الفصل السابع

معادلات المراتب العليا — خفض المرتبة

١ – المعادلة من المرتبة n :

هي معادلة تحوي المتحول والتابع ومشتقاته المتتالية حتى المرتبة n . إن عدد المعادلات ذات المراتب العليا التي يمكن حلها قليل جداً وسنورد بعضاً منها كالمعادلة :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \qquad (1)$$

التي يمكن حلها بواسطة n عملية تكامل متتالية ونصل إلى ناتج من الشكل :

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \frac{c_0(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_1(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1}$$

حيث (c_0 ، c_1 ، … c_{n-1}) n ثابتاً اختيارياً .

٢ – المعادلة لا تحوي إلا المشتق من المرتبة n وغير محلولة بالنسبة لهذا المشتق :

$$f\left(x, \frac{d^n y}{d x^n}\right) = 0 \qquad (2)$$

إذا كانت هذه المعادلة ممكنة الحل بالنسبة للمشتق $\frac{d^n y}{d x^n}$ فإنها تعود إلى الحالة السابقة وقد يحدث ان يكون مثل هذا العمل مستحيلاً من الوجهة العملية فنعمد إلى تمثيل x و $\frac{d^n y}{d x^n}$ بشكل وسيطي وبدساتير من الشكل:

$$x = g(t) \; ; \; \frac{d^n y}{d x^n} = h(t)$$

ونجد على التوالي :

$$d^n y = h(t)\, d x^n$$

$$y^{(n-1)} = \int h(t)\, g'(t)\, dt + c_1$$

....

$$y^{(p-1)} = \int y^{(p)}\, g'(t)\, dt$$

حتى نصل إلى التابع y بعد n عملية تكامل متتالية .

٣ ـ اذا كانت المعادلة (٢) محلولة بالنسبة لـ x فيمكننا ان نعتبر $h(t) = t$ ونكون امام التكامل :

$$y^{(n-1)} = \int_{t_0}^{t} g'(t)\, t\, dt$$

بعد تطبيق طريقة التكامل بالتجزئة نصل الى التكامل :

$$\int_{t_0}^{t} g(t)\, dt$$

٣ ـ حالات خفض المرتبة :

يمكن خفض مرتبة المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا واعادتها الى معادلات من مراتب ادنى في حالات نذكر فيما يلي أهمها :

آ ـ المعادلة التفاضلية لا تحوي التابع المجهول ، فهي من الشكل :

$$f\left(x , \frac{d^k y}{d x^k} , \frac{d^{k+1} y}{d x^{k+1}} , \dots , \frac{d^n y}{d x^n} \right) = 0$$

نعيدهذه المعادلة الى معادلة من المرتبة $n - k$ وذلك بأن نأخذ تابعاً جديداً معرفاً بالعلاقة $z = y^{(k)}$ فإذا تمكنا من حل المعادلة الناتجة فاننا نحصل على y بواسطة تكاملات عددها k .

ب ـ المعادلة التفاضلية لا تحوي المتحول : فهي من الشكل :

$$f[\, y , y' , \dots , y^{(n)} \,] = 0$$

يمكن خفض مرتبتها بأخذ y متحولاً جديداً و x تابعاً واجراء الحسابات بالشكل التالي:
إن المعادلة الناتجة عن هذا التحويل سوف لن تحوي x بل $\frac{dx}{dy}$. وإذا اخذنا $\frac{dx}{dy}$ تابعا جديداً فان المعادلة المفروضة تنقلب الى معادلة من المرتبة $n - 1$. يمكن اجراء هذين التحويلين معاً وذلك بأن نأخذ $p = y'$ كتابع مجهول ونتخذ y متحولاً :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p \frac{dp}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(p \frac{dp}{dy}\right) p = p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$$

وهكذا نلاحظ بصورة عامة ان المشتق من المرتبة r وهو $\frac{d^r y}{d x^r}$ يمكن حسابه بدلالة y والمشتقات المتتالية الأول لـ y والتي عددها $r - 1$ ونحصل بالنتيجة على معادلة من المرتبة $n - 1$.

حـ ـ المعادلة متجانسة بالنسبة لـ $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

إذا كانت m هي درجة التجانس فانه يمكن كتابة المعادلة المفروضة :

$$f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

بالشكل

$$y^n f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

واذا كان y_1 حلاً خاصلاً للمعادلة المفروضة فان λy_1 هو حل مهما كانت قيمة λ تخفض مرتبه هذه المعادلة بواحد اذا اتخذنا تابعاً جديداً z معرفاً بالعلاقة :

$$y = e^{\int z dx}$$

ونجد على التوالي :

$$y' = z e^{\int z dx} \qquad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}, \ldots$$

وهكذا ...

اذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة حصلنا على معادلة أخفض بمرتبة واحدة من المعادلة المفروضة.

د ـ المعادلة متجانسة بالنسبة لـ x ، y ، dx ، dy ، d^2y ، ... ، $d^n y$.

إذا وقع هذا الأمر في معادلة تفاضلية فانها لا تتغير عندما نبدل فيها x بـ cx و y بـ cy حيث c ثابت كيفي .

اذا اجرينا تغيير المتحولات المعرف بالعلاقتين :

$$z = \frac{y}{x} \quad , \quad t = \log x$$

حيث نعتبر t متحولاً مستقلاً و z تابعاً له فاننا نصل الى معادلة تفاضليـــة لا تحوي t ويمكن عندها خفض مرتبتها .

تمارين محلولة

٢٨٠ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(y^{(3)})^2 - 3\, y''\, y^{(4)} = o \qquad (1)$$

الحل : يلاحظ ان هــذه المعادلة لا تحوي y ولا y′ واخفض المشتقات التي تحويها مرتبة هي الثانية لذا نفرض $u = y''$ فتأخذ عندهـا المعادلة الشكل التالي :

$$5\, u'^2 - 3\, u\, u'' = o \qquad (2)$$

إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول x لذا نتخذ u متحولاً جديداً فنفرض $p = u'$ وتأخذ المعادلة الشكل :

$$5\, p^2 - 3\, u\, p\, \frac{dp}{du} = o$$

بعد ان نلاحظ ان : $u'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{du} \cdot \frac{du}{dx} = p\, \frac{dp}{dx}$

إن لهذه المعادلة حلان إما $p = o$ ، $u' = o$ $u = c$ وهو حل لا يوافق المعادلة المفروضة إلا اذا اخذنا $c = o$

وإما ان يكون : $5\, p \quad u\, \frac{dp}{du} = o$

او $\frac{dp}{p} = \frac{iu}{3u} \quad , \quad p = \alpha\, u^{\frac{5}{3}}$

إذا عدنا الى متحولات المعادلة (٢) فاننا نجد

$$u' = \frac{du}{dx} = \alpha\, u^{\frac{5}{3}} \quad , \quad dx = \frac{1}{\alpha} u^{-\frac{5}{3}} du$$

$$x = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{\alpha} u^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad u = b\,(x + a)^{-\frac{3}{2}}$$

واذا عدنا الى متحولات المعادلة (١) نجد :

$$u = y'' = b\,(x + a)^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad y' = -2\,b\,(x + a)^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$y = -4\,b\,(x + a)^{\frac{1}{2}} + c\,x + d$$

وهو الحل العام المعادلة المفروضة .

٢٨١ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'' = y'^2 - 2\,x\,y' + 2\,x^2$$

الحل : ان هذه المعادلة لا تحوي التابع y فلنغير التابع ولنعتبر $y' = p$ تابعاً جديداً فتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$x^2 p' = p^2 - 2\,x\,p + 2\,x^2 \qquad (1)$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية ونحلها بأن نفرض :

$$p = v\,x \quad , \quad p' = v'\,x + v$$

فتأخذ عندها الشكل التالي :

$$x^2 (v'\,x + v) = v^2 x^2 - 2\,x^2\,v + 2\,x^2$$

$$x\,v' = v^2 - 3\,v + 2$$

وهي معادلة بيرنوي حلها العام هو :

$$c\,x = \frac{v-2}{v-1} \quad \text{او} \quad v = \frac{c\,x - 2}{c\,x - 1}$$

ونستنتج :

$$dy = v\,x\,dx = \frac{x\,(c\,x - 2)}{c\,x - 1}\,dx = x - \frac{1}{c}\left[1 + \frac{1}{c\,x - 1}\right] dx$$

ونجد أخيراً الحل العام لهذه المعادلة :

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2} \log | c x - 1 | + c_1$$

٢٨٢ – حل المعادلة التفاضلية :

$$2 x^2 y' y'' - x y'' + y' = o \qquad (1)$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي التابع y لذا نفرض $y' = p$ فتأخذ المعادلة (١) الشكل :

$$2 x^2 p p' - x p' + p = o$$

$$\left(2 p - \frac{1}{x} \right) dp + \frac{p}{x^2} dx = o$$

إن هذه المعادلة تامة نحلها بطرقها المعتادة فنجد :

$$\frac{p}{x} + c = o$$

$$x = \frac{p}{p^2 + c} \qquad (2)$$

أما التابع y فانه يعطى بالتكامل : $y = \int p \, dx$

اذا كاملنا بالتجزئة فاننا نجد :

$$y = \int p \, dx = px - \int x \, dp = px - \int \frac{p \, dp}{p^2 + c}$$

$$y = \frac{p^2}{p^2 + c} - \frac{1}{2} \log (p^2 + c) + c_1 \qquad (3)$$

إن العلاقتين (٢ ، ٣) تمثلان الحل الوسيطي للمعادلة المفروضة .

٢٨٢ – حل المعادلة : $y^{(3)} \sin^4 x = \sin 2 x$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل : $y^{(3)} = \dfrac{2 \cos x}{\sin^3 x}$

بعد أن اختصرنا على $\sin x$ باعتبار أن هذا التابع لا يطابق الصفر .

نحل هذه المعادلة حسب المراحل التالية :

$$y'' = \int \frac{2\cos x\, dx}{\sin^3 x} = c_1 - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y' = c_1 x - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = c_1 x + c_2 + \operatorname{cotg} x$$

$$y = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + \log \sin x$$

٢٨٣ – حل المعادلة : $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول x فلنتخذ متحولاً جديداً هو التابع نفسه وتابعاً جديداً هو $p = y'$ فيكون

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

وبذلك تأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y(y-1)p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

اما أن يكون $y' = p = 0$ اي $y = c$

أو أن يكون

$$y(y-1)\frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dy}{y(y-1)} = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة هو $cp = \dfrac{y}{y-1}$ ونجد بعد ذلك :

$$x = \int \frac{dy}{p} = c\int \frac{y-1}{y}\, dy = cy - \log|y| + c_1$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

٢٨٤ – حل المعادلة : $2y'' - y'^2 + 4 = 0$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول x لذا نفرض $\frac{dy}{dx} = p$ ،

$\frac{d^2 y}{dx^2} = p'$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$2\frac{dp}{dx} = p^2 - 4 \quad , \quad \frac{2\,dp}{p^2 - 4} = dx$$

ومنه

$$c_1 e^{2x} = \frac{p-2}{p+2} \quad , \quad p = \frac{2(1 + c_1 e^{2x})}{1 - c_1 e^{2x}}$$

ونجد بعد ذلك : $y = 2x - 2\log(1 - c_1 e^{2x}) + c_2$

٢٨٥ – حل المعادلة التفاضلية :

$$y^{(4)} \cdot y^{(3)} = 1$$

الحل : ان هذه المعادلة لا تحوي التابع y ولا المشتقين y' , y'' لذا نفرض $q = y^{(3)}$ فتأخذ المعادلة الشكل :

$$q\frac{dq}{dx} = 1$$

ومنه

$$q^2 = 2x + c_1$$

ويكون

$$q = y^{(3)} = \pm (2x + c_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \pm \frac{1}{3}(2x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2$$

$$y' = \pm \frac{1}{15}(2x + c_1)^{\frac{5}{2}} + c_2 x + c_3$$

$$y = \pm \frac{1}{105}(2x + c_1)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

٢٨٦ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(y^{(3)})^2 + x y^{(3)} + y'' = 0$$

الحل : نفرض $q = y''$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$(q')^2 + x q' - q = o$$

او

$$q = x q' + q'^2$$

وهي معادلة كليرو . اذا طبقنا القواعد المعروفة لحلها نجد :

$$q = c x + c^2$$

ومنه

$$y'' = q = c x + c^2$$

$$y' = \frac{1}{2} c x^2 + c^2 x^2 + c_1$$

$$y = \frac{c}{6} x^3 + \frac{1}{2} c^2 x + c_1 x + c_2$$

٢٨٧ – حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' = y'^3 + y'$$

الحل : نفرض $p = y'$ فيكون $y'' = p'$ وتأخذ المعادلة الشكل :

$$p' = p^3 + p \quad , \quad dx = \frac{dp}{p(p^2+1)}$$

ومنه :

$$e^x = \frac{c p}{\sqrt{p^2+1}} \qquad (1)$$

واستناداً الى العلاقة :

$$dy = p\, dx = \frac{dp}{p^2+1}$$

نجد :

$$y + c_1 = \text{Arc tg } p$$

او

$$p = \text{tg}(y + c_1) \qquad (2)$$

ويمكننا ان نحذف p بين المعادلتين (١) ، (٢) فنجد الحل العام للمعادلة بشكل ديكارتي او نكتب :

$$p = \frac{dy}{dx} = \text{tg}(y + c_1)$$

$$dx = \frac{dy}{tg\,(y + c_1)} \quad , \quad x + \lambda = \log \sin (y + c_1)$$

ونجد اخيراً : $y = c_1 + \arc\sin c_2 e^x$

٢٨٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x\,y\,y'' - x\,y'^2 + y\,y' = o$$

الحل : ان هذه المعادلة متجانسة بالنسبة لـ y , y' , y'' فلنكتبها بالشكل التالي :

$$x \frac{y''}{y} - x \left(\frac{y'}{y} \right)^2 + \frac{y'}{y} = o$$

ولنفرض $y' = u\,y$ ، $y'' = y\,(u' + u^2)$ وتأخذ المعادلة الشكل :

$$x\,(u' + u^2) - x\,u^2 + u = o \quad , \quad x\,u' + u = o$$

وهي معادلة ذات متحولات متفرقة حلها :

$$x\,u = c \quad , \quad x\,y' = cy$$

وبحل المعادلة الثانية نجد : $y = c_1 x^c$

٢٨٩ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x\,y''\,(x^2 y'' + 2\,x\,y' + 2\,y) + 2\,y\,y' = o$$

ان هذه المعادلة متجانسة بالنسبة لـ x و dx فلو بدلنـــا المتحول x بـ t حسب العلاقة $x = e^t$ لوجدنا :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

اذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فانها تأخذ الشكل :

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} + 2\,y \right) + \frac{2\,y}{x} \frac{dy}{dt} = o$$

تأخذ هذه المعادلة بعد الاختصار وبعد ان نفرض :

$$\frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v\,\frac{dv}{dy}$$

الشكل التالي :

$$\left(v\,\frac{dv}{dy} - v\right)\left(v\,\frac{dv}{dy} + v + 2y\right) + 2yv = o$$

ومنه :

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + 2y\,\frac{dv}{dy} - v = o$$

إذا اتخذنا في هذه المعادلة تابعاً جديداً هو $z = v^2$ فانها تأخذ الشكل :

$$z = y z' + \frac{1}{4} z'^2$$

وهي معادلة ريكارتي حلها العام :

$$z = c y + \frac{1}{4} c^2$$

أو

$$v^2 = c y + \frac{1}{4} c^2$$

بما أن $v = x\,\dfrac{dy}{dx}$ فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{dy}{\sqrt{cy + \frac{1}{4} c^2}}$$

$$c \log c_1 = \pm\, 2 \sqrt{cy + \tfrac{1}{4} c^2}$$

وبعد الاصلاح نجد :

$$y = \frac{c}{4}\left[(\log c_1 x)^2 - 1\right]$$

٢٩٠ – حل المعادلة التفاضلية : $(1) \quad x^3 y'' + (x y' - y)^2 = o$

إن هذه المعادلة متجانسة بالسبة لـ y, x تجانساً من الدرجة الثانيـــة ، لحلها نقسم طرفيها على x^2 فتأخذ الشكل :

$$x y'' + \left(y' - \frac{y}{x}\right)^2 = o \qquad (2)$$

نفرض : $u = \frac{y}{x}$ ، $v = x\frac{du}{dx}$ فيكون

$$y' = u + x u' = u + v$$

$$x y'' = x\left(1 + \frac{dv}{du}\right)\frac{du}{dx} = v + v\frac{dv}{du}$$

لنحمل هذه القيم في المعادلة (2) فنحصل على المعادلة :

$$v + v\frac{dv}{du} + (u + v - u)^2 = 0$$

أو

$$v + v\frac{dv}{du} + v^2 = 0$$

وبعد ان نختصر على v ونفرض $v \neq 0$ نجد :

$$\frac{dv}{du} + v + 1 = 0$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الاولى حلها العام :

$$e^u(1 + v) = c$$

اذا عدنا الى ما فرضناه اعلاه فاننا نجد :

$$e^u\left(1 + x\frac{du}{dx}\right) = c \quad , \quad \frac{d}{dx}(x e^u) = c$$

ويكون أخيراً

$$x e^u = c x + c_1$$

ويكون الحل العام للمعادلة (١) هو :

$$x e^{\frac{y}{x}} c x + c_1$$

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من صحة الاجوبة المرافقة :

٢٩١ - $y'' = x + \sin x$ ج : $y = \frac{1}{6} x^3 + A x + B - \sin x$

٢٩٢ - $y^{(4)} = x$ ج : $y = \frac{x^5}{120} + A x^3 + B x^2 + c x + D$

٢٩٣ - $x y^{(3)} - 2 y'' = o$ ج : $y = c_1 x^4 + c_2 x + c_3$

٢٩٤ - $y y'' = 2 (y')^2 - 2 y'$ ج : $Ay = tg (A x + B)$

٢٩٥ - $y y'' - y'^2 = y^2 \log y$ ج : $\log y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

٢٩٦ - $y y'' + y'^2 = y^2$ ج : $y^2 = c_1 sh (\sqrt{2} x + c_2)$

٢٩٧ - $y'' = e^{2y}$ ج : $e^y = \frac{2 A c e^{Ax}}{1 - c^2 e^{2Ax}}$

٢٩٨ - $y'' + y'^2 + 1 = o$ ج : $y = \log \cos (x - c_1) + c_2$

٢٩٩ - $(1 + x^2) y'' + 2 x y' = 2 x^{-3}$

ج : $y = c_1 + c_2 \text{Arc tg } x + \frac{1}{x}$

٣٠٠ - $x y'' - y' = \frac{-2}{x} - \log x$

ج : $y = c_1 x^2 + c_2 + (x + 1) \log x$

٣٠١ - $y^{(3)} + y'' = x^2$

ج : $y = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3 + \frac{x^2 (x^2 - 4 x + 12)}{12}$

٣٠٢ - $y y'' + y'^3 = o$ ج : $x = c_1 + c_2 y + y \log y$

٣٠٣ - $y y'' + y'^2 = 2$ ج : $y^2 = 2 x^2 + c_1 x + c_2$

٣٠٤ – $y y'' = y'^2 (1 - y' \cos y + y y' \sin y)$

ج : $x = c_1 + c_2 \log y + \sin y$

٣٠٥ – $y'' = \frac{1}{(y + 1)^3}$ ج : $\pm\sqrt{A(y + 1)^2 - 1} = A x + B$

٣٠٦ – $4 y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

ج : $3 x = 4 (\sqrt{y} - 2 A) \sqrt{A + \sqrt{y}} + B$

٣٠٧ – $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$

ج = $y = (1 + c_1^2) \log (x + c_1) - c_1 x + c_2$

٣٠٨ – $x y'' = y' \log \frac{y'}{x}$ ج : $y = (c_1 x - c_1^2) e^{\frac{x}{c_1} + 1} + c_2$

٣٠٩ – $y''^2 = y'$ ج : $12 y = (x - c_1)^3 + c_2$

٣١٠ – $a y^{(3)} = y''$ ج : $y = c_1 e^{\frac{x}{a}} + c_2 x + c_3$

٣١١ – $y^{(3)} + y''^2 = 0$

ج : $y = (x + c) \log (x + c) + c_1 x + c_2$

٣١٢ – $4 y' + y''^2 = 4 x y''$ ج : $y = c_1 x (x - c_1) + c_2$

٣١٣ – $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ ج : $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 1$

٣١٤ – $y' y^{(3)} - 3 y''^2 = 0$ ج : $x = c_1 y^2 + c_2 y + c_3$

٣١٥ – $1 + y'^2 + x y' y'' = a y'' \sqrt{1 + y'^2}$

ج : $x = a \sin \varphi + c \cos \varphi$

$$y = c_1 - a \cos \varphi + c_2 \sin \varphi - c_2 \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

٣١٦ – $y'(1 + y'^2) = a y''$ ج : $x - c_1 = a \log \sin \frac{y - c_2}{a}$

٣١٧ – $y^{(3)} = y''^3$ ج : $3 y = (c_1 - 2 x)^{\frac{3}{2}} + c_2 x + c_3$

٣١٨ - $y^{(3)}(1+y'^2) - 2y'y''^2 = 0$

ج : $x^2 + y^2 + cx + c_1 y + c_2 = 0$

٣١٩ - $y y''^2 = 1$ ج : $2x = 2(\sqrt{y} - 2c_1)\sqrt{\sqrt{y} + c_1} + c_2$

٣٢٠ - $y'' = a e^y$

ج : $$x + c_2 = \frac{1}{c_1} \log \frac{\sqrt{c_1^2 + a e^y} - c_1}{\sqrt{c_1^2 + a e^y} + c_1}$$

٣٢١ - $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$

ج : $c_2^2 (x - c_1)^2 = (c_2 y^{\frac{2}{3}} + 2)\sqrt{c_2 y^{\frac{2}{3}} - 1}$

٣٢٢ - $2(2a - y)y'' = 1 + y'^2$

ج : $y = 2a - c_1 \sin^2 t \quad , \quad 2x = c_2 + c_1(2t - \sin 2t)$

٣٢٣ - $1 + y'^2 = 2yy''$ ج : $(x - c_1)^2 = 4c(y - c)$

٣٢٤ - $y'' - y^3 y'' = 1$

ج : $2c_2 . y^2 = 2c_1 c_2 + c_2^2 e^{2x} + (c_1^2 - 1)e^{-2x}$

٣٢٥ - $2y'^2 = yy''$ ج : $y(c_2 + x) = c_1 + x$

٣٢٦ - $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$

ج : $x = c_2 + c_2 \log(y+u) + \log(y - c_1 u) \ , \ u^2 = y^2 + 1 - c_1^2$

٣٢٧ - $yy'' = y'^2$ ج : $y = c_1 e^{cx}$

٣٢٨ - $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$

ج : $2(c_1 y - 1)^{\frac{3}{2}} = 2c_1 x + c_2$

٣٢٩ - $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$ ج : $y \cos^2(x + c_1) + c_2$

حل المعادلات التفاضلية التالية مستفيداً من احدى تغييرات المتحولين المعرفة بالعلاقات :

$$y \pm x = u \quad , \quad yy' = u \quad , \quad y - xy' = u$$

٣٣٠ - $y\,y'' + y'^2 = \dfrac{y\,y'}{\sqrt{1+x^2}}$

ج : $y^2 = c_1 + c_2 (x\,t + \log t) : t = x + \sqrt{1 + x^2}$

٣٣١ - $y''^2 - 2\,x\,y'' + x^2 = y^2$

ج : $y - c_1 e^x - e^{-x} + x) (y - c_1 \cos x - c_2 \sin x - x) = 0$

٣٣٢ - $x^4 y'' + (x\,y' - y)^3 = 0$

ج : $y = x \left(c_1 - \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{c_2}{x} \right)$

٣٣٣ - $x^3 y'' = (y - x\,y')^2$ ج : $y = x \log \dfrac{c_2\,x}{1 + c_1\,x}$

٣٣٤ - $x^2 y\,y'' - 2\,x^2 y'^2 + x\,y\,y' + y^2 = 0$

ج : $y (c_2 + x^2) = c_1\,x$

٣٣٥ - $x^2 y\,y'' (y - x\,y')^2$ ج : $y = c_1\,x\,e^{-\frac{c_2}{x}}$

٣٣٦ - $x^2 (y\,y'' - y'^2) + x\,y\,y' = y \sqrt{x^2 y'^2 + y^2}$

ج : $2 \log c_1\,y = \dfrac{c_2}{x} + \dfrac{x}{c_2}$

٣٣٧ - $x\,y\,y'' + x\,y'^2 - y\,y' = 0$ ج : $y = c_1 \sqrt{x^2 + c_2}$