الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى (٤)

المعادلات غير المحلولة ـ معادلة لاغرانج ـ معادلة كليرو

اذا لم تكن المعادلة التفاضلية $f(x, y, y') = o$ ممكنة الحل بسهولة بالنسبة لـ y' حاولنا الإستفادة من التمثيل الوسيطي للمتحولين (x, y) كما في الحالات التالية :

١ ـ المعادلة لا تحوي التابع وهي من الشكل : $G(x, y')=o$ إذا امكن تمثيل المنحني $G(X, Y) = o$ وسيطياً بدلالة وسيط نرمز له بـ t وبالشكل :

$$Y = \psi(t) \quad , \quad X = \varphi(t)$$

فإن المنحنيات التكاملية تتعين بالمعادلتين :

$$dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt \;,\; \frac{dy}{dx} = \psi(t) \quad , \quad x = \varphi(t)$$

$$y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt \qquad , \qquad x = \varphi(t)$$

٢ ـ المعادلة لا تحوي المتحول x وهي من الشكل $H(y, y')=o$: إذا امكن استبدال هذه العلاقة بتمثيل وسيطي من الشكل :

$$y' = \mu(t) \quad , \quad y = \lambda(t)$$

فان نقاط المنحنيات التكاملية تحقق المعادلات :

$$dx = \frac{dy}{\mu(t)} = \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)}\, dt \quad , \quad dy = \mu(t)\, dx \;,\; y = \lambda(t)$$

$$x = \int \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)}\, dt \qquad , \qquad y = \lambda(t)$$

٣ ـ الحالة العامة :

ليكن السطح $f(x, y, z) = o$ ولنفرض أنه امكن تمثيل هـــذا السطح وسيطياً بدلالة وسيطين (u,v) بالشكل :

$$z = \eta(u,v) \text{ ، } y = \psi(u,v) \quad \text{،} \quad x = \varphi(u,v)$$

إن معادلة المنحنيات التكاملية هي من الشكل :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \eta(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv\right)$$

وهي معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة للمشتق $\frac{dv}{du}$ من الشكل :

$$\frac{dv}{du} = g(u, v)$$

٤ ـ المعادلة محلولة بالنسبة لـ y :

$y = f(x, y')$ نشتق هذه المعادلة بعد أن نفرض $y' = p$ فنجد :

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة لـ $\frac{dp}{dx}$ نعتبر فيها احد المتحولين (x, p) متحولاً مستقلاً والآخر تابعاً .

٥ ـ المعادلة محلولة بالنسبة لـ x : $x = f(y, p)$ ، $y' = p$

نشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ y فنجد :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة لـ $\frac{dp}{dy}$ نعتبر فيها أحد المتحولين (y, p) متحولاً مستقلاً والآخر تابعاً .

٦ ـ معادلة لاغرانج : Lagrange ، $y = x\varphi(y') + \psi(y')$:

نشتق طرفي هذه العلاقة فنجد بعد ان نفرض $y' = p$:

$$p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

إذا اعتبرنا p متحولاً مستقلاً و x تابعاً له تتحول هذه المعادلة الى معادلة خطية :

$$[\,\varphi(p) - p\,]\frac{dx}{dp} + x\,\varphi'(p) + \psi'(p) = o$$

ونجد y ، x بعلاقتين من الشكل :

$$y = c\,F_1(p) + \Phi_1(p) \qquad x = c\,F(p) + \Phi(p)$$

٧ ـ معادلة كليرو Clairaut : $y = x\,y' + f(y')$

هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج وينتج عن التحويل الذي أجريناه من اجل معادلة لاغرانج معادلة من الشكل :

$$[\,x + f'(p)\,]\frac{dp}{dx} = o$$

ويتكون الحل العام من المستقيمات $\frac{dp}{dx} = o$ ، $p = y' = C$

$y = c\,x + d$ والحل الشاذ المعرف بالعلاقتين :

$$y = p\,x + f(p) \quad ، \quad x + f'(p) = o$$

ملاحظة : عندما يمكن تمثيل منحن جبري وسيطياً نسميه بالمنحني المتصل وسنذكر فيما يلي بعض خواص هذه المنحنيات :

المنحنيات المتصلة Courbes unicursales تقول عن منحن مستو إنه متصل عندما يمكن تمثيل إحداثيي نقطة كيفية منه بتوابع عادية لوسيط نرمز له بـ t من الشكل :

$$y = \frac{\varphi(t)}{h(t)} \quad ، \quad x = \frac{f(t)}{h(t)}$$

حيث $f(t)$ ، $h(t)$ ، $g(t)$ كثيرات حدود صحيحة للوسيط t

يمكن التعرف على بعض المنحنيات المتصلة بالملاحظات التالية :

١ ـ منحني الدرجة الثانية :

اذا كان C منحنياً من الدرجة الثانية لايحوي نقطة مضاعفة وإذا اتخذنا أحد نقاط

هذا المنحني مبدأ للاحداثيات فان معادلته تأخذ الشكل :

$$\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0$$

حيث $\varphi_1(x, y)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الاولى و $\varphi_2(x, y)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية واذا فرضنا $y = x\,t$ فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$x^2 \varphi_2(1, t) + x\,\varphi_1(1, t) = 0$$

ومنه نجد : $x = -\dfrac{\varphi_1(1, t)}{\varphi_2(1, t)}$ $\qquad y = -\dfrac{t\,\varphi_1(1, t)}{\varphi_2(1, t)}$

٢ ـ منحني الدرجة الثالثة :

إذا كان لمنحن من الدرجة الثالثة نقطة مزدوجة فان هذه النقطة حقيقية ويمكننا ان نقطع هذا المنحني بقاطع Δ متحول معادلته من الشكل $P + \lambda Q = 0$. ينتج عن تقاطع المنحني مع المستقيم معادلة تحوي λ تعين جذورها فصول تقاطع المنحنين . اذا كانت A النقطة المزدوجة وكان a فصلها فان $F(x)$ معادلة المنحني المفروض تقبل القسمة على $(x - a)^2$ ويبقى بعد الاختصار على هذا المضروب كثير حدود من الدرجة الاولى بالنسبة لـ x يمكننا ان نستخرج منها x بدلالة λ وبذلك نتوصل الى تمثيل وسيطي للتابع المفروض .

٣ ـ منحني الدرجة الرابعة :

يبرهن انه اذا كان C منحنياً جبرياً وكان A نقطة مضاعفة من الدرجة p فان كل منحن جبري Γ يمر من A يقطع C في p نقطة على الأقل منطبقة مع النقطة A وهذا يعني أن للمعادلة التي تعطينا فصول أو ترانيب نقاط تقاطع هذين المنحنين p جذراً يساوي كل منها فصل النقطة A او ترتيبها .

لنفرض ان C منحنياً من الدرجة الرابعة يحوي ثلاث نقاط مزدوجة P, Q, R نمرر من هذه النقاط الثلاثة ونقطة رابعة متحولة S منحنياً من الدرجة الثانية Γ ويبرهن أن معادلة منحن من الدرجة الثانية يمكن كتابتها بالشكل :

$$\lambda f(x, y) + g(x, y) = 0$$

وان حذف y بين معادلة المنحني المفروض وبين هذه المعادلة يعطينا معادلة من الدرجة الثامنة.

$$F(x) = 0$$

إن امثال هذه المعادلة توابع كسرية للوسيط γ ولهـا صيغة جذور معروفة : جذران من اجل كل نقطة من النقاط P ، Q ، R ونقطة من اجل النقطة S فاذا ما تخلصت المعادلة $F(x) = o$ من الجـذور المعروفة بقي معنا معادلة من الدرجة الأولى امثالها توابع كسرية لـ λ وبذلك نتوصل لحساب x بدلالة λ ونتوصل الى تمثيـل وسيطي للمنحني المفروض .

٤ – يبرهن بصورة عامة أن كل منحن من الدرجة n يحوي نقطة مضاعفة من المرتبة $n - 1$ هو منحن متصل يمكن تمثيله بشكل وسيطي .

٨ – **الحلول الشاذة** : لنرمز لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالعلاقة :

$$F(x, y, y') = o$$

يبرهن أنه ليكون لهذه المعادلة حل شاذ ، لاينتج عن الحـل العام باعطاء الثـابت الاختياري قيمة خاصة ، يلزم أن تكون المعادلات الثلاث التالية قابلة للحل :

$$(1) \qquad F(x, y, m) = o \qquad \frac{\partial}{\partial m} F(x, y, m) = o$$

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} = o$$

ان هذا الأمر لايقع بشكل عام فالحلول الشاذة إذن حالات استثنائية و ليس لكل معادلة تفاضلية حلول شاذة .

ان المنحني المعرف بالمعادلتين(١)يمثل حلاً شاذاً اذا حقق المعادلة(٢) والا فانه يمثل محلاً هندسياً لنقاط المنحنيات التكاملية الشاذة او محلاً هندسياً لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية.

٩ – **حالة خاصة** : المعادلة من المرتبة الأولى والدرجة الثانية :

$$y'^2 - 2P(x, y)\,y' + Q(x, y) = o$$

اذا كان لهذه المعادلة حل شاذ فانه معرف بالعلاقة :

$$P^2 - Q = o$$

ويجب فوق ذلك ان يحقق المعادلة :

$$P\left(2P\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + 2P\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = o$$

تمارين محلولة

١٩٠ – حل المعادلة التفاضلية : $y^2 y'^2 + x y y' - 2x^2 = 0$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(y y' + 2x)(y y' - x) = 0$$

ويكون أما $y y' - x = 0$

أو $y y' + 2x = 0$

ان الحل العام للمعادلة الأولى هو : $y^2 - x^2 = A$

أما الحل العام للمعادلة الثانية فهو : $y^2 + 2x^2 = B$

يتألف الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة من مجموعتين من المنحنيات تتعلق كل منها بثابت اختياري . المجموعة الأولى تتألف من قطوع زائدة متساوية الساقين أما المجموعة الثانية فهي قطوع ناقصة . يمر من كل نقطة من المستوي قطع زائد وقطع ناقص يتقاطعان في هذه النقطة .

ملاحظة : إننا نقع في مثل هذه التمارين أمام مشكله وهي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى سوف يحوي أكثر من ثابت اختياري واحد . في الحقيقة ليس هناك أي مشكلة لأننا لو كتبنا حلي المعادلة المفروضة بالشكل :

$$y^2 + 2x^2 = c \quad ، \quad y^2 - x^2 = c$$

لحصلنا على عدد الحلول ذاته عندما نحول c ونعطيه كل القيم الممكنة من $-\infty$ إلى $+\infty$ وهذا يقابل تماماً القيم التي يأخذها كل من الثابتين A ، B من اجل هذا وخوفاً من الالتباس يؤخذ ثابت اختياري واحد كما يكتب الحل العام للمعادلة بالشكل :

$$(y^2 - x^2 - c)(y^2 + 2x^2 - c) = 0$$

ونقول إن هذه العلاقة تمثل تابعاً اصلياً تاماً .

۱۹۱ – حل المعادلة التفاضلية :

$$y'^4 - (x + 2y + 1)y'^3 + (x + 2y + 2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$$

الحل : نلاحظ بسهولة ان هذه المعادلة تتحقق من اجل $y' = 0$ ، $y' = 1$ فاذا قسمنا طرفها الايسر على الجداء $y'(y' - 1)$ فاننا نجد ناتج القسمة :

$$y'^2 - (x + 2y)y' + 2xy = (y' - x)(y' - 2y)$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y'(y' - 1)(y' - x)(y' - 2y) = 0$$

إن حل هذه المعادلة يكافىء حل المعادلات الاربعة :

$$y' = 0 \quad , \quad y' = 1 \quad , \quad y' - x = 0 \quad , \quad y' - 2y = 0$$

إن حلول هذه المعادلات هي :

$$y - c = 0 \ , \ y - x - c = 0 \ , \ 2y - x^2 - c = 0 \ , \ y - ce^{2x} = 0$$

تمثل هذه الحلول الحل العام للمعادلة المفروضة ويكون التابع الاصلي التام لهذه المعادلة :

$$(y - c)(y - x - c)(2y - x^2 - c)(y - ce^{2x}) = 0$$

۱۹۲ – حل المعادلة التفاضلية :

$$yp + p^2 = x^2 + xy \qquad (y' = p)$$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(y' - x)(y' + x + y) = 0$$

إن حل هذه المعادلة يكافىء حل المعادلتين التفاضليتين :

$$y' = x \quad , \quad y' + y = -x$$

$$2y = x^2 + c \quad , \quad y = 1 - x - ce^{-x}$$

ويكون التابع الاصلي التام :

$$(x^2 + c - 2y)(y + x - 1 + c e^{-x}) = 0$$

١٩٣ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(y'^2 - 1) x^2 y^2 + y' (x^4 - y^4) = 0$$

الحل : لنرتب هذه المعادلة حسب القوي المتناقصة لـ y' :

$$x^2 y^2 y'^2 + y' (x^4 - y^4) - x^2 y^2 = 0 \qquad (1)$$

وبحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y' نجد :

$$y' = \frac{y^4 - x^4 \pm (x^4 + y^4)}{2 x^2 y^2}$$

ونكون بعد هذا امام معادلتين تفاضليتين محلولتين بالنسبة لـ y' :

$$(2) \qquad y' = \frac{y^2}{x^2} \qquad\qquad (3) \qquad y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

نكتب المعادلة (٢) بالشكل التالي ونحلها :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \quad , \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + A \quad , \quad A x y = x - y$$

إن المعادلة الاخيرة هي الحل العام للمعادلة التفاضلية (٢) وهي معادلة جملة قطوع زائدة متساوية الساقين تمر من المبدأ وتمس المنصف الاول . يقع أحد الرأسين لكل منها في O وتقبل جميعها المنصف الثاني محوراً لها وكل هذه القطوع متحاكية بالنسبة للمبدأ .

أما المعادلة (٣) فانها تعطينا على التوالي :

$$x^2 dx + y^2 dy = 0 \quad , \quad x^3 + y^3 = B$$

إن المعادلة الأخيرة هي الحل العام للمعادلة التفاضلية (٣) وهي معادلة منحنيات ثلاثية تقبل المنصف الاول محور تناظر لها والمنصف الثاني خطاً مقارباً لكل منها .

يمر من كل نقطة من نقاط مستوي الاحداثيات قطع زائد واحد ومنحن ثلاثي واحد يتقاطعان في هذه النقطة تحت زاوية قائمة وذلك لأن جداء جذري المعادلة (١) يساوي (- ١) .

ليس لهذه المعادلة حلول شاذة لأنه لا يمكن ان يكون للمعادلة (١) جذر مضاعف . إن المنصف الأول حل خاص يوافق $A = o$ والمنصف الثاني حل خاص آخر يقابل $B = o$.

يتألف الحل العام المعادلةالمفروضة من مجموعتين من الحلول المجموعة الأولى تؤلف جملة قطوع زائدة تابعة لوسيط واحد والمجموعة الثانية تؤلف جملة منحنيات ثلاثية تحوي وسيطاً واحداً أيضاً .

١٩٤ – حل المعادلة التفاضلية : $x^3 + y'^2 = x^2$

الحل : لنفرض $y' = x\,t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي: $x^3 + x^2 t^2 = x^2$

ومنه نجد : $x = 1 - t^2$

نستنتج من العلاقة $y' = x\,t$ ان :

$$dy = x\,t\,dx = -(1 - t^2)\cdot t\,.\,2\,t\,dt = -2\,t^2(1 - t^2)\,dt$$

ومنه :
$$y = -\frac{2\,t^3}{3} + \frac{2\,t^5}{5} + c$$

$$15\,y = 6\,t^5 - 10\,t^3 + c$$

هو الحل العام للمعادلة المفروضة .

وإذا عدنا للمتحول x فاننا نجد هذا الحل بالشكل :

$$15\,y = \pm\,6\,(1 - x)^{\frac{5}{2}} \mp 10\,(1 - x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ملاحظة يمكننا ان نتوصل إلى هذا إلحل بطريقة أكثر مباشرة فنكتب :

$$y' = \pm\,x\sqrt{1 - x} \quad , \quad y = \pm\int x\sqrt{1 - x}\,dx$$

اذا كاملنا بالتجزئة فسوف نجد :

$$y = \pm \frac{2}{3} x (1 - x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1 - x)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$y = \pm \frac{2}{3} (1 - x)(1 - x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{4}{15} (1 - x)^{\frac{5}{2}} \mp \frac{2}{3} (1 - x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ونجد بعد الاصلاح :

$$y = \mp \frac{2}{3} (1 - x)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{2}{5} (1 - x)^{\frac{5}{2}} + c$$

١٩٥ – حل المعادلة التفاضلية : $y^2 y'^2 - (2 y + y')^3 = 0$

الحل : نفرض $y' = y \cdot t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$y^4 t^2 - y^3 (2 + t)^3 = 0$$

$$(2) \qquad y = \frac{(2 + t)^3}{t^3}$$

لنأخذ تفاضل طرفي هذه العلاقة ولنذكر أن $dy = y' dx$:

$$dy = y' dx = yt\, dx = \frac{(2 + t)^2 (t - 4)}{t^2} dt$$

إذا بدلنا y بقيمتها فاننا نجد :

$$dx = \frac{t - 4}{t^2 (t + 2)} = \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2(t + 2)}$$

ونجد اخيراً :

$$(3) \qquad x = \frac{2}{t} + \frac{3}{2} \log \frac{t}{t + 2} + c$$

تمثل المعادلتان (٢ ، ٣) الحل العام للمعادلة المفروضة ممثلاً بشكل وسيطي .

١٩٦ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \qquad y\, y'^3 (1 + y'^2)^{-2} = a$$

الحل : إن هذه المعادلة لا تحوي المتحول x لذا يمكن حلها بأن نفرض $y' = p$ فيكون :

$$y = \frac{a(1+p^2)^2}{p^3} \qquad (2)$$

فاذا تمكنا من حساب x بدلالة p نكون قد توصلنا الى حل وسيطي للمعادلة المفروضة .

لنأخذ تفاضل طرفي المعادلة (2) فنجد :

$$dy = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{p^4}\,dp$$

فيكون :

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{p^5}\,dp$$

$$dx = a\left(\frac{dp}{p} - \frac{2\,dp}{p^3} - \frac{3\,dp}{p^5}\right)$$

$$x = a\left[\log|p| + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4p^4}\right] + c \qquad (3)$$

تمثل المعادلتان (2) ، (3) الحل العام للمعادلة المفروضة .

لندرس الحلول الشاذة ولنفرض :

$$F(x, y, y') = \frac{y\,y'^3}{(1+y'^2)^2} - a = 0$$

ولنشكل المشتق الجزئي بالنسبة لـ y' فيكون :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y \cdot y'^2(3-y'^2)}{(1+y'^2)^3}$$

ينعدم هذا المشتق من أجل

آ — $y = 0$ وهذه العلاقة لا تحقق المعادلة المفروضة (١) فهي لا تمثل حلاً لهذه المعادلة .

ب — $y' = 0$ وهذه العلاقة لا يمكن ان تمثل حلاً للمعادلة المفروضة كما هو واضح بالبداهة .

حـ — $y' = \pm\sqrt{3}$: ينتج عن هذه العلاقة وعن المعادلة (١) أن التابع y يصبح ثابتاً أي ان المعادلة الناتجة عن هذه العلاقة والعلاقة (١) تمثل مستقيما موازياً لمحور السينات وبما ان y' على هذا المستقيم يساوي الصفر أي لا يساوي $\pm\sqrt{3}$ فمعنى ذلك ان هذا الحل لا يحقق المعادلة المفروضة فهو ليس حلاً لها .

نلاحظ من جهة ثانية انه من اجل $p = \pm\sqrt{3}$ ينعدم كل من المشتقين $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ فالنقطة المقابلة هي نقطة تراجع للمنحني التكاملي المتعلق بها . ان المستقيمين اللذين يقابلان القيمتين $p = \pm\sqrt{3}$ هما المحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية للمعادلة المفروضة .

١٩٧ — حل المعادلة التفاضلية :

$$y = x\,y' - e^{y'}$$

الحل : ان هذه المعادلة من نوع كليرو لحلها نشتق طرفيها بالنسبة لـ x بعد ان نبدل فيها y' بـ p فيكون :

$$y = x\,p - e^{p}$$

$$y' = p = p + x\,\frac{dp}{dx} - e^{p}\,\frac{dp}{dx}$$

$$(x - e^{p})\,\frac{dp}{dx} = 0$$

إما ان يكون :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad , \quad p = c \quad , \quad y = c\,x - e^{c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

أو ان يكون : $y = x(\log x - 1)$, $p = \log x$, $x = e^p$

ان هذا الحل يحقق المعادلة المفروضة ولا ينتج عن الحل العـام من اجل قيمة خاصة لـ c فهو حل شاذ للمعادلة المذكورة ويمكن التوصل اليه من حذف c بين المعادلة :

$$y = cx - e^c$$

والمعادلة المشتقة : $o = x - e^c$

١٩٨ – حل المعادلة : $y = \frac{2px}{1-p^2}$ حيث نفرض : $p = y'$

الحل : نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ x فنجد :

$$y' = p = \frac{2p}{1-p^2} + \frac{2x(1+p^2)}{(1-p^2)^2}\frac{dp}{dx}$$

بعد اصلاح هذه العلاقة نتوصل إلى المعادلة التفاضلية :

$$\frac{2\,dp}{p(1-p^2)} + \frac{dx}{x} = o$$

وبعد تكامل الطرفين نجد : $p^2 x = C(1-p^2)$

اذا حذفنا p بين المعادلة المفروضة وهذه المعادلة نحصل على العلاقة :

$$y^2 = 4c(c+x)$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة .

لنشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ c فنحصل على المعادلة :

$$8c + 4x = o$$

ونجد بحذف c من الحل العام والمعادلة المشتقة العلاقة :

$$x^2 + y^2 = o$$

وهي معادلة منحن وهمي ومعنى ذلك أنه ليس للمعادلة المفروضة حل شاذ.

١٩٩ – حل المعادلة التفاضلية :

$$2x = \frac{y(1-y'^2)}{y'} \qquad (1)$$

الحل : ان هذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ x فيمكن حلها بأن نفرض $p = y'$ ومن ثم نشتق طرفيها بالنسبة لـ y فنجد :

$$2\frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{1}{p} - p - y\left(\frac{1}{p^2} + 1\right)\frac{dp}{dy}$$

اذا رتبنا هذه المعادلة واصلحناها نجد :

$$(1+p^2)\left(\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}\right) = 0$$

ان $1 + p^2$ لايمكن أن يكون معدوماً من أجل قيم حقيقية لـ p فلنقسم طرفي المعادلة على هذا المقدار :

$$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0 \;,\quad p\,y = c$$

اذا حذفنا c بين هذه المعادلة والمعادلة المفروضة (١) نجد :

$$y^2 = 2cx + c^2$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة

ملاحظة : يمكننا اعتبار المعادلة المفروضة غير محلولة بالنسبة لـ x وابدال y' بـ z ثم التفتيش عن تمثيل وسيطي للسطح :

$$.\, f(x, y, z) = 2x - \frac{y(1-z^2)}{z} = 0$$

لنفرض الوسيطين الداخلين في التمثيل المطلوب هما x , t وأن $z = \operatorname{ch} t$ فيكون :

$$2x = \frac{-y\,\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t} \quad \text{ومنه} \quad y = \frac{-2x\,\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} \qquad (2)$$

ان المتحولات x, y, z يجب أن تحقق العلاقة :

$$z = y' = \text{ch}\, t = -\frac{2\,\text{ch}\, t}{\text{sh}^2 t} - 2x\,\frac{\text{sh}^2 t - 2\,\text{ch}^2 t}{\text{sh}^3 t}\,\frac{dt}{dx}$$

ومنه

$$\frac{\text{ch}\,t\,\text{sh}^2 t + 2\,\text{ch}\, t}{\text{sh}^2 t} = -2x\,\frac{\text{sh}^2 t - 2\,\text{ch}^2 t}{\text{sh}^3 t}\,\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2(\text{sh}^2 t - 2\,\text{ch}^2 t)\,dt}{\text{sh}\, t(\text{ch}\, t\,\text{sh}^2 t + 2\,\text{ch}\, t)}$$

اذا اتخذنا في الطرف الأيمن ، متحولاً جديداً معرفاً بالعلاقة $\Theta = \text{ch}\, t$ ، $d\Theta = \text{sh}\, t\, dt$ فان هذه المعادلة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\,d\Theta}{\Theta(\Theta^2 - 1)}$$

وباستكمال طرفي هذه المعادلة نجد :

$$x = \frac{c(\Theta^2 - 1)}{\Theta^2} = \frac{c\,\text{sh}^2 t}{\text{ch}^2 t} \qquad (3)$$

لنحذف الوسيط t بين المعادلتين (٢ ، ٣) فنجد بضربها ببعضها :

$$y\,x = \frac{-2cx}{\text{ch}\, t}$$

ومنه : $\text{ch}\, t = \frac{-2c}{y}$ ، $\text{ch}^2 t = \frac{4c^2}{y^2}$ ، $\text{sh}^2 t = \frac{4c^2 - y^2}{y^2}$

اذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٣) فاننا نجد :

$$x = c\,.\,\frac{4c^2 - y^2}{y^2}\,.\,\frac{y^2}{4c^2} = \frac{4c^2 - y^2}{4c}$$

او

$$4cx = 4c^2 - y^2$$

واذا فرضنا $-2c = \lambda$ فان هذه المعادلة تأخذ الشكل :

$$y^2 = \lambda x + \lambda^2$$

وهو الشكل الذي وجدناه اعلاه من اجل الحل العام للمعادلة المفروضة .

ليس لهذه المعادلة حل شاذ لأنه ليس للمنحنيات التكاملية مغلف حقيقي .

٢٠٠ – حل المعادلة التفاضلية :

$$y'^3 - 3\,y'^2 - 9\,y^4 - 12\,y^2 = 0 \qquad (1)$$

لحل هذه المعادلة ندرس المنحني المعرف بالمعادلة :

$$f(x, y) = \quad x^3 - 3\,x^2 - 9\,y^4 - 12\,y^2 = 0 \qquad (2)$$

التي تنتج عن المعادلة المفروضة بابدال كل y' بـ x .

لنشكل المشتقين الجزئيين للمعادلة (١) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -36\,y^3 - 24\,y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 - 6\,x$$

ونلاحظ ان الاول ينعدم من اجل $x = 0$ ، $x = 2$ اما الثاني فانه ينعدم من اجل $y = 0$ ، $y = \pm\sqrt{\frac{-2}{3}}$ لهذا المنحني ثلاث نقاط مزدوجة $P(0, 0)$ ، $Q(2, -\sqrt{\frac{-2}{3}})$ ، $R(2, -\sqrt{\frac{-2}{3}})$ ان هذا المنحني متصل وقابل للتمثيل وسيطياً ، فلنقطعه بقطع مخروطي يمر من النقاط الثلاثة P, Q, R ومن النقطة اللانهائية على المحور ox بعد ان نلاحظ ان هذا المحور مقارب للمنحني (٢) .

ان معادلة كل قطع مخروطي هي من الشكل :

$$A\,x^2 + B\,y^2 + 2\,C\,x\,y + D\,x + E\,y + F = 0$$

ان $A = 0$ لانه يمر من النقطة اللانهائية على ox و $F = 0$ لأنه يمر من النقطة P الواقعة في المبدأ وتأخذ عندها معادلة القطع الشكل :

$$B\,y^2 + 2\,C\,x\,y + D\,x + E\,y = 0$$

التي تحوي خمسة ثوابت يطلب تعيينها حيث يمكن اعتبار احدها اختيارياً .

لنكتب ان هذا القطع يمر من النقطة $Q(2, \sqrt{\frac{-2}{3}})$ فنجد :

$$\frac{-2}{3}\,B + 4\,C\,\sqrt{\frac{-2}{3}} + 2\,D + E\,\sqrt{\frac{-2}{3}} = 0$$

ينتج عن هذه العلاقة بمطابقة القسم الوهمي منها للصفر ثم بمطابقة القسم الحقيقي للصفر انه :

$$2D - \frac{2}{3}B = o \quad ، \quad 4C + E = o$$

فاذا اعتبرنا بشكل اختياري $E = 2$ ، $D = t$ نجد : $C = \frac{-1}{2}$

$B = 3t$ وتأخذ عندها معادلة القطع الشكل التالي ، بعد ان نعود فتبدل x بـ y'

$$3ty^2 - y'y + ty' + 2y = o$$

ومنه :

$$y' = \frac{3ty^2 + 2y}{y - t} \qquad (3)$$

اذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (١) فاننا نجد :

$$\frac{y^3(3ty+2)^3}{(y-t)^3} - \frac{3y^2(3ty+2)^2}{(y-t)^2} = y^2(9y^2+12)$$

$$\frac{y(3ty+2)^3}{(y-t)^3} - \frac{3(3ty+2)^2}{(y-t)^2} = 9y^2 + 12$$

لقد ظهر المضروب المشترك y^2 بسبب مرور المنحنيين من النقطة المزدوجة p التي ترتيبها y وسنجد المضروب المشترك $(3y^2+2)^2$ بسبب مرور هذين المنحنيين من النقطتين المزدوجتين R ، Q .

لنكتب هـــذه المعادلة بالشكل :

$$y(3ty+2)^3 - 3(3ty+2)^2(y-t) - 6(y-t)^3 = (9y^2+6)(y-t)^3$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بعد اصلاح طرفها الايسر بالشكل :

$$(9t^3y^2 + 9t^2y - 2y + 3t^3 + 6t)(3y^2+2) = 3(3y^2+2)(y-t)^3$$

$$9t^3y^2 + 9t^2y - 2y + 3t^3 + 6t = 3(y-t)^3$$

ونجد بعد اصلاح الطرف الايمن :

$$-3t - 3t^3)(3y^3 + 2) = o$$

ونجد بعد الاختصار على $3y^2 + 2$ أن :

$$y = 3(t + t^3) \qquad (4)$$

اذا حملنا هذه القيمة في العلاقة (٣) نجد :

$$y' = \frac{27t^3(1+t^2)^2 + 6t(1+t^2)}{2t + 3t^3}$$

ونجد بعد الاختصار :

$$y' = 3(1+t^2)(3t^2+1) \qquad (5)$$

لنفاضل العلاقة (4) ونقارنها مع العلاقة (5) فنجد :

$$(1+t^2)\,dx = dt$$

ومنه $x + c = \text{Arc tg } t$ او $t = \text{tg}(x+c)$

ويكون أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة من الشكل :

$$y = 3\,\text{tg}(x+c) + 3\,\text{tg}^3(x+c)$$

٢٠١ – حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$y = y'^2 \qquad (1)$$

الحل : يمكن كتابة المعـــادلة المفروضة بالشكل $y' = \pm\sqrt{y}$

أو بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y} \qquad , \qquad \pm\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

وباستكمال طرفي هذه المعادلة نجد :

$$\pm 2\sqrt{y} = x - c \quad \text{او} \quad 2y = (x-c)^2 \qquad (2)$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نكتبها بالشكل $y'^2 - y = 0$

ثم نشتقها بالنسبة لـ y' فنجد المعادلة :

$$y' = 0 \qquad (3)$$

وينتج عن المعادلتين (١ ، ٣) المعادلة $y = 0$ وهي تمثل حلا يحقق

المعـــادلة (١) ولا ينتج عن المعادلة (٢) باعطاء الثابت الاختياري c قيمة خاصة فهو حل شاذ .

إن الحل العام (٢) يمثل مجموعة قطوع مكافئة محورهـا يوازي المحور oy وتمس جميعها المحور ox .

٢٠٢ – حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$3y = 2px - 2\frac{p^2}{x} \qquad (1)$$

الحل : لنشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد :

$$3p = 2p + 2\frac{p^2}{x^2} + \left(2x - 4\frac{p}{x}\right)\frac{dp}{dx}$$

أو

$$px^2 - 2p^2 = (2x^3 - 4px)\frac{dp}{dx}$$

$$p(x^2 - 2p) = 2x(x^2 - 2p)\frac{dp}{dx}$$

وأخيراً يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$(x^2 - 2p)\left(p - 2x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

لهذه المعادلة حلان : إما $x^2 - 2p = 0$ أو $p - 2x\frac{dp}{dx} = 0$

يمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل :

$\frac{dx}{x} = 2\frac{dp}{p}$ ومنها : $cx = p^2$ ، $p = \pm\sqrt{cx}$

اذا حملنا قيمة p هذه في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$3y = \pm 2c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 2c$ أو $(3y+2c)^2 = 4cx^3 \qquad (2)$

إن هذه العلاقة تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة .

لدراسة الحلول الشاذة نكتب المعادلة (١) بشكل صحيح :

$$3yx - 2px^2 + 2p^2 = 0 \qquad (3)$$

ثم نشتقها بالنسبة لـ p فنجد بعد حذف p بين المعادلتين :

$$x (6 y - x^3) = o$$

إن لهذه المعـادلة حلان : $6 y - x^3 = o$ ، $x = o$ يكون من اجلها للمعادلة (٣) جذران متساويان بالنسبة لـ p يحقق كل منهما المعادلة (٣)

إذا كتبنا العلاقة (٢) بالشكل التالي :

$$F (x , y) = \quad (3 y + 2 c)^2 - 4 c x^3 = o$$

وشكلنا المشتقين الجزئيين لهذا التابـع :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6 (3 y + 2 c) \quad ، \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - 12 c x^2$$

نلاحظ أن الحل $6 y - x^3 = o$ لايعدم هذين المشتقين فهو حل شاذ أما نقاط المنحنيات التكاملية التي يكون فيها : $x = o$ فانه ينعدم فيها هذان المشتقان معاً . تكون هذ النقاط المحل الهندسي لنقـاط تراجع المنحنيات التكاملية .

٢٠٣ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x^3 p^2 + x^2 y p + 1 = o \qquad (1)$$

ثم ادرس حلولها الشاذة .

الحل : لنحل هـــذه المعادلة بالنسبة لـ y ثم لنشتق المعـادلة الناتجة بالنسبة لـ x :

$$y = - \frac{1}{x^2 p} - x p$$

$$p = \frac{2 x p + x^2 p'}{x^4 p^2} - p - x p'$$

وبعد الاصلاح : $(1 - x^3 p^2) (2 p + x \frac{dp}{dx}) = o$

إما ان يكون : $1 - x^3 p^2 = 0$ او $p = \frac{\mp 1}{\sqrt{x^3}}$

وهو لا يحقق المعادلة المفروضة (١)

وإما ان يكون $2p + x\frac{dp}{dx} = 0$ ، $\frac{2\,dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$ ،

$$p\,x^2 = c$$

إذا حذفنا p بين هذه العلاقة وبين المعـادلة المفروضة فسوف نجد الحل العام بالشكل :

$$c^2 + c\,x\,y + x = 0 \qquad (2)$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نجري ما يلي :

آ – نكتب ان مميز المعادلة المفروضة التي هي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ p يساوي الصفر :

$$x^4 y^2 - 4x^3 = x^3 (x y^2 - 4) = 0 \qquad (3)$$

ب – نشتق المعـادلة (٢) بالنسبة لـ c ثم نحذف c بين هـذه المعادلة والمعادلة الناتجة عن الاشتقاق :

$$2c + x\,y = 0 \quad , \quad c = \frac{-x\,y}{2}$$

$$\frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^2 y^2}{2} + x = 0$$

وبعد الاصلاح نجد : $x(x y^2 - 4) = 0 \qquad (4)$

إن العلاقة $x y^2 - 4 = 0$ تحقق المعادلة التفاضلية فهي تمثل حلاً شاذاً .

أما العلاقة $x = 0$ فهي حل خاص ينتج عن الحل العام بجعل $c = 0$

٢٠٤ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'^2 - 2\,x\,y\,y' + y^2 = x^2\,y^2 - x^4$$

الحل : إذا بدلنا في هـــذه المعادلة y' بـ z فانها تأخـذ الشكل

$$f(x, y, z) = o$$

لنحاول حساب المتحولات الثلاثة x, y, z بدلالة وسيطين ولنفرض مثلا : $y = x \operatorname{ch} t$ فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$x^2 y'^2 - 2 x^2 y' \operatorname{ch} t + x^2 \operatorname{ch}^2 t = x^4 \operatorname{ch}^2 t - x^4$$

وتأخذ بعد الاختصار على x^2 والترتيب الشكل :

$$y'^2 - 2 y' \operatorname{ch} t + \operatorname{ch}^2 t - x^2 \operatorname{sh}^2 t = o$$

لنحل هذه المعادلة ذات الدرجة الثانية بالنسبة لـ y' فنجد :

$$y' = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

إن الوسيطين هما x, t والمعادلات الوسيطية هي :

$$x = x \quad , \quad y = x \operatorname{ch} t \quad , \quad y' = z = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

لنشتق بالنسبة لـ x المعادلة الثانية ولنطابقها مع المعادلة الاخيرة فنجد :

$$x \operatorname{sh} t \frac{dt}{dx} + \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} t \pm x \operatorname{sh} t$$

ومنه $\dfrac{dt}{dx} = \pm 1 \quad , \quad t = c \pm x$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو : $y = x \operatorname{ch}(c \pm x)$

٢٠٥ – ادرس المعـــادلة التفاضلية التالية وبين فيما إذا كان لها حل شاذ :

$$y'^2 + 2 x y' - y = o \qquad (1)$$

الحل : إن الحل الشاذ لهـذه المعادلة يوافق الحالة التي يكون لها جذر مضاعف بالنسبة لـ y' ويقع هذا الامر عندما يكون :

$$y + x^2 = o \qquad (2)$$

إذا كان لهذه المعـادلة حل شاذ فهو القطع المكافىء $y + x^2 = o$ ولكي تقبل المعادلة المفروضة هذا الحل الشاذ يجب ان تكون قيمـة المشتق y' على القطع المكافىء تساوي قيمته مستخرجة من المعادلة المفروضة .

عندمـا يكون $y + x^2 = o$ يكون للمعادلة (١) جذر مضاعف هو $y' = -x$ بينا تكون قيمة y' مستخرجة من معادلة القطع هي $y' = -2x$ وهـذا مايثبت ان العلاقة (٢) لا تمثل حلاً شاذاً للمعادلة المفروضة بل محلاً هندسياً لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية كما سنوضح ذلك فيما يلي :

إن المعادلة (١) هي معادلة لاغرانج فاذا طبقنا عليها الطريقة العامة في الحل نجد الحل العام :

$$x = \frac{c}{p^2} - \frac{2p}{3} \quad , \quad y = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3}$$

إذا شكلنا مشتقي x ، y بالنسبة للوسيط p فاننا نجد :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-2}{3p^3}(3c + p^3) \quad , \quad \frac{dy}{dp} = \frac{-2}{3p^2}(p^3 + 3c)$$

من اجل قيم الوسيط التي تحقق المعادلة $p^3 + 3c = o$ يكون :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp} = o$$

إن القيم الثلاثة للوسيط p التي تحقق المعادلة $p^3 + 3c = o$ تقابل ثلاث نقاط تراجع من المنحني التكاملي الذي يوافق قيمة c الداخلة في هذه المعادلة . ينتج عما تقدم أن لكل منحن تكاملي ثلاث نقاط تراجع نحصل على محلها الهندسي بأن نحذف c بين المعادلة $p^3 + 3c = o$ وبين معادلتي منحنيات التكامل فنجد :

$$x = -p \;, \quad y = -p^2 \;, \quad y = x^2$$

وهي معادلة القطع المكافىء الذي وجدناه أعلاه .

٢٠٦ – حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$x^2 + y^2 - 2x(x + yy') + \frac{1}{m^2}(x + yy')^2 + k = o \qquad (1)$$

الحل : لنفرض $2z = x^2 + y^2$ فيكون $z' = x + yy'$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة (1) فانها تأخذ الشكل :

$$2z = 2xz' - \frac{1}{m^2} z'^2 - k \qquad (2)$$

إن هذه المعادلة هي معادلة لاغرانج نحلها بأن نأخذ مشتق طرفيها بالنسبة لـ x :

$$2z' = 2z' + 2xz'' - \frac{2}{m^2} z' z''$$

أو

$$z''\left(2x - \frac{2}{m^2} z'\right) = 0$$

لتتحقق هذه المعادلة يكفي أن يكون :

$$z'' = 0 \quad \text{أو} \quad z' = m^2 x$$

إن العلاقة الأولى لاتحقق المعادلة المفروضة (2) فهي تمثل حلاً غريباً نتج عن اشتقاق هذه المعادلة أما العلاقة الثانية وهي $z'' = 0$ فـانها تعطينا الحل العام للمعادلة (1) وهو :

$$z'' = 0 \quad , \quad z' = a \quad , \quad z = ax + b$$

أو بالشكل $x^2 + y^2 = 2ax + 2b$ وهي معادلة مجموعة دوائر تابعة لوسيطين يتبع احدهما الآخر لأنه لو حملنا هذه النتائج في المعـادلة (2) لوجدنا :

$$2ax + 2b = 2ax - \frac{a^2}{m^2} - k$$

يمكننا اعتبار احد الثابتين (b ، a) ثابتاً اختيارياً ويكون الآخر تابعاً له معرفاً بالعلاقة السابقة والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$2b = -\frac{a^2}{m^2} - k$$

تقع مراكز هذه الدوائر على محور السينات .

الحلول الشاذة : لنشتق المعادلة (1) بالنسبة لـ y' فنجد :

$$-2xy + \frac{2y}{m^2}(x+yy') = o \qquad (3)$$

ومنه :

$$y' = \frac{x(m^2-1)}{y}$$

اذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (١) فاننا نحصل على المعادلة :

$$(1-m^2)x^2 + y^2 + k = o \qquad (4)$$

يبرهن بسهولة أن هذه العلاقة تحقق المعادلة (١) فهي إذن حل شاذ كما يبرهن بسهولة أيضاً أن الدوائر التي تمثل المنحنيات التكاملية للمعادلة (١) يمس كل منها القطع المعرف بالمعادلة (٣) بنقطتين مختلفتين

ملاحظة : يمكن اخراج y من إفادة المعادلة (٣) خارج قوسين و كتابتها بالشكل التالي :

$$2y\left[-x + \frac{x+yy'}{m^2}\right] = o$$

فهي تقبل الحل $y = o$. إن هذا الحل لا يحقق المعادلة (١) فهو ليس بحل شاذ وليس بحل هندسي للنقاط الشاذة للمنحنيات التكاملية . يمر من كل نقاط المستقيم $y = o$ دائرتان من الدوائر التكاملية متماستان في هذه النقطة إن ميل المماس المشترك يساوي ∞ .

٢٠٧ – **حل** المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$y'^2 - \frac{2}{(x-y)^2-1}\,y' + 1 = o$$

الحل : إن هذه المعادلة من الشكل : $y'^2 - 2Py' + Q = o$

لنشكل مميز هذه المعادلة ولنكتبه مساوياً للصفر :

$$P^2 - Q = \frac{1}{[(x-y)^2-1]^2} - 1 = 0$$

لنضع هذه المعادلة بشكل صحيح فنجد :

$$1 - [(x-y)^2 - 1]^2 \equiv (x-y)^2 (y - x - \sqrt{2})(x - y - \sqrt{2}) = 0$$

يحوي الطرف الايسر لهذه المعادلة المضروب $(x-y)^2$ وبما ان العلاقة $x - y = 0$ لا تحقق المعادلة المفروضة فهو ليس بحل شاذ ولا هو محلاً هندسياً لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

إذا فتشنا عن حل المعادلة المفروضة فاننا نجد ان هـــذا الحل يتألف من مجموعة الدوائر :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 - 1 = 0$$

تقع مراكز هذه الدوائر على المستقيم $y - x = 0$ ومن الواضح ان هـذا المستقيم هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي يتماس بها كل زوج من هذه الدوائر .

أمـا المستقيان $y - x - \sqrt{2} = 0$ ، $x - y - \sqrt{2} = 0$ فهما المغلفان لمجموعة الدوائر هذه وهما يمثلان الحل الشاذ للمعادلة المفروضة .

يمكن التأكـد بسهولة من أن كلا من هذين المستقيمين يحقق المعـادلة التفاضلية المفروضة فاذا اخذنا مثلا المعادلة الاولى $y = x + \sqrt{2}$ واخذنا مشتقها فاننا نجد :

$$y' = 1$$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة المفروضة فاننا نلاحظ تحقيقها :

$$1 - \frac{2}{(x - x - \sqrt{2})^2 - 1} + 1 = 0$$

٢٠٨ — حل المعادلة التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$y = 2xp - yp^2 \qquad (1)$$

الحل : لنحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x ثم لنشتقها بالنسبة لـ y فنجد :

$$2x = \frac{y}{p} + yp$$

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} + p + y\frac{dp}{dy}$$

أو
$$(p^2 - 1)\left(p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

إذا كاملنا المعادلة $p + y\frac{dp}{dy} = 0$ نجد .

$$py = c$$

لنأخذ قيمه p من هذه العلاقة ونضعها في المعادلة المفروضة فنحصل على الحل العام :

$$y^2 = 2cx - c^2 \qquad (2)$$

لنأخذ مميز المعادلة المفروضة باعتبارها من الدرجة الثانية بالنسبة لـ p' ولنكتب أنه يساوي الصفر فنجد :

$x^2 - y^2 = 0$ ومنه إما $y = x$ أو $y = -x$.

إن العلاقتين الأخيرتين تحققان المعادلة المفروضة ولا ينتجان عن الحل العام (٢) باعطاء قيم خاصة للثابت الاختياري c فهما إذن حلان شاذان للمعادلة المفروضة .

يمكننا ان نتوصل إلى النتيجة ذاتها وذلك بأن نفتش على مغلف المنحنيات (٢) فنحذف c بين هذه المعادلة :

$$y^2 = 2cx - c^2$$

والمعادلة المشتقة بالنسبة لـ c : $0 = 2x - 2c$ ، $c = x$

فنجد معادلة المغلف $y^2 = x^2$

إن الحل العام مؤلف من جملة قطوع مكافئة تحوي وسيطاً . محورها

المشترك محور السينات ويمس كل منها المستقيم $y = x$ في النقطة (c,c) والمستقيم $y = -x$ في النقطة $(c, -c)$.

٢٠٩ – حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$p^3 + p x - y = 0$$

الحل : يمكن حل هذه المعادلة باعتبارها معـــادلة كليرو فنكتب على التوالي :

$$y = p x + p^3$$
$$y' = p = p + x p' + 3 p^2 p'$$
$$p' (x + 3 p^2) = 0$$

إن الحل $p' = 0$ يعطينا الحل العام للمعادلة المفروضة وهو $y = cx + c^3$

أما الحل $x + 3 p^2 = 0$ او $p = \pm \sqrt{\frac{-x}{3}}$ فانه يعطينا الحل الشاذوهو :

$$4 x^3 + 27 y^2 = 0$$

يمثل الحل العام مجموعة مستقيات تمس جميعها المنحني المعرف بالعلاقة :

$$4 x^3 + 27 y^2 = 0$$

الذي هو مغلف للمستقيات المذكورة .

٢١٠ – حل المعادلة التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة :

$$(x^2 - 4) p^2 - 2x y p - x^2 = 0$$

الحل : لنحلهـا بالنسبة لـ y ومن ثم لنشتق طرفيها بالنسبة لـ x فنجد على التوالي :

$$2 y = x p - \frac{4}{x} p - \frac{x}{p}$$

$$2 p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{4 p}{x^2} - \frac{4}{x} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} \frac{dp}{dx}$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بعد حذف مخارجها واصلاحها بالشكل :

$$(p^2 x^2 - 4 p^2 + x^2) (p - x \frac{dp}{dx}) = o$$

إذا اعتبرنا الحل : $p - x \frac{dp}{dx} = o$ نجد :

$$p = c x$$

واذا حملنا هذه القيمة في المعادلة المفروضة فسوف نجد الحل العام :

$$c^2 (x^2 - 4) - 2 c y - 1 = o$$

لدراسة الحلول الشاذة للمعادلة المفروضة نشكل مميز هذه المعادلة ونجعله مساوياً للصفر فنجد :

$$x^2 (y^2 + x^2 - 4) = o$$

إن العلاقة $y^2 + x^2 = 4$ تنتج عن حذف p بين المعادلة المفروضة والمعادلة الناتجة عنها بعد اشتقاقها بالنسبة لـ p فهي تمثل الحل الشاذ للمعادلة المفروضة .

أما العلاقة $x^2 = o$ الذي يمثل محور العينات فانها لا تحقق المعادلة المفروضة فهي لا تمثل حلاً شاذاً بل محلاً هندسياً لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية غير اللا متناهية التجاور .

يمثل الحل العام لهذه المعادلة مجموعة من القطوع المكافئة تغلفها الدائرة $x^2 + y^2 = 4$.

يتماس في كل نقطة من نقاط المستقيم $x = o$ قطعان مكافئان من المنحنيات التكاملية وتكون قيمة p في هذه النقطة معدومة أي ان المماس المشترك يكون موازيا لمحور السينات .

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة الموافقة :

٢١١ـ $y'^2 + y'(x+y) + xy = 0$

ج : $(2y + x^2 - c)(x + \log y - c) = 0$

٢١٢ـ $y'^2 + y' - 2 = 0$

ج : $(y - x - c)(y + 2x - c) = 0$

٢١٣ـ $y'^2 + y' - 6 = 0$

ج : $(y - 2x - c)(y + 3x - c) = 0$

٢١٤ـ $y'^2 + 2xy' - 3x^2 = 0$

ج : $(2y - x^2 - c)(2y + 3x^2 - c) = 0$

٢١٥ـ $y'^2 = x^5$ ج : $49(y-c)^2 = 4x^7$

٢١٦ـ $x + yy'^2 = y'(1 + xy)$

ج : $(2y - x^2 - c)(2x - y^2 - c) = 0$

٢١٧ـ $y'^3 - y'(x^2 + xy + y^2) + xy(x+y) = 0$

ج : $(2y - x^2 - c)(y - ce^x)(y + x - 1 - ce^{-x}) = 0$

٢١٨ـ $y'^2 - 2y' \operatorname{ch} x + 1 = 0$

ج : $(y - e^x - c)(y + e^{-x} - c) = 0$

٢١٩ـ $xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0$

ج : $(2xy + x^2 - c)(x^2 + y^2 - c) = 0$

٢٢٠ـ $(x^2 + x)p^2 + (x^2 + x - 2xy - y)p + y^2 - xy = 0$

حيث : $y' = q$ ج : $[y - c(x+1)][y + x \log cx]$

٢٢١ـ $yp + p^2 = x^2 + xy$

ج : $(x^2 + c - 2y)(y + x - 1 + ce^{-x}) = 0$

٢٢٢ - $x^2 p^2 + 3xyp + 2y^2 =$

ج : $x^3 y^2 - cxy(x + 1) + c^2 = 0$

٢٢٣ - $xp = \sqrt{1 + p^2}$

ج : $y + c = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

٢٢٤ - $xp^2 + 2yp - x = 0$

ج : $x^2(x^2 - 3y^2)^2 - 2cy(y^2 - 3x^2) - c^2 = 0$

٢٢٥ - $(xp - y)^2 = 2xy(1 + p^2)$

ج : $(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$

٢٢٦ - $(xp - y)(xp - 2y) + x^2 = 0$

ج ؛ $x = c\, e^{t+\frac{1}{2}e^{-2t}}$, $y = 2c \operatorname{ch} t \,.\, e^{t+\frac{1}{2}e^{-2t}}$

٢٢٧ - $x^2 p^2 - 3xyp + 2y^2 = 0$

ج : $(y - cx)(y - cx^2) = 0$

حل المعادلات التفاضلية التالية وادرس حلولها الشاذة حيث نفرض $y' = p$:

٢٢٨ - $6p^2y^2 + 3px - y = 0$.

ج: الحل العام : $y^3 = 3cx + 6c^2$ ، الحل الشاذ $3x^2 + 8y^3 = 0$

٢٢٩ - $4xp^2 - (3x - 1)^2 = 0$

ج :الحل العام: $(y + c)^2 = x(x - 1)^2$ ؛ الحل الشاذ $x = 0$ و $3x - 1$ هو الحل الهندسي لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية . $x = 1$ هو الحل الهندسي لنقاط المنحنيات التكاملية المزدوجة .

٢٣٠ - $4p^2 - 9x = 0$

ج : الحل العام: $(y + c)^2 = x^3$ ز $x = 0$ الحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

٢٣١ - $x p^2 - 2 y p + 4 x = 0$

ج : الحل العام $x^2 + c y + c^2 = 0$ و الحل الشاذ $y^2 = 4 x^2$

٢٣٢ - $4 p^2 (x - 2) = 1$

ج : الحل العام $(y + c)^2 = x - 2$ ز الحل الشاذ $x = 2$

٢٣٣ - $p^2 + y^2 - 1 =$ الحل العام : $y = \sin (x + c)$ ،

الحل الشاذ : $y^2 = 1$

٢٣٤ - $p^2 + 2 x p - y = 0$ ،

الحل العام : $(2 x^3 + 3 x y + c)^2 - 4 (x^2 + y)^3 = 0$

$x^2 + y = 0$ المحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

٢٣٥ - $x p^2 - 2 y p + 1 = 0$

الحل العام : $c^2 - 12 c x y + 8 c y^3 - 12 x^2 y^2 + 16 x^3 = 0$ ،

$y^2 - x = 0$ المحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

٢٣٦ - $4 x p^2 + 4 y p - 1 = 0$

الحل العام : $c^2 + 6 c x y - 2 c y^3 - x (3 y^2 - x)^2 = 0$ ،

$y^2 + x = 0$ المحل الهندسي لنقاط تراجع المنحنيات التكاملية .

حل المعادلات التفاضلية التالية واوجد توابعها الاصلية التامة ثم اوجد حلولها الشاذة وارسم المنحنيات التكاملية .

٢٣٧ - $4 x (x - 1)(x - 2) p^2 - 3 (x^2 - 6 x + 2)^2 = 0$

ج - الحل العام : $(y + c)^2 = x (x - 1)(x - 2)$ ،

الحل الشاذ : $x (x - 1)(x - 2) = 0$ ، أما $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

فهو المحل الهندسي لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية .

٢٣٨ – $4xp^2 - (3x-1)^2 = 0$

ج – الحل العام : $(y+c)^2 = x(x-1)^2$ ، الحل الشاذ $x = 0$

أما $x = \frac{1}{3}$ فهو المحل الهندسي لنقاط تماس ازواج المنحنيات التكاملية

و $x = 1$ هو المحل الهندسي لنقاط عقد المنحنيات التكاملية

٢٣٩ – $yp^2 - 2xp + y = 0$.

ج – الحل العام : $y^2 - 2cx + c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $(3y+x)(y-x) = 0$

٢٤٠ – $3xp^2 - 6yp + x + 2y = 0$

ج – الحل العام : $x^2 + c(x-3y) + c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $(3y+x)(y-x) = 0$

٢٤١ – $p^2 + 2px^3 - 4x^2y = 0$

ج – الحل العام : $y - cx^2 - c^2 = 0$

و الحل الشاذ : $x^4 + 4y = 0$ أما $x = 0$ فهو المحل الهندسي لنقاط تماس زواج المنحنيات التكاملية .

٢٤٢ – $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$

ج – الحل العام : $y = c(x-c)^2$ و الحل الشاذ والخاص : $y = 0$

اما $27y - 4x^3 = 0$ فهو حل شاذ .