الفصل الأول

تشكيل المعادلات التفاضلية

١ ـ تعاريف :

آ ـ المعادلة التفاضلية هي معادلة من الشكل :

$$f[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$$

حيث نجد متحولاً x وتابعاً y ومشتقاته المتتالية $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ونقول إن هذه المعادلة من المرتبة n إذا حوت المشتق من المرتبة n للتابع y

ب ـ نسمي بحل المعادلة التفاضلية او بتكاملها ، كل تابع من الشكل $y=\varphi(x)$ بحيث أننا لو بدلنا في الطرف الأيسر من المعادلة المفروضة $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ بهذا التابع ومشتقاته فان هذا الطرف من المعادلة ينقلب إلى تابع لـ x مطابق للصفر في مجال يكون فيه (φ) ومشتقاته المتتالية معرفة .

وإذا مثلنا التابع $y=\varphi(x)$ بمنحن Γ في مستو محول على محورين متعامدين ox ، oy فإننا نسمي هذا المنحني بالمنحني التكاملي للمعادلة المفروضة .

حـ ـ حل المعادلة التفاضلية هو ايجاد كل الحلول أو كل المنحنيات التكاملية لهذه المعادلة .

٢ ـ تشكيل المعادلات التفاضلية :

لنتصور مجموعة من المنحنيات تتعلق بعدد من الوسطاء ولنفرض أن هذه المعادلات ممثلة بالمعادلة :

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0 \qquad (1)$$

يبرهن أن هـــذه المنحنيات تحقق ، في الحالة العامـــة ، معادلة تفاضلية من المرتبة n تنتج عن حذف الوسطاء $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ بين المعادلة (١) و $(n-1)$ معادلة أخرى تنتج عن المعادلة (١) بالإشتقاقات المتتالية أي :

$$f(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)=0$$
$$f'(x,y,\lambda_1,\lambda_2\dots\lambda_n)=0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n-1)}(x,y,\lambda_1,\lambda_2\dots)\lambda_n)=0$$

حيث نعتبر ، من أجل الإشتقاق ، y تابعاً ضمنياً لـ x .

هذا ويمكن أن تكون المعادلات التفاضلية تفسيراً لخواص هندسية او فيزيائية معينة .

٣ ـ الحل العام والحل والخاص :

يبرهن أن حل المعادلة التفاضلية من المرتبة n قد يحوي ثوابت اختيارية مستقلة عن بعضها عددها n ونسمى مثل هـذا الحل بالحل العام كما نسمي كل حل ينتج عن الحل العام ، بأعطاء هذه الثوابت أوبعضها قيماً خاصة ، بحل خاص. إن عدد الحلول الخاصة غير متناه .

٤ ـ الحل الشاذ :

نسمي بحل شاذ كل تابع يحقق المعادلة ولا يدخل تحت الحل العام .

تمارين محلولة

١ ـ شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع $y=cx+c-c^2$ حلاً لها .

الحل : لنشتق هذا التابع فنجد :

$$y'=c$$

إذا حملنا قيمة الثابت الاختياري هذه ، في التابع المفروض ، فاننا نجد المعادلة التفاضلية :

$$y=xy'+y'-y'^2$$

وهي المعادلة المطلوبة .

٢ ـ شكل المعـادلة التفاضلية لمجموع المنحنيات حيث c وسيط و a عدد ثابت :

$$(1)\qquad y^2-cx^2+\frac{a^2c}{1+c}=0$$

الحل : لنشتق العلاقة (١) فنجد :

$$2\, y\, y' - 2\, c\, x = 0$$

ومنه نجد :
$$c = \frac{y\, y'}{x}$$

لنستبدا في العلاقة (١) المفروضة $\frac{y\, y'}{x}$ بـ c فيكون :

$$y^2 - x\, y\, y' + \frac{a^2\, y\, y'}{x + y\, y'} = 0$$

وبعد الاصلاح نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$x\, y\, (1 - y'^2) = (x^2 - y^2 - a^2)\, y'$$

٣ – شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع $y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3$ حلًا لها .

الحل : لحذف الثوابت الاختيارية الثلاثة التي يحويها هذا التابع نحتاج ، بالاضافة إلى التابع المذكور نفسه ، إلى ثلاث علاقات نحصل عليها باشتقاقات ثلاثة متتاليه لعلاقة التابع المفروض أي :

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2\, c_2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{-6\, c_2}{x^4}$$

ونجد العلاقة ، بين التابع ومشتقاته ، المستقلة على الثوابت الإختيارية ، بسهولة تامة وهي :

$$y''' + \frac{3}{x}\, y'' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة :

٤ – لتكن $x = A\cos(pt-\alpha)$ معادلة الحركـــة النوسية البسيطة . احذف الثابتين الإختياريين (A , α) .

الحل : لنشتق المعادلة المفروضة مرتين متتاليتين فنجد :

$$x' = -pA\sin(pt-\alpha)$$
$$x'' = -p^2 A\cos(pt-\alpha)$$

ونلاحظ بسهولة أن المعادلة الخالية من الثابتين الإختياريين هي :

$$x'' = -p^2 x$$

وهي معادلةمن المرتبة الثانية تبين الخاصة الأساسية في الحركة النوسيةوهي ان التسارع يتناسب مع بعد النقطة المتحركة عن المبدأ .

٥ – تأكد بحذف الثابت الإختياري C ، من أن التابع :

$$y = Cx + \frac{1}{C} \qquad (1)$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y = xy' + \frac{1}{y'} \qquad (2)$$

وتحقق من أن $y^2 = 4x$ هو حل لهذه المعادلة لايمكن استنتاجه من الحل العام (حل شاذ) وبرهن أن هـذا الحل الشاذ يمثل مغلف المنحنيات التكاملية التي يمثلها الحل العام .

إن المعادلة (٢) معادلة تفاضلية من المرتبة الأول والعلاقة (١) تحوي ثابتاً اختيارياً واحداً فاذا حقق التابع (١) المعادلة (٢) كان هذا التـــابـع هو الحل العـــام للمعادلة (٢) كما يمكننا ان نتوصل إلى النتيجة ذاتها فيما إذا حذفنا الثابت الاختياري c وحصلنا بنتيجة ذلك على المعادلة (٢) .

لنشتق العلاقة (١) :

$$y' = c$$

إذا بدلنا كل من c بـ y' في العلاقة (١) فنجد :

$$y = y' x + \frac{1}{y}$$

وهي المعادلة (٢) نفسها .

لنبين أن المعادلة (٢) تقبل ، كحل لها العلاقة $y^2 = 4x$ ، نشتق هذه العلاقة الأخيرة ونستخرج من الناتج قيمة y' التي نحملها في المعادلة (٢) فتنقلب إلى مطابقة .

$$2 y y' = 4$$

$$y' = \frac{2}{y}$$

$$y \equiv \frac{y^2}{4} \cdot \frac{2}{y} + \frac{y}{2}$$

إن معادلة مغلف المنحنيات $y = c x + \frac{1}{c}$ ، هي المعادلة الناتجة عن حذف الثابت الإختياري c بين هذه المعادلة والمعادلة الناتجة عنها باشتقاقها بالنسبة لـ c ، اي :

$$y = c x + \frac{1}{c}$$

$$o = x - \frac{1}{c^2}$$

$$c^2 x = 1 \;,\quad c = \pm \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad y = \frac{c^2 x + 1}{c}$$

$$y = \pm 2 \sqrt{x} \qquad\qquad y^2 = 4x$$

إن من الملاحظ ان هذا الحل اي $y = \pm 2\sqrt{x}$ لا يمكن ان ينتج عن الحل العام :

$$y = c x + \frac{1}{c}$$

من أجل أي قيمة لـ c فهو إذن حل شاذ .

٦ – اوجد المعادلة التفاضلية التي تعطي مجموعة الدوائر التي طول نصف قطر كل منها يساوي a .

الحل : إذا فرضنا (α , β) احداثيي مركز دائرة من هذه الدوائر فان معادلتها تكون :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = o$$

إن α ، β ثابتان اختياريان يمكن حذفهما بين هذه المعادلة والمعادلتين الناتجتين عنها باشتقاقين متتاليين لها بالنسبة لـ x :

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = o \\ x - \alpha + (y - \beta) y' = o \\ 1 + y'^2 + (y - \beta) y'' = o \end{cases}$$

نستخرج من المعادلة الأخيرة $y - \beta$ ثم من المعادلة الثانية $x - \alpha$ ونحمل هاتين القيمتين في المعادلة الأولى فنحصل على المعادلة التفاضلية :

$$(1 + y'^2)^3 - a^2 y''^2 = o$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة .

٧ – برهن أن التابع :

$$(1) \qquad y = c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x$$

حل للمعادلة التفاضلية .

$$(2) \qquad x^2 y'' - x y' + 2 y = x \log x$$

الحل : يمكن حل هذه المسألة بطريقتين :

آ – الطريقة الأولى : نحقق المعادلة (2) بالتابع (١) بعد ان نحسب المشتق الاول والمشتق الثاني لهذا التابع :

$$y' = c_1 \left(\cos \log x - x \sin \log x \cdot \frac{1}{x} \right) + c_2 \left(\sin \log x + x \cos \log x \cdot \frac{1}{x} \right) + \log x + x \cdot \frac{1}{x} .$$

(3) $y' = c_1 (\cos \log x - \sin \log x) + c_2 (\sin \log x + \cos \log x) + \log x + 1$

(4) $y'' = c_1(-\frac{1}{x} \sin \log x - \frac{1}{x} \cos \log x) + c_2(\frac{1}{x} \cos \log x - \frac{1}{x} \sin \log x) + \frac{1}{x}$

لنضرب طرفي المعادلة (١) بـ (2) وطرفي المعادله (3) بـ $(- x)$ وطرفي المعادلة (4) بـ x^2 ونجمع النواتج إلى بعضها فنجد :

$$x^2 y'' - x y' + 2 y = c_1 (2 x \cos \log x - x \cos \log x + x \sin \log x - x \sin \log x - x \cos \log x) + c_2(2 x \sin \log x - x \sin \log x - x \cos \log x + x \cos \log x - x \sin \log x) + x \log x - x + x = x \log x$$

وبذلك يثبت المطلوب .

ب – **الطريقة الثانية** : نحذف الوسيطين بين المعادلة (١) والمعادلتين الناتجتين عن هذه المعادلة باشتقاقين متتاليين بعد ان نكتب هـــذه المعادلات بالشكل :

$$c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x - y = 0$$

$$c_1 (\cos \log x - \sin \log x) + c_2 (\sin \log x + \cos \log x) + \log x + 1 - y' = 0$$

$$\frac{-c_1}{x} (\sin \log x + \cos \log x) + \frac{c_2}{x} (\cos \log x - \sin \log x) + \frac{1}{x} - y'' = 0$$

لتكن هـــذه المعادلات الثلاثة الخطية وذات المجهولين (c_1 , c_2) قابلة للحل اي لتمثل جملة معادلات متوافقة،يلزم وبكفي انيكونالمعينالتالي Δ :

$$\begin{vmatrix} x\cos\log x & x\sin\log x & x\log x - y \\ \cos\log x - \sin\log x & \sin\log x + \cos\log x & \log x + 1 - y \\ -\frac{1}{x}(\sin\log x + \cos\log x) & \frac{1}{x}(\cos\log x - \sin\log x) & \frac{1}{x} - y'' \end{vmatrix} = 0$$

إذا ضربنا السطر الأخير بـ x^2 والسطر الثاني بـ $(-x)$ وجمعنا السطرين الناتجين إلى مثلي السطر الأول فاننا نحصل على معين يساوي مثلي المعين الأول :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x\log x - 2y + xy' - x^2y'' \\ \cos\log x - \sin\log x & \sin\log x + \cos\log x & \log x + 1 - y' \\ \frac{\sin\log x + \cos\log x}{-x} & \frac{\cos\log x - \sin\log x}{x} & \frac{1}{x} - y'' \end{vmatrix} = 0$$

إن هذا المعين يساوي جداء مضروبين يجب ان يكون احدهما مساوياً للصفر :

$$2\Delta = (x\log x - 2y + xy' - x^2y'') \times \begin{vmatrix} \cos\log x - \sin\log x & \sin\log x + \cos\log x \\ -\frac{1}{x}(\sin\log x + \cos\log x) & \frac{1}{x}(\cos\log x - \sin\log x) \end{vmatrix} = 0$$

إن المضروب الثاني لايمكن ان يكون معدوماً دوماً لأنه يساوي $\frac{2}{x}$ فلا بد إذن من ان يكون المضروب الأول مطابقاً للصفر ومنه نجد :

$$x^2y'' - xy' + 2y = x\log x$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة .

٨ ـ شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التابع التالي حلاً لها :

$$y=(c_1+c_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2} \qquad (1)$$

الحل : لحذف الثابتين الإختياريين c_1, c_2 من العلاقة (١) نحتاج ، بالاضافة إلى هذه العلاقة ، إلى علاقتين نحصل عليها باشتقاق العلاقة المذكورة مرتين متتاليتين فيكون :

$$c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}-y=0$$

$$c_1ke^{kx}+c_2(1+kx)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}-y'=0$$

$$c_1k^2e^{kx}+c_2(2k+k^2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}-y''=0$$

ليمكن حذف c_1 ، c_2 من هذه المعادلات يلزم ويكفي أن تكون هذه المعادلات الخطية الثلاثة متوافقة اي ان يكون المعين التالي مطابقاً للصفر :

$$\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y \\ ke^{kx} & (1+kx)e^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y' \\ k^2e^{kx} & (2k+k^2x)e^{kx} & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y'' \end{vmatrix}\equiv 0$$

إن هذا الشرط يكافيء شرطنا أن يكون المعين الناتج عن هذا المعين ، بعد تقسيم عموده الأول وعموده الثاني على e^{kx} ، معدوماً أي :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y \\ k & 1+kx & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y' \\ k^2 & 2k+k^2x & \frac{e^x}{(k-1)^2}-y'' \end{vmatrix}=0$$

نضرب السطر الأول بـ k ونطرح الناتج من الثاني ونضربه بـ k^2 ونطرح الناتج من السطر الثالث فيأخذ هذا المعين الشكل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & \dfrac{e^x}{(k-1)^2} - y \\ 0 & 1 & \dfrac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ 0 & 2k & \dfrac{e^x(1+k)}{1-k} - y'' - k^2 y \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ 2k & \dfrac{e^x(1+k)}{1-k} - y'' - k^2 y \end{vmatrix} \equiv 0$$

نطرح من السطر الثاني السطر الأول مضروباً بـ $2k$ فيأخذ الشكل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{e^x}{1-k} - y' - ky \\ 0 & e^x - y'' + 2ky' - k^2 y \end{vmatrix} = 0$$

وهذا يكافىء العلاقة :

$$y'' - 2ky' - k^2 y = e^x$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة :

٩ – برهن انه إذا كان a ، b ثابتين اختياريين فان للمعادلتين التفاضليتين :

$$(1) \qquad y - y' = 2be^{-x} \quad ، \quad y + y' = 2ae^x$$

حل عام مشترك .

الحل : إن كلا من هاتين المعادلتين من المرتبة الأولى وتحوي ثابتا اختيارياً واحداً فينتج عن ذلك أن الحل العام لكل منها يحوي ثابتين اختياريين .

إذا حذفنا ،في كل منها ،الثابت الاختياري فسوف نحصل على معادلة تفاضلية واحدة هي :

$$y'' - y = 0 \qquad (2)$$

إن كل حل لإحدى المعادلتين (١) هو حل للمعادلة (٢) وبما أن الحلين العامين لهاتين المعادلتين يحيويان ثابتين اختياريين فكل منهما يمثل الحل العام للمعادلة (٢) وبما أنه لا يوجد سوى حل عام واحد لمعادلة تفاضلية فان هذين الحلين متطابقين وهو المطلوب .

١٠ – اكتب المعادلة التفاضلية لحزمة المنحنيات .

$$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (1)$$

حيث a ثابت اختياري . يسمى هذا المنحني عادة بالسيكلوئيد .

لنأخذ تفاضل المعادلتين (١) فنجد :

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt \quad , \quad dy = a \sin t\,dt$$

ومنه :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$$

إذا قسمنا المعادلتين (١) على بعضهما فاننا نجد :

$$\frac{x}{y} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

ومنه نستخرج :

$$\frac{x}{y}(1 - \cos t) + \sin t = t \qquad (2)$$

ولكن :

$$1 - \cos t = \frac{1 - \cos t}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2}{1 + y'^2}$$

$$\sin t = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{2\,\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}}{1+\mathrm{cotg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2y'}{1+y'^2}$$

وتأخذ المعادلة (٢) الشكل التالي :

$$\frac{2x}{y(1+y'^2)} + \frac{2y'}{1+y'^2} = 2\,\mathrm{Arccotg}\, y'$$

وتصل إلى المعادلة التفاضلية المطلوبة بعد الإصلاح وهي :

$$x = y[(1+y'^2)\mathrm{Arc\,cotg}\, y' - y']$$

١١ - اوجد المعادلة التفاضلية لنواظم السطح المخروطي الدوراني :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

الحل : من المعروف انه إذا كتبنا معادلة سطح ما بالشكل $f(x, y, z) = 0$ فان الشعاع ذا المركبات $\frac{\delta f}{\delta z}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta x}$ محمول على الناظم على السطح في النقطة (x, y, z) وإذا لاحظنا أنه من أجل السطح المخروطي المفروض :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x \;,\; \frac{\delta f}{\delta y} = 2y \;,\; \frac{\delta f}{\delta z} = -2z$$

تكون معادلة الناظم على هذا السطح هي :

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{-z}$$

تتعين نقطة من سطح ما بواسطة وسيطين يمكن أخذهما الإحداثيين x ، y ولنرمز لهذين الوسطين بالشكل $x = \alpha$ ، $y = \beta$ فتأخذ عندها معادلة الناظم الشكل :

$$\frac{X-\alpha}{\alpha} = \frac{Y-\beta}{\beta} = \frac{Z-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

ينتج عن هذه العلاقات المعادلتين :

$$(1)\ Y = \frac{\beta}{\alpha} X \quad , \ (2)\ Z = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} X$$

وينتج باشتقاق هاتين المعادلتين :

$$(3) \qquad Y' = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (4) \qquad Z' = -\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$$

إذا ربعنا طرفي المعادلة (٣) ثم أضفنا فيها المخارج إلى الصور نجد :

$$Y'^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$Y'^2 + 1 = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2} = Z'^2$$

وإذا حملنا قيمة $\frac{\beta}{\alpha}$ في المعادلة (١) نجد المعادلة التفاضلية :

$$Y = Y' X$$

وتكون المعادلتان التفاضليتان :

$$Y = Y' X \quad , \quad Y'^2 + 1 = Z'^2$$

هما المعادلتان التفاضليتان لجملة النواظم على السطح المخروطي المفروض.

١٢ - اكتب المعادلات التفاضلية لمجوعة نواظم السطح الجسم المكافىء الدوراني :

$$x^2 + y^2 = 2z$$

إن الشعاع الذي مركباته $x , y , -1$ هو شعاع محمول على الناظم فاذا اعتبرنا أن الوسيطين $x = \alpha$ و $y = \beta$ يعينان وضعية نقطة على السطح المفروض ويعينان بالتالي الناظم في هذه النقطة، فان معادلة هذا الناظم هي:

$$\frac{X-\alpha}{\alpha}=\frac{Y-\beta}{\beta}=-Z+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

ونستنتج مما سبق المعادلتين :

$$(1) \qquad Y=\frac{\beta}{\alpha}X \quad , \quad Z=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{X}{\alpha}+1$$

لنشتق هاتين المعادلتين فنجد :

$$Y'=\frac{\beta}{\alpha} \qquad ، \qquad Z'=-\frac{1}{\alpha}.$$

$$\alpha=\frac{-1}{Z'} \quad , \quad \beta=-\frac{Y'}{Z'}$$

إذا حملنا هاتين العلاقتين في المعالتين (١) نجد المعادلتين التفاضلتين لنواظم السطح المفروض :

$$Y=Y'X \qquad , \qquad Z=\frac{1+Y'^2}{2Z'^2}+XZ'+1$$

تمارين للحل

حقق أن كلا من المعـــادلات التفاضلية التالية تقبل كحل لها التابع المرافق لكل منها .

١٣ – $y^2=2cx+c^2$ $\qquad$ $y\cdot y'^2+2xy'-y=0$

١٤ – $y=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)e^x$ $\qquad$ $y^{(4)}-4y^{(3)}+6y''-4y'+y=0$

١٥ – $4y=\frac{1}{3x}+c_1x^5+c_2x$ $\qquad$ $x^2y''-5xy'+5y=\frac{1}{x}$

١٦ – $\text{Arc}\sin\frac{y}{x}=c-x$ $\qquad$ $x\frac{dy}{dx}-y+x\sqrt{x^2-y^2}=0$

١٧ – $y=\sin x-1+c\,e^{-\sin x}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$

١٨ – $y = c_1 e^{\arcsin x} + c_2 e^{-\arcsin x}$ $\qquad (1 - x^2) y'' - x y' - y = 0$

١٩ – $y = \frac{c_1}{x} + c_2$ $\qquad y'' + \frac{2}{x} y' = 0$

احذف الثوابت الاختيارية من الافادات التالية وتحقق أنه ينتج عن كل تركيب المعادلة التفاضلية المرافقة :

٢٠ – $y^{(3)} = y'$ $\qquad y = A e^{x} + B e^{-x} + C$

٢١ – $y^{(3)} - 6 y'' + 11 y' - 6 y = 0$ $\qquad y = A e^{x} + B e^{2x} + C e^{3x}$

٢٢ – $y'' - 2 y' + 2 y = 0$ $\qquad y = e^{x} (A \cos x + B \sin x)$

٢٣ – $y \log \left[y' + \sqrt{1 + y'^2} \right] = x \sqrt{1 + y'^2}$ $\qquad y = c \, \mathrm{ch} \frac{x}{c}$

٢٤ – اوجد المعادلة التفاضلية لكل القطوع المكافئة التي يوازي محورهـا المحور oy ج : $y^{(3)} = 0$

٢٥ – اوجد المعادلة التفاضلية لكل الدوائر المارة بمبدأ الإحداثيات .

ج : $(x^2 + y^2) y'' = 2 (x y' - y)(1 + y'^2)$

٢٦ – برهن أن المعـــادلة التفاضلية الناتجة عن حذف الثابت a من المعادلة :

$$2 y = x y' + a x$$

وحذف الثابت b من المعادلة :

$$y = x y' - b x^2$$

هي المعادلة :

$$x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = 0$$

أو جد الحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية وذلك بأن تكتب أن قيمة y' المستخرجـة من المعادلة الأولى مساوية إلى قيمتها المستخرجة من المعادلة

الثانية ثم برهن أن هذا الحل يحقق المعادلة الثالثة .

٢٧ – برهن أن كل منحن يحقق المعادلة التفاضلية :

$$y' = 1 + x\, y'^2 + x^2\, y''$$

يقطع محور العينات تحت زاوية تساوي ٤٥° .

٢٨ – اوجد زاوية المنحنين التكامليين للمعادلة التفاضلية :

$$y'^2 = y^2 - 2x + x^2$$

مع محور السينات في النقطة (1,2) وبرهن أن نصف قطر تقوس كل منهما في النقطة المذكورة يساوي (4) .

٢٩ – اوجد المعادلات التفاضلية لكل مجموعة من مجموعات المنحنيات التالية .

آ – المنحنيات التي يكون فيها تحت الناظم ثابتاً [1] .

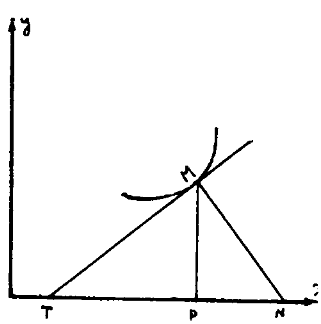
ب – المنحنيات التي يكون فيها تحت المماس ثابتاً .

حـ – المنحنيات التي يكون فيها طول الناظم ثابتاً .

ى – المنحنيات التي يكون فيها طول المماس ثابتاً .

---

(١) لنصور منحنياً محولاً على محورين متعامدين ox , oy ولننشىء له من نقطة من نقاطه ولنسميها M ، مماساً وناظماً يقطع الأول المحور ox في T ويقطعه الثاني في N وليكن p مسقط M على ox نسمي بالتعريف :



$\overline{PT}$ بتحت المماس و $\overline{PN}$ بتحت الناظم و MT بالمماس و MN بالناظم .

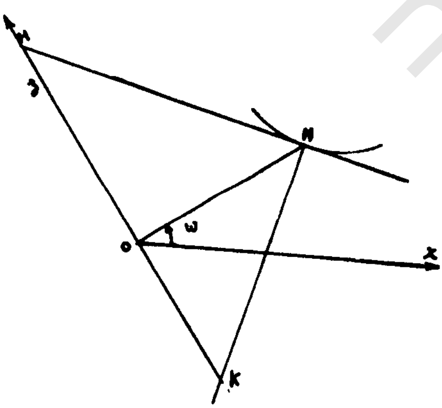
هـ – المنحنيات التي يكون منها تحت الناظم القطبي ثابتاً [1]
و – المنحنيات التي يكون فيها تحت المماس القطبي ثابتاً .
ز – المنحنيات التي يكون فيها الناظم القطبي ذا طول ثابت .
ح – المنحنيات التي يكون فيها المماس القطبي ذا طول ثابت .

الاجوبة :

آ – $yy' = o$ ، ب – $\frac{y}{y'} = a$ ، ج – $y^2 + y^2 y'^2 = a^2$ ،

د – $y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = a^2$ ، هـ – $\varrho' = a$ ، و – $\varrho^2 + \varrho' a = o$ ،

ز – $\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2$ ، ح – $\varrho^2 \varrho'^2 + \varrho^4 = a^2 \varrho'^2$.



(1) لنتصور الآن منحنياً معرفاً بمعادلته القطبية $\varrho = f(\omega)$ ولتكن $M(\varrho, \omega)$ نقطة من نقاطه ولنرمز بـ o للقطب و ox للمحور القطبي .
لننشىء من o عموداً على OM ولنأخذ على هذا الناظم الاتجاه oz المعرف بالعلاقة :

$$(ox, oz) = \omega + \frac{\pi}{2}$$

وليكن H نقطة تقاطع المماس في M مع oz و K نقطة تقاطع الناظم مع المستقيم المذكور .

نعتبر الاتجاه الموجب الاتجاه oz ونسمي القطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overline{OH}$ ، $\overrightarrow{OK}$ على الترتيب بتحت المماس وتحت الناظم القطبيين كما نسمي الطولين MH ، MK بطول المماس وطول الناظم القطبيين .