - \sin 3x)$$

وإذا اضفنا هذا التابع الى الحل العام للمعادلة بدون طرف ثان فاننا نجد الحل العام للمعادلة التامة :

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} - \frac{1}{9}(9x^2 - 6x + 20) + \frac{1}{6}(\cos 3x - \sin 3x)$$

- ٣٣٩ $y^{(3)} - y'' + 4y' - 4y = \cos 2x$

الحل : إن المعادلة المميزة المعادلة بدون طرف ثان هي :

$$\varrho^3 - \varrho^2 + 4\varrho - 4 = (\varrho - 1)(\varrho^2 + 4) = (\varrho - 1)(\varrho + 2i)(\varrho - 2i) = 0$$

وجذورها $\varrho_1 = 1 \quad , \quad \varrho_2 = 2i \quad , \quad \varrho_3 = -2i$

يقابل هذه الجذور الثلاثة ثلاثة حلول خاصة المعـادلة التفاضلية بلا طرف ثان هي :

$$e^x \quad , \quad e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x \quad , \quad e^{-2ix} = \cos 2x - i \sin 2x$$

ينتج عن الحلين الاخيرين المركبين الحلين الحقيقيين التاليين :

$$\cos 2x \quad , \quad \sin 2x$$

ويكون عندها الحل العام للمعادلة بلا طرف ثاني هو :

$$(1) \qquad y_1 = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

لايجاد حل خاص للمعادلة التامة نطبق طريقة تحويل الثوابت الاختيـارية التي تقودنا الى المعادلات الخطية الجبرية التالية :

$$c_1' e^x + c_2' \cos 2x + c_3' \sin 2x = 0$$
$$c_1' e^x - 2c_2' \sin 2x + 2c_3' \cos 2x = 0$$
$$c_1' e^x - 4c_2' \cos 2x - 4c_3' \sin 2x = \cos 2x$$

بحل جملة المعادلات هذه نجد :

$$c_1' = \frac{1}{5} e^{-x} \cos 2x \; , \; c_2' = \frac{1}{10} \cos 2x \sin 2x - \frac{1}{5} \cos^2 2x$$

$$c_3' = -\frac{1}{5} \cos 2x \sin 2x - \frac{1}{10} \cos^2 x$$

وبعد اجراء عمليات التكامل نجد :

$$c_1 = \frac{e^{-x}}{25}(2 \sin 2x - \cos 2x) \; , \; c_2 = -\frac{1}{40} \sin 4x - \frac{1}{80} \cos 4x - \frac{x}{10}$$

$$v_3 = \frac{1}{40} \cos 4x - \frac{1}{80} \sin 4x - \frac{x}{20}$$

إذا حملنا هـذه القيم في التركيب (١) فاننا نجـد الحل الخاص للمعادلة التامـة :

$$y = \frac{11}{200} \sin 2x - \frac{21}{400} \cos 2x - \frac{x}{10} \cos 2x - \frac{x}{20} \sin 2x$$

اذا ادخلنا الحدين الاول والثاني من هذا التابع ضمن الحدين الاخيرين من الحل العام للمعادلة المتجانسة (١) ،لأنهما من نفس النوع ، فاننا نحصل على الحل العام للمعادلة التامة

$$y = c_1 e^x + \left(c_2 - \frac{x}{10} \right) \cos 2x + \left(c_3 - \frac{x}{20} \right) \sin 2x$$

٣٤٠ . — $y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 5 \sin 2x + 12 x e^{2x}$ (1)

الحل : لنكتب المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة :

$$\varrho^3 + 2\varrho^2 - \varrho - 2 = (\varrho + 2)(\varrho - 1)(\varrho + 1) = 0$$

إن حلول هذه المعادلة هي $\varrho_1 = -2$, $\varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = -1$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{-2x} \qquad (2)$$

لايجاد الحل الخاص للمعادلة التامة يمكن ان نطبق طريقة الامثـال غير المعينة ونفتش عن حل خاص من الشكل :

$$A \sin 2x + B \cos 2x$$

للمعادلة

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 5 \sin 2x \qquad (3)$$

وعن حل خاص من الشكل : $(Cx + D)e^{2x}$ للمعادلة

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 12 x e^{2x} \qquad (4)$$

ويكون عندها بمجموع هذين الحلين حلاً خاصاً للمعادلة المفروضة :

لنكتب :

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x$$
$$y_2' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$
$$y_2'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$
$$y^{(3)} = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٣) فاننا نجد :

$$10(B - A)\sin 2x - 10(B + A)\cos 2x \equiv 5 \sin 2x$$

إذا طابقنا بين الطرفين فاننا نجد على التوالي :

$$A = -\frac{1}{4}\ ,\ B = \frac{1}{4}\ ,\ 20B = 5\ ,\ A = -B\ ,\ A + B = o\ ،$$

ويكون :

$$y_2 = \frac{1}{4}(\cos 2x - \sin 2x)$$

لنجري الامر نفسه من اجل الحل الخاص الثاني :

$$y_3 = (Cx + D)e^{2x}$$
$$y_3' = Ce^{2x} + 2(Cx + D)e^{2x}$$
$$y_3'' = 4cC^{2x} + 4(Cx + D)c^{2x}$$
$$y_3^{(3)} = 12Ce^{2x} + 8(Cx + D)e^{2x}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٤) فاننا نجد :

$$(19C + 12D)e^{2x} + 12Cxe^{2x} \equiv 12xe^{2x}$$

ونجد بعدالمطابقة بين طرفي هذه العلاقة أن $C = 1$ ، $D = -\frac{19}{12}$ ويكون الحل الخاص الموافق هو :

$$y_3 = \frac{e^{2x}}{12}(12x - 19)$$

إن المجموع :

$$y_2 + y_3 = \frac{1}{4}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{e^{2x}}{12}(12x - 19)$$

هو حل خاص للمعادلة التامة ويكون حلها العام :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} (\cos 2x - \sin 2x) + \frac{e^{2x}}{12} (12x - 19).$$

٣٤١ – $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 5 e^x \sin x$.

الحل : لنكتب المعادلة المميزة :

$$\varrho^3 + 3\varrho^2 + 3\varrho + 1 = (\varrho + 1)^3$$

إن لهذه المعادلة ثلاثة جذور متساوية يساوي كل منها (– ١) فينتج عن ذلك ثلاثة حلول خاصة للمعادلة التفاضلية المتجانسة هي $e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}$ ويكون حلها العام :

$$y_1 = e^{-x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$$

يمكننا من أجل ايجاد الحل الخاص للمعادلة التامة ان نطبق طريقة تحويل الثوابت الاختيارية كما يمكننا ان نفتش عن حل خاص من الشكل $y_2 = e^x (A \cos x + B \sin x)$ ونطبق طريقة الامثال غير المعينة فنجد :

$A = \frac{-11}{25}$ ، $B = \frac{2}{25}$ ويكون :

$$y_2 = \frac{e^x}{25} (2 \sin x - 11 \cos x)$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = e^{-x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + \frac{e^x}{25} (2 \sin x - 11 \cos x)$$

٣٤٢ – حل المعادلة التفاضلية التالية اذا علمت انها تقبل x كحل خاص لها :

$$2y'' + 5y' + 2y = 5 + 2x$$

الحل : إن من السهل جداً ان نتأكد من ان هـذه المعادلة تقبل التابـع $y = x$ حلّاً خاصاً لها ولايجاد الحل العام نجري تغيير التابـع المعرف بالعلاقـة $y = x + z$ فتأخذ الشكل :

$$2 z'' + \quad z' + 2 z = 0$$

وبذلك قد اصبحت معادلة خطية طرفها الثاني مطابق للصفر .

إن الحل العام لهذه المعادلة هو : $z = A e^{-2x} + B e^{-\frac{1}{2}x}$ فيكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y = x + Ae^{-2x} + B e^{-\frac{1}{2}x}$$

٣ ع ٫ – حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$x^3 y^{(3)} + 3 x^2 y'' + x y' = 24 x^2$$

الحل : إن هذه المعادلة تدعى معادلة كوشي او اولر شكلها العام :

$$A_0 x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} x y' + A_n y = f(x)$$

حيث $A_0 , A_1 , \dots , A_n$ اعداد ثابتة .

نعيد هذه المعادلة الى معادلة خطية ذات امثال ثابتة فيما إذا اجرينـا تغير المتحول واتخذنا متحولاً جديداً t معرفاً بالعلاقة : $x = e^t$ ويكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}\right)$$

إذا حملنا هذه القيم في المعـادلة المفروضة انقلبت الى معـادلة خطية ذات امثال ثابتة :

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 24 e^{2t}$$

ويكون : $y'' = 24\int e^{2t}\,dt = 12\,e^{2t} + c_1$ ، $y' = \int (12\,e^{2t} + c_1)\,dt$

$y' = 6\,e^{2t} + c_1 t + c_2$ ، $y = \int (6\,e^{2t} + c_1 t + c_2)\,dt$

$$y = 3\,e^{2t} + \tfrac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3$$

وإذا عدنا إلى المتحول x نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = 3\,x^2 + \tfrac{1}{2}c_1 (\log x)^2 + c_2 \log x + c_3$$

٣٤٤ - حل المعادلة التفاضلية :

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)\,y' + y = 4\cos\log(1+x)$$

الحل : إن هذه المعادلة تدعى معادلة لجاندر Legendre شكلها العام :

$$A_0 (a x + b)^n y^{(n)} + A_1 (a x + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots +$$
$$A_{n-1} (a x + b)\,y' + A_n y = f(x)$$

حيث $A_0 , A_1 , \dots A_n$ أعداد ثابتة .

تنقلب هذه المعادلة الى معادلة خطية ذات امثـــال ثابتة إذا غير المتحول حسب العلاقة $a x + b = e^t$ فيكون :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{a}{a x + b}\,\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{a^2}{(a x + b)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

وهكذا . إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$(1+x)^2 \frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + (1+x)\frac{1}{1+x}\,\frac{dy}{dt} + y = 4\cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 4\cos t$$

إن هذه المعادلة خطية من المرتبة الثانية حلها العام :

$$y = A\cos(t - B) + 2\,t\sin t$$

وإذا عدنا الى المتحول الاصلي نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = A\cos\left\{\log(1+x) - B\right\} + 2\log(1+x)\sin\log(1+x)$$

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من النتائج المرافقة :

٣٤٥ - $y^{(3)} + y = x^3 + x$

ج : $y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + c_3 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - 6 + x + x^3$

٣٤٦ - $y^{(3)} - y'' - 4y' + 4y = e^x + e^{2x} + e^{3x}$

ج : $y = e^x\left(c_1 - \frac{x}{3}\right) + e^{2x}\left(c_2 + \frac{x}{4}\right) + c_3 e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{10}$

٣٤٧ - $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 + x$

ج : $y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x - 4 + x + x^2$

٣٤٨ - $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 8e^{2x}$

ج : $y = e^{2x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{x^3}{4}\right) + e^{-2x}(c_3 + c_4 x)$

٣٤٩ - $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 20e^{2x}\cos 3x$

ج : $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x -$
$\frac{e^{2x}}{30}(\sin 3x + 3\cos 3x)$

٣٥٠ - $y^{(4)} + 2y'' = 2x + 25e^{-x}\sin 2x$

ج : $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x\sqrt{2} + c_4 \sin x\sqrt{2}$
$+ \frac{x^3}{6} - \frac{e^{-x}}{17}(13\sin 2x + 16\cos 2x)$

٣٥١ - $y^{(4)} + 4y^{(3)} = 4\cos 4x$

ج : $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-4x} + \frac{1}{128}(\cos 4x - \sin 4x)$

برهن ان كلا من المعادلات التفاضلية التالية تقبل الحل الخاص الموافق ثم اوجد حلها العام :

٣٥٢ - $y'' - 2y' + 2y = e^x \quad , \quad e^x$

ج : $y = e^x(1 + A\cos x + B\sin x)$

٣٥٣ - $y'' - 13y' + 12y = 36 \quad , \quad 3$

ج : $y = 3 + Ae^x + Be^{12x}$

٣٥٤ - $y'' + 4y = -10\sin 3x \quad , \quad 2\sin 3x$

ج : $y = 2\sin 3x + A\cos 2x + B\sin 2x$

عين قيمة الثوابت التي يحويها التابع الموافق لكل من المعادلات التالية ليكون التابع المذكور حلاً خاصاً لها ثم اوجد الحل العام لكل منها :

٣٥٥ - $y'' + 13y' + 42y = 112e^x \quad , \quad ae^{bx}$

ج : $a = 2 \quad , \quad b = 1$

٣٥٦ - $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 60e^{-t} \quad , \quad ae^{bt}$

ج : $a = 6 \quad , \quad b = -1$

٣٥٧ - $y'' + y = 12\sin 2x \quad , \quad a\sin px$

ج : $a = -4 \quad , \quad p = 2$

٣٥٨ - $y'' + 4y' + 3y = 8\cos x - 6\sin x$

$, \quad a\sin px + b\cos px$

ج : $a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad p = 1$

حل المعادلات التـالية بعد تحويلها الى معادلات خطية ذات امثال ثابتة :

۳٥۹ – $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^3$

ج : $y = Ax + Bx^2 + 2x^3$

۳٦۰ – $x^2 y'' + 9xy' + 25y = 50$

ج : $y = 2 + Ax^{-4}\cos(3\log x) + Bx^{-4}\sin(3\log x)$

۳٦۱ – $x^3 y^{(3)} + 3x^2 y'' + xy' + 8y = 5\cos(\log x)$

ج : $y = 8\cos(\log x) - \sin(\log x) + Ax^{-2} +$
$Bx\cos(\sqrt{3}\log x - a)$

۳٦۲ – $x^4 y^{(4)} + 2x^3 y^{(3)} + x^2 y'' - xy' + y = \log x$

ج : $y = 4 + \log x + Ax + Bx\log x + Cx(\log x)^2 + Dx(\log x)^3$

۳٦۳ – $(1+2x)^2 y'' - 6(1+2x)y' + 16y = 8(1+2x)^2$

ج : $y = (1+2x)^2[\{\log(1+2x)\}^2 + A\log(1+x) + B]$

۳٦٤ $x^3 y^{(3)} + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

ج : $y = c_1 x + c_2 x\log x + \frac{c_3}{x^2}$

۳٦٥ – $x^3 y^{(3)} + 2xy' - 2y = x^2\log x + 3x$

ج – $y = c_1 x + x(c^2\cos\log x + c_3\sin\log x) + \frac{1}{2}x^2(\log x - 2)$
$+ 3x\log x$

۳٦٦ – $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$

ج : $y = (x+2)[c_1 + c_2\log(x+2) + \frac{1}{2}\log^2(x+2)] - 2$

۳٦۷ – $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$

ج : $y = c_1(3x+2)^2 + c_2(3x+2)^{-2} +$
$\frac{1}{108}[(3x+2)\log(3x+2) + 1]$

$$y'' + y = tg\, x$$ – ٣٦٨

ج : $y = -\cos x \log g \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + A \cos x + B \sin x$

$$y'' - y = \frac{2\, e^x}{e^x - 1}$$ – ٣٦٩

ج : $y = 1 + x\, e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \log (1 - e^{-x}) + c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$ – ٣٧٠

ج : $y = x \sin x + \cos x \log \cos x + A \cos x + B \sin x$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$ – ٣٧١

ج : $y = A \cos x + B \sin x - \sqrt{\cos 2x}$

$$y'' - 6x' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$$ – ٣٧٢

ج : $y = e^{3x} (A + Bx) + \frac{1}{x}$