الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى (٢)

المعادلة الخطية – معادلة بيرنولي – معادلة جاكوبي – معادلة ريكاتي

١ – المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى :

$$y' + f(x)\, y = g(x) \qquad (1)$$

يدعى $g(x)$ بالطرف الثاني للمعادلة وإذا كان $g(x) \equiv o$ سميت المعادلة بالمعادلة الخطية المتجانسة أو بمعادلة خطية بلا طرف ثان .

إن المعادلة الخطية المتجانسة هي معادلة تفاضلية ذات متحولات متفرقة تكتب بالشكل :

$$\frac{dy}{y} + f(x)\, dx = o \qquad (2)$$

ويكون حلها من الشكل :

$$y = c\, e^{-\int f(x) dx} \qquad (3)$$

لحل المعادلة التامة نفتش عن تابع من الشكل (3) يحقق المعادلة التامة بشرط ان نعتبر c تابعاً لـ x وليس ثابتاً اختيارياً ويكون عندها الحل العام للمعادلة (1) من الشكل :

$$y = \lambda\, h(x) + k(x)$$

وهو تابع خطي بالنسبة للثابت الاختياري λ وينتج عن ذلك أنه إذا كان y_1 ، y_2 حلين خاصين لهذه المعادلة و y الحل العام لها فانه يكون :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \text{cons t}$$

إذا عرفنا حلّاً خاصاً للمعادلة (1) فان الحل العام يساوي مجموع الحل الخاص المذكور والحل العام للمعادلة بلا طرف ثان .

٢ – معادلة بيرنوني Bernoulli : $y' + f(x)\,y = g(x)\,y^{n}$

حيث n عدد جبري كيفي .

نؤول هذه المعادلة الى معادلة خطية عندما نجري عليها التحويل $z = y^{1-n}$ وتأخذ الشكل :

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + f(x)\,z = g(x)$$

يمكننا أن نعيد، إلى شكل بيرنوني، المعادلة التي من الشكل :

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy + k\,x^{m}\,(x\,dy - y\,dx) = c \qquad (4)$$

وذلك باجراء التحويل $y = u\,x$ فنأخذ الشكل :

$$[\,\varphi(u) + u\,\psi(u)\,]\frac{dx}{du} + x\,\psi(u) + k\,x^{m+2} = o$$

ونعتبر x هو التابع و u المتحول .

٣ – معادلة جاكوبي Jacobi

$$(a + a_1 x + a_2 y)(x\,dy - y\,dx) - (b + b_1 x + b_2 y)\,dy + (c + c_1 x + c_2 y)\,dx = o \,.$$

إذا كان $a = b = c = o$ تحولت المعادلة إلى معادلة بيرنوني من الشكل (4) ولنعيد الحالة العامة إلى هذه الحالة الخاصة نفرض :

$$y = Y + \beta \quad , \quad x = X + \alpha$$

ويجب من اجل ذلك أن يكون :

$$\frac{a + a_1\alpha + a_2\beta}{1} = \frac{b + b_1\alpha + b_2\beta}{\alpha} = \frac{c + c_1\alpha + c_2\beta}{\beta} = \gamma$$

ونحقق γ المعادلة :

$$\begin{vmatrix} a-\gamma & a_1 & a_2 \\ b & b_1-\gamma & b_2 \\ c & c_1 & c_2-\gamma \end{vmatrix} = o$$

٤ – معادلة ريكاتي Riccati :

$$y' + f(x)\,y^{2} + g(x)\,y = h(x)$$

إذا علم حل خاص لهـــذه المعادلة نرمز له بـ y_1 فـــان تغيير المتحول $y = z + y_1$ يجعلها لاتحوي حداً مستقلاً عن z وهي من الشكل :

$$\frac{dz}{dx} + [g(x) + 2f(x)y_1]z + f(x)z^2 = o$$

وهي معادلة من نوع بيرنوئي تحل بفرض $u = \frac{1}{z}$ ونجد :

$$u = c \cdot h(x) + \varphi(x)$$

ويكون

$$y = y_1 + \frac{1}{c \cdot h(x) + \varphi(x)} = \frac{c \cdot h_1(x) + \varphi_1(x)}{c \cdot h(x) + \varphi(x)}$$

إن الطرف الثاني من هذه العلاقة تناظري بالنسبة لـ c وينتج عن ذلك أنه اذا كان (y_1 , y_2 , y_3 , y_4) أربع حلول خاصة المعادلة المذكورة تقابل القيم c_1 , c_2 , c_3 , c_4 للثابت الاختياري c فانه يكون :

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2} : \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = \text{const}$$

ومعنى ذلك أنه اذا عرفت ثلاثة حلول خاصة للمعادلة المفروضة فان الحل العام يحقق المعادلة :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \text{const}$$

تمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية :

٧٥ - $y' - ay = e^{bx}$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بلا طرف ثان فنجد على التوالي :

$$y' - ay = o \quad , \quad \frac{dy}{y} = a\,x \quad , \quad y = c\,e^{ax}$$

لنطبق طريقة تحويل الثابت الاختياري c فنجد :

$$y' = ace^{ax} + c'e^{ax}$$

لنحمل قيمة المشتق في المعادلة المفروضة فنجد :

$$a\,ce^{ax} + c'e^{ax} - ace^{ax} = e^{bx}$$

$$c'e^{ax} = e^{bx} \quad ، \quad c' = e^{(b-a)x}$$

$$c = \int e^{(b-a)x}\,dx = \frac{e^{(b-a)x}}{b-a} + \lambda \cdot$$

ويكون أخيراً حل المعادلة التفاضلية المفروضة هو :

$$y = \frac{e^{bx}}{b-a} + \lambda e^{ax}$$

حيث λ ثابت اختياري ·

٧٦ - $y' \sin x - y \cos x = tg\, x$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$y' \sin x - y \cos x = o \quad ، \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$$

وبأخذ تكامل طرفي العلاقة الأخيرة نجد :

$$\log y = \log \sin x + \log c \quad ، \quad y = c \sin x$$

لنحول الثابت الإختياري c ونحسب مشتق y ونبدل في المعادلة المفروضة:

$$y' = c' \sin x + c \cos x$$

$$(c' \sin x + c \cos x) \sin x - c \sin x \cos x = tg\, x$$

$$c' \sin^2 x = tg\, x \quad , \quad dc = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{dx}{tgx \,.\cos^2 x}$$

$$c = \log |\, tg\, x\,| + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة :

$$y = \sin x\, [\, \lambda + \log |\, tg\, x \,|\,]$$

٧٧ - $x\,y' + y = y^3$

إن هذه المعادلة من نوع بيرنوني تؤول الى معـــادلة خطية إذا فرضنا $z = y^{-2}$ ويكون :

$$z' = -2\, y' \,.\, y^{-3}$$

تأخذ المعادلة المفروضة بعد ان نقسم طرفيها على y^3 الشكل :

$$x\, y'\, y^{-3} + y^{-2} = 1$$

او :

$$-\frac{1}{2} x\, z' + z = 1$$

وهذه معادلة خطية بالنسبة لـ z حلهـا العام $z = 1 + \lambda\, x^2$ ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$\lambda\, x^2 y^2 + y^2 = 1$$

٧٨ – حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' - \frac{1 + 3x^2}{x(1+x^2)}\, y = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

وعين الحل الخاص الذي ينعدم من أجل $x = 1$

إن هذه المعادلة خطية نحلها بدون طرف ثان :

$$\frac{dy}{y} = \frac{(1+3x^2)dx}{x(1+x^2)}$$

$$\log y = \log x(1+x^2) + \log c$$

$$y = c\, x(1+x^2)$$

لنحول c ولنحسب y' ثم لنحمل هذه القيمة في المعادلة المفروضة :

$$y' = c(1+3x^2) + c'\, x(1+x^2)$$

$$c(1+3x^2) + c'\, x(1+x^2) - \frac{(1+3x^2)\,.\,c\, x(1+x^2)}{x(1+x^2)}$$

$$= \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$c' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وبتطبيق الدستور :

$$2(n-1)J_n = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$$

حيث : $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ نجد :

$$2\ J_2 = 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$+ \operatorname{Arc\,tg} x + \lambda$$

ونجد أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = x(1+x^2)\left[\frac{x}{1+x^2} + \lambda\right] = x^2 + \lambda x(1+x^2)$$

لتحقيق الشرط المعطى بنص المسألة وهو ان $y = o$ من أجل $x = 1$
نبدل في الحل العام فنجد :

$$o = 1 + 2\lambda$$

ومنه : $\lambda = -\frac{1}{2}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$y = x^2 - \frac{x(1+x^2)}{2}$$

٧٩–حل المعادلة : $\left(\frac{x}{y} + y\right)dy + dx = o$

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = -y$$

وهي معادلة خطية عندما نعتبر x تابعاً و y متحولاً .

فنحلها بدون طرف ثان فنجد :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o \quad , \quad \log x + \log y = \log c$$

$$x = \frac{c}{y}$$

لنحول الثابت : $\frac{dx}{dy}=\frac{c'}{y}-\frac{c}{y^2}$

$$\frac{c'}{y}=-y \quad ، \quad c'=-y^2 \text{ ، } c=-\frac{y^3}{3}+\lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة : $x=-\frac{y^2}{3}+\frac{\lambda}{y}$

٨٠ - حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a\,y^2\log x$

الحل : إن هـذه المعادلة من نوع بيرنوني فلنقسم طرفيها على y^2 ولنفرض

$$\frac{1}{y}=z \quad . \quad z'=\frac{-y'}{y^2}$$

فتأخذ المعادلة المفروضة ، على التوالي ، الاشكال :

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{xy}=a\log x$$

$$-z'+\frac{1}{x}z=a\log x \qquad (1)$$

وهي معادلة خطية نحلها أولاً بلا طرف ثان فنجد :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x} \quad , \quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} , \; z=cx$$

نحول الثابت الاختياري ونشتق z ثم نبدل في المعادلة (١) فنحصل على المراحل التالية :

$$z'=c'x+c$$

$$-c'x-c+c=a\log x \; , \; -c'x=a\log x$$

$$c'=-\frac{a}{x}\log x \; , \; c=-a\int\log x\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}a\log^2 x+\lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (١) :

$$z=-\frac{1}{2}\,a\,x\log^2 x+\lambda x$$

واذا عدنا إلى التابع y فاننا نحصل على التكامل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = \frac{2}{2 \lambda x - a x \log^2 x}$$

٨١– حل المعادلة التفاضلية $3 y^2 y' - a y^3 = x + 1$

الحل : يمكن حل هذه المعادلات بطريقتين نفرض في الأولى $z = y^3$ فتصبح المعادلة المفروضة خطية :

$$z' - a z = x + 1$$

نحلها حسب المراحل التالية :

$$\frac{dz}{z} = a\, dx \qquad z = c\, e^{ax}$$

$$z' = c'\, e^{ax} + a\, c\, e^{ax}$$

$$c'\, e^{ax} = x + 1$$

$$c = \int e^{-ax}\, x\, dx + \int e^{-ax}\, dx$$

$$c = - \frac{x}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax} + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$z = y^3 = \lambda\, e^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$$

أما إذا قسمنا طرفي المعادلة المفروضة على y^2 فانها تأخذ الشكل :

$$3\, y' - a\, y = (x + 1)\, y^{-2}$$

وهي معادلة من نوع بيرنوئي نحلها بأن نفرض $z = y^3$ ونتابع كالسابق :

٨٢– حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} \cdot (x^2 y^3 + x y) = 1$

الحل : يمكن اعتبار x تابعاً و y متحولاً وكتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\frac{dx}{dy} - x\, y = x^2\, y^3$$

فتأخذ كما نلاحظ شكل معادلة بيرنولي نحلها بأن نفرض $x = \frac{1}{z}$

$x' = \frac{-z'}{z^2}$ وتأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$z' + yz = -y^3$$

وهي معادلة خطية نحلها فنجد على التوالي :

$$\frac{dz}{z} + y\,dy = 0 \quad , \quad \log z + \frac{1}{2}y^2 = \log c$$

$$z = c\,e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

لنعتبر c متحولاً فنحصل على المعادلة التي تعطينا c :

$$c'\,e^{-\frac{1}{2}y^2} = -y^3 \quad , \quad c = -\int y^3 e^{\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

نفرض في هذا التكامل $t = \frac{1}{2}y^2$ $dt = y\,dy$ فتأخذ الشكل :

$$c = -2\int te^t\,dt = -2(te^t - e^t) + \lambda = (2 - y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + \lambda$$

ومنه

$$z = \frac{1}{x} = (2 - y^2) \quad + \lambda e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

أو

$$e^{\frac{1}{2}y^2} = x\left[(2 - y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + \lambda\right]$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة :

٨٣– حل المعادلة التفاضلية : $(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} = xy$ (2)

الحل : يمكن هذه المعادلة بطرق متعددة :

الطريقة الأولى : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$xy\frac{dx}{dy} = x^2 - y^4$$

فاذا اعتبرنا $z = x^2$ تابعاً و y متحولاً انقلبت المعادلة إلى معادلة خطية من الشكل :

$$yz' - 2z = -2y^4 \qquad (3)$$

نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$yz' = 2z \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{2\,dy}{y} \; , \; \log z = 2\log y + \log c \; , \; z = cy^2$$

نحول الثابت الاختياري ونحسب z' ونحمل الناتج في المعادلة (٣) فنجد على التوالي:

$$c' y^3 = -2y^4 \quad , \quad c' = -2y \quad \cdot \quad c = -y^2 + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (٣) ومن بعده الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$z = -y^4 + \lambda y^2$$

$$x^2 = -y^4 + \lambda y^2$$

أو :

$$x^2 + y^4 = \lambda y^2$$

الطريقة الثانية : اذا قسمنا طرفي المعادلة (٢) على x فانـــه يمكن كتابة الناتج بالشكل :

$$y \frac{dx}{dy} - x = -x^{-1} y^4$$

وهي كما يلاحظ : معادلة من نوع بيرنولي نحلها بالطرق المعروفة .

الطريقة الثالثة : يمكننا أن نتخذ تابعاً جديداً u معرفاً بالعلاقة $x = uy$ فنجد :

$$dx = u\,dy + y\,du .$$

وبذلك تأخذ المعادلة الشكل :

$$(u^2 y^2 - y^4)\,dy = u y^2 (u\,dy + y\,du)$$

أو

$$y\,dy + u\,du = 0$$

ومنه

$$y^2 + u^2 = \lambda^2$$

وإذا عدنا إلى x نجد :

$$y^4 + x^2 = \lambda^2 y^2$$

٨٤– حل المعادلة التفاضلية : $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

الحل : يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$2xy' - y = \frac{-x}{y}$$

وهي من نوع بيرنولي كما يلاحظ بسهولة فلنفرض $z = y^2$ $\quad z' = 2yy'$

فتأخذ المعادلة الشكل :

$$xz' - z = -x$$

وهي معادلة خطية نحلها حسب المراحل التالية :

$$x z' - z = 0 \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad , \quad z = c\,x$$

نحول الثابت الاختياري c فنجد :

$$x^2 c' = -x \quad , \quad c' = -\frac{1}{x} \quad , \quad c = -\log x + \lambda \quad , \quad z = \lambda x - x \log x$$

ونجد أخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة وهو :

$$y^2 = \lambda x - x \log x$$

٨٥ – حل المعادلة التفاضلية :

$$\left(2x \,\mathrm{sh}\frac{y}{x} + 3y \,\mathrm{ch}\frac{y}{x} \right) dx - 3x \,\mathrm{ch}\frac{y}{x}\, dy + \frac{3(x\,dy - y\,dx)}{x^2} = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة يمكن كتابتها بشكل يجعلها من نوع بيرنوني وذلك إذا فرضنا :

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \quad , \quad u = \frac{y}{x} \quad , \quad dy = u\,dx + x\,du \quad , \quad y = x\,u$$

فتأخذ عندها المعادلة الشكل التالي بعد تقسيم طرفيها على x :

$$(2\,\mathrm{sh}\,u + 3u\,\mathrm{ch}\,u)\,dx - 3\,\mathrm{ch}\,u\,(u\,dx + x\,du) + 3x^{-1}\,du = 0$$

$$2\,\mathrm{sh}\,u\,\frac{dx}{du} - 3x\,\mathrm{ch}\,u + 3x^{-1} = 0$$

وتؤول إلى معادلة خطية عندما نفرض $z = x^2$ بعد ضرب طرفيها بـ x :

$$(1) \qquad \mathrm{sh}\,u\,z' - 3z\,\mathrm{ch}\,u = -3$$

نحلها بدون طرف ثان فنجد على التوالي :

$$\frac{dz}{z} = \frac{3\,\mathrm{ch}\,u\,du}{\mathrm{sh}\,u} \quad , \quad \log z = 3\log \mathrm{sh}\,u + \log c$$

$$z = c\,\mathrm{sh}^3 u$$

نعتبر c متحولاً تابعاً لـ x ونشتق هذه العلاقة لحساب z' ثم حمل هذا

المشتق في المعادلة (١) فنجد على التوالي :

$$z' = c' \operatorname{sh}^3 u + 3 c \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch} u$$

$$c' \operatorname{sh}^4 u = -3 \quad , \quad c = -3 \int \frac{du}{\operatorname{sh}^4 u}$$

إن من المعروف ان :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} = \frac{\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 u}{\operatorname{th}^2 u}$$

وإذا فرضنا $t = \operatorname{th} u$ يكون $du = \dfrac{dt}{1 - t^2}$ ، $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^4 u} = \dfrac{(1 - t^2)^2}{t^4}$

ونأخذ عندها التكامل السالف الذكر الشكل :

$$c = -3 \int \frac{dt}{1 - t^2} \cdot \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} = -3 \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt$$

$$c = -3 \int \frac{dt}{t^4} + 3 \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t} + \lambda$$

وإذا بدلنا t بالقيمة التي فرضناها فسوف نجد :

$$z = \operatorname{ch}^3 u - 3 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^2 u + \lambda \operatorname{sh}^3 u$$

وإذا عدنا إلى المتحولات الأصلية نجد الحل العام للمعادلة المفروضة من الشكل :

$$x^2 = \lambda \operatorname{sh}^3 \frac{y}{x} + \operatorname{ch}^3 \frac{y}{x} - 3 \operatorname{ch} \frac{y}{x} \operatorname{sh}^2 \frac{y}{x}$$

٨٦ – حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(x + 3y)\,dx + 2y\,dy + a(x + y)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة حالة خاصة من معادلة جاكوبي يمكن جعلها من نوع معادلة التمرين السابق بأن نقسم طرفيهـــا على عامل $(x\,dy - y\,dx)$ وهو $x + y$ فتأخذ الشكل التالي :

$$\frac{x + 3y}{x + y} dx + \frac{2y}{x + y} dy + a(x\,dy - y\,dx) = 0$$

ثم نفرض كما سبق $u = \frac{y}{x}$ فتأخذ الشكل :

$$\frac{1+3u}{1+u}dx + \frac{2u}{1+u}(u\,dx + x\,du) + ax(u\,dx + x\,du - u\,dx) = o$$

وبعد الاختصار والجمع والتقسيم على du تأخذالمعادلة الشكل التالي :

$$\frac{2u^2+3u+1}{1+u}\,\frac{dx}{du} + \frac{2ux}{1+u} + a x^2 = o$$

أن هذه المعادلة من نوع بيرنولي حيث نعتبر x تابعاً و u متحولاً تحل بأن نتخذ تابعاً جديداً z معرفاً بالعلاقة $z = \frac{1}{x}$ فتأخذ عندها المعادلة السابقة الشكل :

$$\frac{2u^2+3u+1}{1+u}z' - \frac{2uz}{1+u} = a$$

وهي معادلة خطية نحلها بدون طرف ثان حسب المراحل التالية :

$$\frac{dz}{z} = \frac{2u\,du}{2u^2+3u+1} = \frac{2du}{u+1} - \frac{2du}{2u+1}$$

$$\log z = 2\log(u+1) - \log(2u+1) + \log c$$

$$z = \frac{c(u+1)^2}{2u+1}$$

نحول الثابت الاختياري c ونشتق z ثم نحمل الناتج في المعادلة التفاضلية بالنسبة لـ z فتأخذ الشكل :

$$\frac{c'(u+1)^2}{2u+1}\cdot\frac{2u^2+3u+1}{1+u} = a$$

$$c'(u+1)^2 = a \quad , \quad c = \int\frac{a\,du}{(1+u)^2} = \frac{-a}{1+u} + \lambda$$

إذا حملنا قيمة c هذه في إفادة z فانها تأخذ الشكل :

$$z = \frac{-a(u+1)}{2u+1} + \lambda\frac{(u+1)^2}{2u+1}$$

واذا عدنا إلى المتحولين y , x فسوف نجد الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$\frac{1}{x} = \frac{-a(y+x)}{2y+x} + \lambda \frac{(y+x)^2}{x(2y+x)}$$

أو بالشكل :

$$2y + x + a x (y + x) = \lambda (y + x)^2$$

٨٧ – حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(x - y + 1)dx + (x - y - 1)dy + (x + y - 1)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

الحل : إن هذه المعادلة هي من الشكل العام لمعادلة جاكوبي . لحلها نعيدها إلى الشكل الخاص الذي يطابق شكل معادلة التمرين السابق وذلك باجراء تحويل معرف بالعلاقتين :

$$y = Y + \beta \quad ، \quad x = X + \alpha$$

ونختار α ، β بحيث تكون المعادلة الناتجة مشابهة لمعادلة التمرين السابق أي أن تكون أمثال dx ، dy ، $x\,dy - y\,dx$ غير حاوية لأعداد ثابتة.

لتبدل في المعادلة المفروضة :

$$(X + \alpha - Y - \beta + 1)\,dX + (X + \alpha - Y - \beta - 1)\,dY + (X + \alpha + Y + \beta - 1)\,[(X + \alpha)\,dY - (Y + \beta)\,dX] = 0$$

$$(X - Y)\,dX + (\alpha - \beta + 1)\,dX + (X - Y)\,dY + (\alpha - \beta - 1)\,dY + (X + Y)(X\,dY - Y\,dX) + (X + Y)(\alpha\,dY - \beta\,dX) + (\alpha + \beta - 1)(X\,dY - Y\,dX) + (\alpha + \beta - 1)(\alpha\,dY - \beta\,dX) = 0$$

لتأخذ هذه المعادلة الشكل المختصر للتمرين السابق يجب ان يكون عاملا dY،dX المستقلين عن X ، Y مساويين للصفر أي ان يكون :

$$(\alpha - \beta + 1) - \beta(\alpha + \beta - 1) = 0$$
$$(\alpha - \beta - 1) + \alpha(\alpha + \beta - 1) = 0$$

يمكن كتابة هاتين المعادلتين بالشكل :

$$\frac{\alpha+\beta-1}{1}=\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}=\frac{\alpha-\beta-1}{-\alpha}=\lambda \qquad (1)$$

حيث فرضنا القيمة المشتركة للنسب الثلاثة مساوية λ .

ينتج عن (١) المعادلات الخطية الثلاثة بالنسبة لـ α, β

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha+\beta-(1+\lambda)=0 \\ \alpha-(\lambda+1)\beta+1=0 \\ \alpha(1+\lambda)-\beta-1=0 \end{cases}$$

لإمكان حل جملة المعادلات الخطية (٢) ذات المجهولين β , α اي لتكون هذه المعادلات متوافقة ، يلزم ويكفي أن يكون :

$$(3)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -(1+\lambda) \\ 1 & -(1+\lambda) & 1 \\ 1+\lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

إذا نشرنا هذا المعين بالطرق المعروفة فاننا نجد :

$$\Delta=(2+\lambda)^2(\lambda-1)$$

ويكون للمعادلة (٣) جذر مضاعف هو (— ٢) وجذر بسيط هو (١)

إذا بدلنا في المعادلات (٢) λ بـ (— ٢) فانها تصبح كلهـــا من شكل واحد وهذا يعني أن هذه القيمة غير موافقة أما إذا بدلنا λ بـ (١) فان هـذه المعادلات تأخذ الشكل :

$$\alpha+\beta-2=0$$
$$\alpha-2\beta+1=0$$
$$2\alpha-\beta-1=0$$

ونلاحظ بسهولة أن المعادلة الثالثة تنتج عن المعـادلتين الأولى والثانية بجمعهما الى بعضهما . نحل المعادلتين الأولى والثانية فنجد $\alpha=1$ ، $\beta=1$.

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة المفروضة فانها تأخذ الشكل التالي، حيث نلاحظ مرة ثانية أن العاملين الثابتين لـ dx و dy معدومان :

$$(X - Y + 1)\,dX + (X - Y - 1)\,dY + (X + Y + 1)\left[(X+1)\,dY - (Y + 1)\,dX\right] = o$$

$$(X - Y)\,dX + (X - Y)\,dY + (X + Y)(X\,dY - Y\,dX) + (X\,dY - Y\,dX) + (X + Y)(dY - dX) = o$$

وبعد الترتيب تأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$-3Y\,dX + 3X\,dY + (X + Y)(X\,dY - Y\,dX) = o$$

تقسم على $X + Y$ ونفرض $Y = uX$ فنجد :

$$\frac{-3u}{1+u}\,dX + \frac{3}{1+u}(u\,dX + X\,du) + \left[X(u\,dX + X\,du) - Xu\,dX\right] = o$$

وبعد الإصلاح نلاحظ أنه لن تبقى في هذه المعادلة حـــدود تحوي التفاضل dX بل تكون من الشكل :

$$\left[\frac{3X}{1+u} + X^2\right] du = o$$

وهذا يعني ان $du = o$ أو $u = c$ وإذا عدنا إلى الفرضيات التي فرضناها اعلاه نجد ان الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$u = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x-1} = c \;,\qquad y - 1 = c\,(x \quad 1)$$

٨٨ – برهن أن للمعادلة التفاضلية :

$$(1) \qquad y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = o$$

الحل الخاص $y_1 = \cos x$ ثم اوجد حلها العام .

الحل : لكي نبرهن ان $y_1 = \cos x$ حل خاص للمعادلة المفروضة نشتق هذا التابع ونبدل في المعادلة ونظهر أنها تنقلب إلى مطابقة :

$$y' = -\sin x$$

$$(2) \quad -(1 - \sin x \cos x) \sin x + \cos^3 x - \cos x + \sin x \equiv 0$$

$$-\sin x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x - \cos x + \sin x \equiv 0$$

$$(1 - \cos^2 x) \cos x + \cos^3 x - \cos x \equiv 0$$

ونلاحظ بسهولة صحة المطابقة الأخيرة .

بعدان برهنا ان $y_1 = \cos x$ حل خاص نلاحظ ان المعادلة المفروضة هي معادلة ريكاتي ونجري تغيير التابع المعرف بالعلاقة $y = y_1 + z$ اي $y = z + \cos x$ ونجد : $y' = z' - \sin x$

$$(z' - \sin x)(1 - \sin x \cos x) + (z + \cos x)^2 \cos x$$
$$-(z + \cos x) + \sin x = 0$$

واستناداً إلى العلاقة (١) فان هــذه المعادلة تصبح بعد الاختصار من الشكل :

$$z'(1 - \sin x \cos x) + z(z + 2\cos x)\cos x - z = 0$$

المعادلة التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$z'(1 - \sin x \cos x) + z(2\cos^2 x - 1) + z^2 \cos x = 0$$

وهي كما يلاحظ من نوع بيرنوئي نحلها بأن نقسم طرفيها على z^2 ثم نفرض $u = \frac{1}{z}$ فيكون : $u' = \frac{-z'}{z}$ وتأخذ عندها المعادلة الشكل التالي :

$$(3) \quad (1 - \sin x \cos x) u' - (2\cos^2 x - 1) u = \cos x$$

وهي معادلة خطية نحلها بلا طرف ثان :

$$\frac{du}{u} = \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - \sin x \cos x} dx = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx$$

إذا لاحظنا ان صورة الطرف الثاني تساوي مشتق المخرج مضروباً باشارة (–) فاننا نجد بعد استكمال الطرفين :

$$\log u = \log c - \log(1 - \sin x \cos x)$$

$$u = \frac{c}{1 - \sin x \cos x}$$

نطبق طريقة تحويل الثابت c من أجل حساب الحل العام للمعادلة (3) فنجد :

$$c = \sin x + \lambda \quad , \quad c' = \cos x$$

ونجد على التوالي :

$$u = \frac{1}{z} = \frac{\sin x + \lambda}{1 - \sin x \cos x} \quad , \quad z = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin x + \lambda}$$

$$y = z + \cos x = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin x + \lambda} + \cos x = \frac{1 + \lambda \cos x}{\sin x + \lambda}$$

وهو الحل العام للمعادلة المفروضة ونلاحظ عليه التناظر بالنسبة للثابت الإختياري λ .

٨٩ – لتكن المعادلة :

$$(١) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^3}$$

آ – يطلب البرهان على أن لهذه المعادلة حل خاص من الشكل αx^n حيث n عدد موجب صحيح يطلب حسابه .

ب – يطلب حساب الحل العام لهذه المعادلة

حـ – يطلب البرهان على أن لهذه المعادلة ثلاثة حلول خاصة من الشكل $y = ax + b$ وإيجاد الحل العام .

الحل : آ – لبرهان المطلوب الأول وحساب α ، n نبـدل في المعادلة

المفروضة (١) التي يجب ان تنقلب إلى المطابقة :

$$n \alpha x^{n-1} \equiv \frac{\alpha^2 x^{2n} - \alpha x^{n+2} - 2x}{1 - x^3}$$

يمكن كتابة هذه المطابقة بالشكل :

$$n \alpha x^{n-1} - n \alpha x^{n+2} \equiv \alpha^2 x^{2n} - \alpha x^{n+2} - 2x$$

نقسم طرفي هذه المطابقة على x الذي لا يمكن ان يكون مطابقاً للصفر :

$$n \alpha x^{n-2} - n \alpha x^{n+1} \equiv \alpha^2 x^{2n-1} - \alpha x^{n+1} - 2 \qquad (2)$$

نلاحظ أنه لتستقيم هذه المطابقة يجب ان يطابق الحد الأخفض درجة في الطرف الأيمن الحد الأخفض درجة في الطرف الأيسر أي :

$$n \alpha x^{n-2} \equiv -2$$

وهذا يعني أن االاس $n - 2$ يجب ان يكون مساوياً للصفر أي $n=2$ و $\alpha=-1$ وهذا يحقق المطابقة وينتج عن ذلك أن الحل الخاص هو $y_1 = -x^2$

ب – لايجاد الحل العام نجري تغيير التابع حسب العلاقة التالية ، بعد أن نلاحظ ان المعادلة المفروضة هي معادلة من نوع ريكاتي :

$$y = -x^2 + u \quad , \quad y' = -2x + u'$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) فإنها تأخذ الشكل :

$$-2x + u' = \frac{(u - x^2)^2 - x^2(u - x^2) - 2x}{1 - x^3}$$

تأخذ هذه المعادلة بعد الاصلاح الشكل :

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 3ux^2}{1 - x^3}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{3x^2}{1 - x^3} u = \frac{u^2}{1 - x^3}$$

وهي ، كما هو واضح ، معادلة من نوع بيرنوئي نحلها بأن نقسم طرفيها على

u^2 ثم نفرض $z = \frac{1}{u}$ فتأخذ الشكل :

$$z' - \frac{3x^2}{1-x^3} z = - \frac{1}{1-x^3} \qquad (4)$$

وهي معادلة خطية نحلها بدون طرف ثان حسب المراحل :

$$\frac{dz}{z} = \frac{3x^2}{1-x^3} dx \quad , \quad \log z = \log c - \log(1 - x^3)$$

$$z = \frac{c}{1-x^3}$$

إذا اعتبرنا c متحولاً تابعاً لـ x وأخذنا مشتق العلاقة السابقة وحملنا كل ذلك في المعادلة (٤) فاننا نجد :

$$\frac{c'}{1-x^3} = - \frac{1}{1-x^3} \quad , \quad c' = -1 \qquad c = -x + \lambda$$

ويكون الحل العام للمعادلة (٤) من الشكل :

$$z = \frac{-x + \lambda}{1 - x^3}$$

وإذا عدنا إلى المتحولات الاصلية فسوف نجد على التوالي :

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1 - x^3}{\lambda - x}$$

$$y = u - x^2 = \frac{1 - x^3}{\lambda - x} - x^2 = \frac{1 - x^2 \lambda}{\lambda - x}$$

وهو الحل العام لمعادلة ريكاتي المفروضة .

جـ ــ لنكتب ان الحل يطابق الشكل $a x + b$ ومن ثم لنحسب قيم λ التي تحقق مثل هذا الشكل :

$$\frac{1 - x^2 \lambda}{\lambda - x} \equiv a x + b$$

تأخذ هذه المطابقة بعد اصلاحها الشكل :

$$(a - \lambda) x^2 + (b - a\lambda) x + 1 - b\lambda \equiv 0$$

لتكون هذه المطابقة محققة مهما كانت قيمة المتحول x يجب ان يكون :

$$a - \lambda = o \quad , \quad b - a\lambda = o \quad , \quad 1 - b\lambda = o$$

نستخرج من المعادلة الاولى ان $a = \lambda$ ومن المعادلة الثانية انه $b = \lambda^2$

ومن المعـــادلة الثالثة ان $\lambda^3 = 1$ ويكون لـ λ ثلاث قيم هي الجذور التكعيبية للوحدة :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = \omega \quad , \quad \lambda_3 = \omega^2$$

وتكون التكاملات الخاصة للمعادلة المفروضة التي هي من الشكل المطلوب أي :

$$y_1 = x + 1 \quad , \quad y_2 = \omega x + \omega^2 \quad , \quad y_3 = \omega^2 x + \omega$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة من الشكل :

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \mu$$

او :

$$y = \frac{-(1 + \mu\omega^2)x^2 + \mu + \omega^2}{-(\mu + \omega^2)x + 1 + \mu\omega^2}$$

واذا فرضنا $c = \frac{1 + \mu\omega^2}{\mu + \omega^2}$ فان التكامل السابق يأخذ الشكل :

$$y = \frac{-cx^2 + 1}{-x + c}$$

وهو مطابق للشكل الذي وجدناه اعلاه .

تمارين للحل

حل المعادلات التفاضلية التالية وتحقق من الاجوبة الموافقة :

٩٠ - $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax \quad , \quad y = a + c\sqrt{1 - x^2}$

٩١ - $y' \sin x - y \cos x - \sin^2 x = o \quad , \quad y = (c + x)\sin x$

٩٢ - $y'(x^2 - 1) - xy - x(x^2 - 1) = o \quad , \quad y = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2 - 1}$

٩٣ – $x y' - y + \log x = 0$ ، $y = \log x + 1 + c x$

٩٤ – $y' + \dfrac{y}{1 - x^2} - \dfrac{1 + x}{(1 - x)^3} = 0$ ، $y = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2 + c\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

٩٥ – $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^{\frac{5}{2}}$ ، $y = \dfrac{2(x + 1)^{\frac{7}{2}}}{3} + c(x + 1)^2$

٩٦ – $x(1 - x^2)dy + (2x^2 - 1)y\,dx = a x^3 dx$ ، $y = a x + c x\sqrt{1 - x^2}$

٩٧ – $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1 - 2x}{x^2} y = 1$ ، $y = x^2(1 + c e^{\frac{1}{x}})$

٩٨ – $y' \sin x + 3 y \cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

ج : $y = \dfrac{2}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{2\sin^3 x} \log \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{c}{\sin^3 x}$

٩٩ – $(2x - x^2)y' + (x - 1)y = 2x - 1$ ، $y = x + 1 + c\sqrt{2x - x^2}$

١٠٠ – $y' - y \operatorname{tg} x + \cos^2 x = 0$ ، $y = \dfrac{c}{\cos x} - \operatorname{tg} x + \dfrac{\sin^3 x}{3\cos x}$

١٠١ – $(1 + x^2) y' + \dfrac{x^2 - 1}{x} y + 2 = 0$ ، $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}(c - \log x^2)$

١٠٢ – $x \cos x\, y' + y(x \sin x + \cos x) = 1$ ، $x y = \sin x + c \cos x$

١٠٣ – $x \log x\, y' + y = 2 \log x$ ، $y \log x = \log^2 x + c$

١٠٤ – $dx + x\,dy = e^{-y} \sec^2 y\, dy$ ، $x = e^{-y}(c + \operatorname{tg} y)$

١٠٥ – $(x + 2y^3) y' = y$ ، $x = y(y^2 + c)$

١٠٦ – $(x - 2) y' = y + 2(x - 2)^3$ ، $y = (x - 2)^3 + c(x - 2)$

١٠٧ – $y' + y \operatorname{cotg} x = 2 e^{\cos x}$ ، $y \sin x + 2 e^{\cos x} = c$

١٠٨ – $y \log y\, dx + (x - \log y)\, dy = 0$ ، $2x \log y = \log^2 y + c$

بين أن المعادلات التالية من نوع بيرنولي ثم حلها بعد تحويلها الى معادلات خطية وتأكد من النتائج الموافقة :

١٠٩- $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$ ، $y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}$

١١٠- $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = ax\, y^2$ ، $y = (c\sqrt{1 - x^2} - a)^{-1}$

١١١- $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$ ، $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + c}$

١١٢- $xy' + y = \frac{a^2}{x^2 y^2}$ ، $x^3 y^3 - 3a^2 x + c = 0$

١١٣- $xy' + y = y^2 \log x$ ، $y = \frac{1}{1 + cx + \log x}$

١١٤- $\frac{ds}{dt} = \frac{t^2 + s^2}{st}$ ، $s^2 = t^2 \log t^2 + c\, t^2$

١١٥- $(\frac{x}{y} + y)\, dy + dx = 0$ ، $xy + \frac{1}{3} y^3 = c$

١١٦- $y^2\, dx - (x^2 + xy)\, dy = 0$ ، $y = c\, e^{-\frac{y}{x}}$

١١٧- $(2x - 10y^3)\, y' + y = 0$ ، $x = 2y^3 + c\, y^{-2}$

١١٨ $dx + x\, dy = e^{-y} \sec^2 y\, dy$

١١٩- $y' - y = x y^5$ ، $y^{-4} = +x + \frac{1}{4} + ce^{4x}$

١٢٠- $y' + 2xy + xy^4 = 0$ ، $y^{-3} = -\frac{1}{2} + c\, e^{3x^2}$

١٢١- $y' + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3}(1 - 2x) y^4$ ، $y - 3 = -1 - 2x + c\, e^x$

١٢٢- $x\, dy - [y + xy^3(1 + \log x)]\, dx = 0$ ، $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3} x^3 (\frac{2}{3} + \log x) + c$

حل المعادلات التفاضلية :

١٢٣ — $(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(x\,dy - y\,dx) = 0$

ج : $x - y + 1 + xy + \frac{1}{2} y^2 = c(1 + x)^2$

١٢٤ — $(x + 3y + 2)dx - (x - y - 2)dy + (x + y + 2)(x\,dy - y\,dx) = 0$

ج : $y(x + y) = 1 + x + y + c(x + y)^2$

١٢٥ — $(14x + 13y + 6)dx + (4x + 5y + 3)dy - (7x + 5y)$

$(x\,dy - y\,dx) = 0$

ج : $(y + 2) = c(x - 1)$

١٢٦ — $(7x - 8y + 5)dx - (7x - 8y)dy + 5(x + y)(x\,dy - y\,dx) = 0$

ج : $(2x - 3y + 1)(x + y + 1) = c(x + y - 1)^2$

١٢٧ — $(-x + 1)dx + (1 - y)dy + (x - y)(x\,dy - y\,dx) = 0$

ج : $(x + y + 1)^2 = c(x^2 + y^2 + 1)$

أوجد حلاً بسيطاً خاصاً لكل من معادلات ريكاتي التالية ثم أوجد الحل العام لكل منها .

١٢٨ — $xy' - y + y^2 = x^2$

١٢٩ — $xy' - y - y^2 = x^2$

١٣٠ — $3xy' - y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}$

١٣١ — حل المعادلة التفاضلية التالية بعد ان تبرهن أنها تقبل الحل الخاص $y = \operatorname{tg} x$

$$y' + y^2 - 3y \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$$

١٣٢ — برهن أن للمعادلة التالية $y' + y^2 - \frac{a^2}{x^4} = 0$ حلاً من الشكل :

$$\frac{c}{x^2} + \frac{d}{x}$$

ثم أوجد حلها العام .

١٣٣ - حل المعادلة التفاضلية :

$$m(1+x^2)y' = m^2y^2 + m(m-3)\frac{1-x^2}{x}\, y - (m-2)(m-4)$$

إذا علمت أنها تكون محققة من أجل تابع من الشكل $y = \frac{m-2}{m}\, x$

★ ★ ★