الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى (٣)

المعادلة التامة ـ عامل التكميل

١ ـ **المعادلة التامة** : نقول عن المعادلة :

$$p(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = o \qquad (١)$$

إنها تامة فيما إذا تحقق الشرط اللازم والكافي :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

أي اذا كان الطرف الأيسر من هذه المعادلة تفاضلاً تاماً لتابع ما أي اذا امكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$dU = o$$

ويكون حلها العام $U = c$

نتوصل الى هذا الحل بأن نجري التكامل الأول :

$$U = \int p(x, y)\,dx$$

حيث نعتبر x متحولاً و y وسيطاً ثابتاً ونأخذ ثابت التكامل تابعاً لـ y فلو فرضنا أن $\varphi(x, y)$ تابعاً أصلياً لـ $p(x, y)$ حيث نعتبر y ثابتاً فانه يمكننا ان نكتب :

$$U = \varphi(x, y) + \psi(y)$$

حيث $\psi(y)$ يمثل ثابت التكامل .

لحساب $\psi(y)$ نطابق بين المشتق الجزئي بالنسبة لـ y للطرف الثاني من هذه العلاقة وبين $Q(x, y)$ أي .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x, y)$$

٢ – **عامل التكميل** : يمكننا تطبيق هذه الطريقة من أجل كل معادلة تفاضلية من الشكل .

$$p\,dx + Q\,dy = o$$

دون أن يكون الطرف الأيسر فيها تفاضلاً تاماً . نجعل هذا الطرف تفاضلاً تاماً بضربه بعامل من الشكل $\mu(x, y)$ نسميه بعامل التكميل ويكون الشرط الذي يجب ان يحققه μ من أجل ذلك هو :

$$p\,\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\,\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = o$$

وهذه العلاقة معادلة تفاضلية جزئية يعطي حلها عوامل التكميل للمعادلة المفروضة .

حالات خاصة : آ – اذا كان :

$$\frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

غير تابع لـ y فإن للمعادلة المفروضة عامل تكميل لا يتبع إلا x وهو من الشكل :

$$\mu = e^{\int X dx}$$

حيث نفرض

$$X = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

ب – إذا كان : $Y = -\dfrac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{p}$ غير تابع لـ x بل لـ y فإن للمعادلة المفروضة عامل تكميل لايتبع إلا y وهو من الشكل :

$$\mu = e^{\int Y dy}$$

ح – إذا كانت المعادلة (١) متجانسة وكان $P x + Q y \neq o$ فان

التركيب التالي عامل تكميل لهذه المعادلة :

$$\frac{1}{Px + Qy}$$

د ـ إذا امكن كتابة المعادلة (١) بالشكل : $yf(xy)\,dx + xg(xy)\,dy = o$

وكان $f(xy) \neq g(xy)$ فإن التركيب :

$$\frac{1}{xy[f(xy) - g(xy)]} = \frac{1}{Mx - Ny}$$

هو عامل تكميل للمعادلة المفروضة :

هـ ـ يمكننا ان نفتش عن عامل من الشكل : $\mu = f(x + y) = f(z)$

فيما إذا كان :

$$-Z = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}}{P - Q}$$

يتبع مجموع المتحولين $z = x + y$ فقط ويكون عندها عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int Zdz}$$

و ـ يمكننا أن نفتش عن عامل تكميل من الشكل : $\mu = f(xy) = f(z)$

فيما إذا كان :

$$-Z = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Px - Qy}$$

تابعاً للجداء $z = xy$ فقط ويكون عندها عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int Zdz}$$

ز ـ إن المعادلة التفاضلية :

$$x^r y^s (m y dx + n x dy) + x^\alpha \cdot y^\beta (\mu y dx + \nu x dy) = o$$

عامل تكميل من الشكل : $x^a y^b$ حيث نفرض $(\alpha, \beta, \mu, \nu$ ، $r, s, m, n)$ اعداد ثابتة وان : $m\nu - n\mu \neq 0$.

و – بعض عوامل التكميل : .

التفاضل الكلي	عامل التكميل	التركيب
$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{1}{x^2}$	$x\,dy - y\,dx$
$-\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$	$\frac{1}{y^2}$	$x\,dx - y\,dx$
$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\left(\log\frac{y}{x}\right)$	$\frac{1}{xy}$	$x\,dy - y\,dx$
$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$x\,dy - y\,dx$
$\frac{x\,dy + y\,dx}{(xy)^n} = d\,\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}$ $\frac{x\,dy + y\,dx}{xy} = d\,(\log xy)$	$\frac{1}{(xy)^n}$ ،	$x\,dy + y\,dx$
$\frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2 + y^2)^n} = d\,\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}$ $\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = d\,\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$ ،	$x\,dx + y\,dy$

تمارين محلولة

برهن أن المعادلات التالية هي معادلات تامة ثم أوجد الحل العام لكل منها :

١٣٤ – $\cos y\,dx + (2y - x\sin y)\,dy = 0$

إذا قارنا هذه المعادلة مع الشكل العام للمعادلات التفاضلية المثبت في مطلع هذا الفصل فاننا نجد :

$$P = \cos y \quad , \quad Q = 2y - x \sin y$$

ونلاحظ بسهولة أن: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$

لحل هذه المعادلة يمكننا ان نكتبها بالشكل التالي :

$$(\cos y \, dx - x \sin y \, dy) + 2y dy = 0$$

ونلاحظ بسهولة تامة ان الافادة الموجودة بين القوسين هي تفاضل التركيب $x \cos y$ ويكون الحل العام هو :

$$x \cos y + y^2 = c$$

ويمكن حل هذه المعادلة بالطريقة العامة فنكتب

$$U = \int p \, dx = \int \cos y \, dx = x \cos y + \varphi(y)$$

ثم نطابق بين المشتق الجزئي لـ U بالنسبة لـ y وبين Q فنجد :

$$-x \sin y + \varphi'(y) = 2y - x \sin y$$

ويكون $\varphi'(y) = 2y \qquad \varphi(y) = y^2$

ويكون الحل العام $U = x \cos y + y^2 = c$

١٣٥ - $(e^{y^2} + y e^x) dx + (2xy e^{y^2} + e^x) dy = 0$

إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{y^2} + e^x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y e^{y^2} + e^x$$

لحل هذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل :

$$(e^{y^2} dx + 2xy e^{y^2} dy) + (y e^x dx + e^x dy) = 0$$

ونلاحظ بسهولة تامة ان التركيب الموجود في القوس الأولى هو تفاضل

للتركيب xe^{y^2} وان التركيب الموجود في القوس الثانيـــة هو تفاضل تام لـ ye^x ويكون الحل العام لهذه المعادلة :

$$x e^{y^2} + y e^x = c$$

١٣٦ – حل المعادلة التالية :

$$\frac{(1 + y^2) y\, dx + (1 + x^2) x\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y + y^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{1 + x^2 + y^2 + 3x^2 y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

لحل هذه المعادلة نكتب :

$$U(x, y) = \int \frac{(1 + y^2) y\, dx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \Phi(y)$$

إذا حسبنـا التكامل الموجود في هـذه العلاقة حسب الطرق المعروفة فاننا نجد :

$$U(x, y) = \frac{x y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \Phi(y)$$

ومنه :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \Phi'(y) = \frac{x + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اى :

$$\Phi'(y) = 0 \quad , \quad \Phi(y) = c$$

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\frac{x y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = c$$

ملاحظة : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي وحلها باعتبارها ذات متحولات متفرقة :

$$(1 + y^2) y \, dx + (1 + x^2) x \, dy = 0$$

او :

$$\frac{dx}{x (1 + x^2)} + \frac{dy}{y (1 + y^2)} = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{ydx}{1 + y^2} = 0$$

وبعد تكامل طرفي هذه العلاقة نجد :

$$\log x - \tfrac{1}{2} \log (1 + x^2) + \log y - \tfrac{1}{2} \log (1 + y^2) = \log c$$

أو

$$\frac{x\,y}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}} = c$$

إذا ربعنا طرفي هذه العلاقة ثم طرحنا الصور من المخـــارج ومن ثم أخذنا جذري الطرفين فاننا نجد على التوالي :

$$\frac{x^2 y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2} = c^2$$

$$\frac{x^2 y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{c^2}{1 - c^2} = \lambda^2$$

$$\frac{x\,y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \lambda$$

وهو الحل العام الذي وجدناه أعلاه .

١٣٧ ـ حل المعادلة التفاضلية :

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) \, dx + (2 x y e^{xy^2} - 3 y^2) \, dy$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{xy^2} + 2y^3 x e^{xy^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

ويكون :

$$U(x, y) = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)\, dx = e^{xy^2} + x^4 + \varphi(y)$$

بشرط أن يكون :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \varphi'(y) = 2xy\, e^{xy^2} - 3y^2$$

$$\varphi'(y) = -3y^2 ، \quad \varphi(y) = -y^3$$

ويكون أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$$

١٣٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$\log(y^2 + 1)\, dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}\, dy = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+1} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{y^2+1}$$

ويكون :

$$U(x, y) = \int \log(y^2 + 1)\, dx = x\log(y^2 + 1) + \varphi(y)$$

ويشترط أن يكون :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{1+y^2} + \varphi'(y) = \frac{2y(x-1)}{y^2+1}$$

ونستنتج مما سبق أن :

$$\varphi'(y) = -\frac{2y}{y^2+1} \quad , \quad \varphi(y) = -\log(y^2 + 1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$x\log(y^2 + 1) - \log(y^2 + 1) = c$$

أوجد عامل تكميل للمعادلات التالية ثم اوجد الحل العام لكل منها :

١٣٩ - $\frac{1}{x}dy + \frac{y}{x^2}dx - 2x\,dx = 0$

نلاحظ بسهولة أنه إذا ضربنا طرفي هذه العلاقة بـ x^2 فانها تأخذ الشكل :

$$x\,dy + y\,dx - 2x^3dx = 0$$

حيث نلاحظ ان $x\,dy + y\,dx$ تفاضل تام $d(x \cdot y)$ وان $-2x^3\,dx$ تفاضل للتابع $\frac{1}{2}x^4$ وهذا يعني إن لهذه المعادلة عامل تكامل هو x^2 وحلها العام :

$$xy - \frac{1}{2}x^4 = c$$

١٤٠ - $x\,dy - y\,dx + x(x+1)\,dx = 0$

الحل : نلاحظ ان القسم الأخير من هذه المعادلة $x(x+1)\,dx$ لايحوي إلا x وأنه لو وجدنا عامل تكميل للقسم الأول من المعادلة لا يتبع إلا x فانه يكون عامل تكامل للمعادلة كاملة كما نلاحظ بسهولة ان :

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

إن x^{-2} هو عامل تكميل للمعادلة المفروضة وتأخذ بعد ضرب طرفيها بـ x^{-2} الشكل :

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \frac{x+1}{x}dx = 0$$

ونجد بأخذ تكامل الطرفين الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$\frac{y}{x} + x + \log x = c$$

١٤١ - $x\,dy - y\,dx + (x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 0$

الحل : إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة على $x^2 + y^2$ أخذت الشكل :

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} + \mathrm{tg}\,y\,dy = 0$$

إن هذه المعادلة تتألف من قسمين كل منهما تفاضل تام : القسم الأول هو $d\left(\text{Arc tg}\dfrac{y}{x}\right)$ والثاني $-d\left[\lg \cos y\right]$ فيكون إذن :

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

عامل تكميل للمعادلة المفروضة التي حلها العام هو :

$$\text{Arctg}\,\frac{y}{x} - \log \cos y = C$$

١٤٢ - $x\,dy - y\,dx + x^2 y\,dy + y^2 x\,dx = o$

الحل : اذا قسمنا طرفي هذه العلاقة على xy فانها تأخذ الشكل التام :

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} + x\,dy + y\,dx = o$$

فيكون $\dfrac{1}{xy}$ عامل تكميل لهذه المعادلة وحلها العام هو :

$$\log \frac{y}{x} + x\,y = c$$

١٤٣ - $3\,y\,dx - 2\,x\,dy + x^2\,y^{-1}\,(10\,y\,dx - 6\,x\,dy) = o$ (1)

الحل : ان هذه المعادلة من النوع المذكور في الفقرة (ز) صفحة (٦٣) فهي تقبل عامل تكميل من الشكل $x^\alpha y^\beta$ وتصبح عندها معادلة تامة من الشكل :

(2) $3\,x^\alpha y^{\beta+1}\,dx - 2\,x^{\alpha+1} y^\beta\,dy + x^{\alpha+2} y^{\beta-1}\,(10\,y\,dx - 6\,x\,dy) = o$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

(3) $(3\,x^\alpha y^{\beta+1} + 10\,x^{\alpha+2} y^\beta)\,dx - (2\,x^{\alpha+1} y^\beta + 6\,x^{\alpha+3} y^{\beta-1})\,dy = o$

لكي تكون هذه المعادلة تامة يجب ان يكون المشتقان الجزئيان التاليان متطابقين :

$$\frac{\partial}{\partial y}(3\,x^\alpha y^{\beta+1} + 10\,x^{\alpha+2} y^\beta) = 3\,(\beta + 1)\,x^\alpha y^\beta + 10\,\beta\,x^{\alpha+2} y^{\beta-1}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^{\alpha+1}y^{\beta}+6x^{\alpha+3}y^{\beta-1}\right)=-2(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$
$$-6(3+\alpha)x^{\alpha+2}y^{\beta-1}$$

ولكي يتحقق هذا التطابق يلزم ويكفي ان يكون :

$$3(\beta+1)=-2(\alpha+1) \quad ; \quad 2\alpha+3\beta=-5$$
$$10\beta=-6(3+\alpha) \quad ; \quad 6\alpha+10=-18$$

ونجد أخيراً $\alpha=2$ ، $\beta=-3$ ويكون عامل التكامل هو $\mu=x^2y^{-3}$ وعندها تأخذ المعادلة (٣) الشكل :

$$(3x^2y^{-2}+10x^4y^{-3})\,dx-(2x^3y^{-3}+6x^5y^{-4})\,dy=0 \tag{4}$$

ان الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة :

$$U(x,y)=\int\left(\frac{3x^2}{y^2}+\frac{10x^4}{y^3}\right)dx=\frac{x^3}{y^2}+\frac{2x^5}{y^3}+\varphi(y)$$

واذا طابقنا المشتق الجزئي بالنسبه لـ y ، لهذا التابع مع عامل dy في المعادلة (٤) فاننا نجد : $\varphi'(y)=0$. $\varphi(y)=c$ ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{2x^5}{y^3}=c$$

١٤٤ — $(1-xy)\,dx+(xy-x^2)\,dy=0$

الحل : نلاحظ ان $P=1-xy$ ، $Q=xy-x^2$ وان

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=y-2x \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=x-y$$

ونجد أخيراً ان :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{x-y}{x(y-x)}=-\frac{1}{x}$$

ان لهذه المعادلة عامل تكميل μ تابع لـ x فقط ويحقق المادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} \;,\; \log|\mu| = -\log|x| \;,\; \mu = \frac{1}{x}$$

وتأخذ المعادلة المفروضة بعد ضربها بهذا العامل ، الشكل :

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x)\, dy = o$$

وهي معادلة تامة حلها العام :

$$\log|x| - xy + \tfrac{1}{2} y^2 = c$$

١٤٥ — $(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = o$

الحل : لنحسب المشتقات الجزئية التالية :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 9y^2 \;,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 3y^2$$

فنستنتج أن المعادلة غير تامة لنحسب إذن التفاضل :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y^2 - 4x$$

إن هذا التفاضل لايمكن أن يصبح مستقلاً عن x أو y فيما لو قسمناه على p أو Q

لنجري تقسيم هذا التركيب على التفاضل :

$$P - Q = 2x^2 + 2xy - 3xy^2 - 3y^3 = -(x+y)(3y^2 - 2x)$$

ويكون :

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P - Q} = \frac{2}{x+y} = \frac{2}{z}$$

حيث فرضنا $z = x + y$.

إن لهذه المعادلة عامل تكميل تابع لـ z نرمز له بـ $\mu(z)$ يحقق المعادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2\,dz}{z} \quad ، \quad \mu = z^2 = (x + y)^2$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ضرب طرفيها بهذا العامل الشكل التام :

$$(x+y)^2(5x^2 + 2xy + 3y^2)dx + 3(x+y)^2(x^2 + xy^2 + 2y^3)\,dy = 0$$

إن الحل العام لهذه المعادلة التامة هو :

$$(x^2 + y^3)(x+y)^3 = c$$

١٤٦ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$$

الحل : لنحسب المشتقين الجزئيين :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

ثم لنشكل التفاضل :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4$$

ونلاحظ بسهولة أن هذا التركيب يختلف عن عامل dx بالعامل $\frac{4}{y}$ فينتج عن ذلك :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{4}{y} = -\,Y$$

ان للمعادلة التفاضلية المفروضة عامل التكميل :

$$\mu = e^{-4\int y^{-1}dy} = e^{-4\log y} = \frac{1}{y^4}$$

اذا ضربنا طرفي المعادلة المفروضة بهذا العامل فانها تأخذ الشكل :

$$(2x e^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3})dx + (x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4})dy = o$$

يمكننا كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي حيث نجعلها مجموع تفاضلات كلية :

$$(2x e^y dx + x^2 e^y dy) + (\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy) + (\frac{1}{y^3}dx - \frac{3x}{y^4}dy) = o$$

ونلاحظ بسهولة إن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

١٤٧ - $(x y^3 + 2x^2 y^2 - y^2)dx + (x^2 y^2 + 2x^3 y - 2x^2)dy = o$

الحل : لنحسب التفاضليين الجزئيين :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x y^2 + 4x^2 y - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x y^2 + 6x^2 y - 4x$$

لنشكل التفاضل بين هذين التركيبين فنجد :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x y^2 - 2x^2 y - 2y + 4x$$

نلاحظ أنه إذا قسمنا هذا التركيب على P فإننا لن نجد تركيباً تابعاً لـ y فقط وكذلك لو قسمناه على Q فلن يكون الناتج مستقلاً عن y وكذلك لو جربنا وقسمناه على P - Q فلن نجد تركيباً يمكن اعتباره تابعاً لـ (x +y).

أما إذا قسمنا هذا التركيب على :

$$P x - Q y = x^2 y^3 + 2x^3 y^2 \quad x y^2 - (x^2 y^3 + 2x^3 y^2 - 2x^2 y) = 2x^2 y - x y^2$$

فاننا نجد :

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P x - Q y} = 1 - \frac{2}{xy} = 1 - \frac{2}{z}$$

حسب فرضنا $z = x . y$.

نستنتج مما تقدم أن للمعادلة التفاضلية المفروضة عامل تكميل يحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = 1 - \frac{2}{z}$$

ومنه $$\mu = e^{z} z^{-2} = e^{xy} . x^{-2} \; y^{-2}$$

وتأخذ المعادلة المفروضة ، بعد ضربها بعامل التكميل الذي وجدناه ، الشكل التالي .

$$e^{xy}\left(\frac{y}{x} + 2 - \frac{1}{x^2}\right) dx + e^{xy}\left(1 + \frac{2x}{y} - \frac{2}{y^2}\right) dy = 0$$

ونجد بعد حل هذه المعادلة ان الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$e^{xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = c$$

١٤٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$y\,(x^2 y^2 + 2)\,dx + x\,(2 - 2x^2y^2)\,dy = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة من الشكل :

$y\,f(xy)\,dx + x\,g(xy)\,dy = 0$ ونلاحظ فوق ذلك أن

$$P x - Q y \neq 0$$

إن هذه المعادلة من النوع (4) وتقبل عامل التكميل :

$$\frac{1}{Px - Qy} = \frac{1}{3x^3 y^3}$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ضربها بهذا العامل الشكل التام :

$$\frac{x^2 y^2 + 2}{3x^3 y^2} dx + \frac{2 - 2x^2 y^2}{2x^2 z^3} dy = 0$$

بعد حل هذه المعادلة التامة نجد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$x = c\,y^2\,e^{x^{-2}y^{-2}}$$

تمارين للحل

بين ان المعادلات التفاضلية التالية تامة واوجد حل كل منها وقارنه مع الجواب الموافق :

١٤٩ – $y\,dx + (x + y)\,dy = 0$ $\qquad 2xy + y^2 = c$

١٥٠ – $\left(y + \dfrac{1}{x}\right) dx + x\,dy = 0$ $\qquad xy + \log|x| = c$

١٥١ – $(2xy^3 - 2y^2 + 4x^3)\,dx + (3x^2y^2 - 4xy - 3y^2)\,dy = 0$

ج : $x^2y^3 - 2xy^2 + x^4 - y^3 = c$

١٥٢ – $\left(y^2 - \dfrac{y}{x^2}\,e^{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(2xy + \dfrac{1}{x}\,e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0$

ج : $xy^2 + e^{\frac{y}{x}} = c$

١٥٣ – $[\cos(x+y) - y\sin xy]\,dx + [\cos(x+y) - x\sin xy]\,dy = 0$

ج : $\sin(x+y) + \cos xy = c$

١٥٤ – $(4x^3y^3 - 2xy)\,dx + (3x^4y^2 - x^2)\,dy$

ج : $x^4y^3 - x^2y = c$

١٥٥ – $(3e^{3x}y - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$

ج : $e^{3x}y - x^2 = c$

١٥٦ – $(\cos y + y\cos x)\,dx + (\sin x - x\sin y)\,dy = 0$

ج : $x\cos y + y\sin x = c$

١٥٧ – $2x(ye^{x^2} - 1)\,dx + e^{x^2}dy = 0$ ، $ye^{x^2} - x^2 = c$

١٥٨ – $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)\,dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)\,dy = 0$

ج : $x^6y^3 + x^4y^5 = c$

أوجد عامل التكميل لكل من المعادلات التالية ثم أوجد حل كل منها :

١٥٩ - $x^2\,dy + xy\,dx + (x^2+1)\,dx$

ج : $x^2 + 2xy + 2\log|x| = c$

١٦٠ - $x\,dy - y\,dx + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x\,dx + y\,dy)$

$\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x} = c$

١٦١ - $y\,e^{2y}dx + (x\,e^{2y} - 1)\,dy$ $2xy + e^{-2y} = c$

١٦٢ - $(x^3+y)\,dx + x(xy-1)\,dy$ $x^2 + y^2 - \frac{2y}{x} = c$

اوجد عامل تكميل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

١٦٣ - $y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)\,dy = 0$ ، $(xy)^{-3}$

١٦٤ - $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2+y^2)\,dy = 0$ ، $\frac{1}{x^2+y^2}$

١٦٥ - $x\,dy - y\,dx - (1-x^2)\,dx = 0$ ، x^{-2}

١٦٦ - $x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$ ، x^2y

١٦٧ - $(8y\,dx + 8x\,dy) + x^2y^3(4y\,dx + 5x\,dy) = 0$

ج : xy

١٦٨ - $x^3y^3(2y\,dx + x\,dy) - (5y\,dx + 7x\,dy) = 0$

ج : $x^{\frac{-8}{3}}\cdot y^{\frac{-10}{3}}$

اوجد عامل تكميل لكل من المعادلات التالية ثم حلها .

١٦٩ - $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xydx$

ج : x ، $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$

١٧٠ - $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$

ج : $\mu = e^{x^2}$ ، $(2x^2y^2 + 4xy + y^4)\,e^{x^2} = c$

١٧١ _ $(x^4 + y^4)dx - xy^3\, dy$ ، x^{-5} ، $y^4 = 4x^4 \log x + c\, x^4$

١٧٢ _ $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = o$

ج : $\dfrac{1}{y(x^2 - y^2)}$ ، $(x - y)\, y^2 = c\,(x + y)$

١٧٣ _ $xdx + ydy = (x^2 + y^2)\, dx = o$ ،

ج : $(x^2 + y^2)^{-1}$ $x^2 + y^2 = ce^{2x}$

١٧٤ _ $(2y - 3x)\, dx + xdy = o$ ، x ، $x^2 y = x^3 + c$

١٧٥ _ $(x - y^2)\, dx + 2xydy = o$ ، x^{-2} ، $y^2 + x \log x = cx$

١٧٦ _ $xdy - ydx = 3x^2(x^2 + y^2)\, dx$ ،

ج : $(x^2 + y^2)^{-1}$ ، $\operatorname{Arctg} \dfrac{y}{x} = x^3 + c$

١٧٧ _ $(y + x^3 y + 2x^2)\, dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dx = o$ ،

$(xy + 2)^{-1}$ ، $\log (xy + 2)^3 + x^3 + 3y^4 = c$

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من صحة الجواب الموافق :

١٧٨ _ $xdy - ydx = x^2 e^x\, dx$ ، $y = cx + xe^x$

١٧٩ _ $(1 + y^2)\, dx = (x + x^2)\, dy$ ، $\operatorname{Arc\,tg} y = \log \dfrac{x}{x + 1} + c$

١٨٠ _ $3x^2y^2dx + 4(x^3y - 3)dy = o$ ، $x^3 y^4 - 4y^3 = c$

١٨١ _ $y(x + y)dx - x^2dy = o$ ، $\dfrac{x}{y} + \log x = c$

١٨٢ _ $(2y + 3xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = o$

ج : $x^2 y(1 + xy) = c$

١٨٣ _ $y(y^2 - 2x^2)\, dx + x(2y^2 - x^2)\, dy = o$

ج : $x^2 y^2 (y^2 - x^2) = c$

١٨٤ _ $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = o$ $x^2 + y^2 = cx$

١٨٥ _ $e^x (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ye^x\, dy = o$ $(x^2 + y^2)e^x = c$

$e^x (x^2 + y^2 + 2 x) dx + 2 y e^x dy = o$ - ١٨٦

ج : $(x^2 + y^2) e^x = c$

$y = (x^2 + c) e^{x^3}$; $(3 x y + 2 e^{x^3}) x dx - dy = o$ - ١٨٧

$(5 y^2 - 6 x y) dx + (6 x^2 - 8 x y + y^2) dy = o$ - ١٨٨

ج : $\log \frac{y^2}{y - 3 x} + \frac{2 x}{y} = c$

$(x y^2 - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}) dx + x^2 y dy = o$ - ١٨٩

ج : $x^2 y^2 + 2 e^{x^{-1}} = c$