ملحــق

تمارين عامة

٥٣٧ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1) \quad x(3y^2x^4+1)\,dy + (3x^4y^2-1)\,y\,dx = 0$$

(جامعة دمشق ، ر. ف الدورة الأولى ١٩٧١)

الحـل :

إن هذه المعادلة التفاضلية ليست تامة لأن :

$$[x(3y^2x^4+1)]'_x \not\equiv [(3x^4y^2-1)y]'_y$$

أي :

$$15y^2x^4+1 \not\equiv 9x^4y^2-1$$

لنبحث عن عامل تكميل μ لهذه المعادلة فنجد الشرط .

$$[x(3y^2x^4+1)\mu]'_x \equiv [(3x^4y^2-1)y\mu]'_y$$

أي اننا نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية في μ :

$$(15y^2x^4+1)\mu + x(3y^2x^4+1)\mu'_x$$
$$= (9x^4y^2-1)\mu + y(3x^4y^2-1)\mu'_y$$

ولنبحث الآن عن وجود عامــل تكميل تابع لـ x فقط ، عندئذ

يكون $\mu'_y = 0$ وبالتالي تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$2(3x^4y^2+1)\mu = -x(3y^2x^4+1)\mu'_x$$

أو :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2\,dx}{x}$$

وبالمكاملة نجد :

$$\mu = \frac{c}{x^2}$$

وهكذا نرى أن $\mu = \frac{1}{x^2}$ هو عامل تكميل لـ (1) . لنضرب طرفيها به فتصبح تامة :

$$(2) \qquad \frac{3y^2x^4+1}{x}\,dy + \frac{(3x^4y^2-1)y}{x^2}\,dx = 0$$

للحصول على حل هذه المعادلة نكامل الحد الأول بالنسبة لـ y مع اعتبار x ثابتة فنجد :

$$\frac{y^3x^4+y}{x} + h(y)$$

ونعين h (y) بحيث يكون مشتق المقدار الأخير بالنسبة لـ x مطابقاً لأمثال dx في (2) فنجد :

$$h'(y) = 0$$

ومنه :

$$h(y) = \text{const}$$

والحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y^3x^3 + \frac{y}{x} = c$$

٥٣٨ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x y'' + y' = x y'^2$$

(جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧١)

الحل :

إن هذه المعادلة لا تحوي y لذلك يمكن تخفيض مرتبتها بفرض $y' = z$ فتأخذ الشكل :

$$x z' + z = x z^2$$

وهذه معادلة برنويي ، لحلها نقسم على z^2 ونفرض $t = \frac{1}{z}$ فنجد :

$$-x t' + t = x$$

وهذه معادلة خطية ، نحلها بدون طرف فنجد :

$$t = c x$$

لحلها مع طرف نحول الثابت c ونعوض فنجد :

$$c' x = -1$$

ومنه : $$c = c_1 - \lg x$$

وبالتالي : $$t = c_1 x - x \lg x$$

وبالانتقال إلى z نجد :

$$z = \frac{1}{c_1 x - x \lg x}$$

وبما أن $y' = z$ نجد :

$$dy = \frac{dx}{c_1 x - x \lg x}$$

وبالمكاملة نجد :

$$y = c_2 + \int \frac{dx}{x\,(c_1 - \lg x)}$$

لحساب التكامل الأخير نفرض $c_1 - \lg x = u$ فيكون :

$$y = c_2 - \int \frac{du}{u} = c_2 - \lg u$$

أو :

$$y = c_2 - \lg(c_1 - \lg x)$$

وهو الحل العام المطلوب .

٥٣٩ – حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^3 y}{d x^3} - 4\frac{d^2 y}{d x^2} + 5\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x} + \sin 2x + x^2$$

(جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧١)

الحـل :

إن الحل العام لهذه المعادلة هو مجموع حل عام لها بدون طرف ثان مع حل خاص لها بطرفٍ ثانٍ . لذلك نبـدأ بالحصول على الحل العـام للمعادلة (المتحول هو x) :

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

إن المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي :

$$\rho^3 - 4\rho^2 + 5\rho - 2 = 0$$

نلاحظ أن $1 = \rho$ هو حل لهذه المعادلة . بالتحليل إلى العوامل نجد أن هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(\rho - 1)^2 (\rho - 2) = 0$$

فللمعادلة المميزة الجذر المضاعف (مرتين) $1 = م$ والجذر البسيط $2 = م$

فالحل العام اذن :

$$(1) \quad y = c_1 e^{2x} + (c_2 x + c_3) e^{x}$$

ان الحل الخاص للمعادلة بطرف ثان هو مجموع ثلاثة حلول خاصة y_1 و y_2 و y_3 للمعادلات الثلاث التالية على الترتيب :

$$(2) \quad y_1''' - 4 y_1'' + 5 y_1' - 2 y_1 = e^{2x}$$

$$(3) \quad y_2''' - 4 y_2'' + 5 y_2' - 2 y_2 = \sin 2x$$

$$(4) \quad y_3''' - 4 y_3'' + 5 y_3' - 2 y_3 = x^2$$

للحصول على y_1 نلاحظ أن $2 = م$ هو حل للمعادلة المميزة لذلك فإن لـ (2) حلاً خاصاً من الشكل :

$$y_1 = a\, x\, e^{2x}$$

بحساب y_1' و y_1'' و y_1''' والتعويض نجد :

$$a = 1$$

اذن :

$$y_1 = x e^{2x}$$

للحصول على y_2 نلاحظ أن $2i$ ليس حلا للمعادلة المميزة ولذلك فإن y_2 من الشكل :

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

لنعوض في (3) فنجد :

$$(2A + 14B) \cos 2x + (14A - 2B) \sin 2x \equiv \sin 2x$$

ومنه :

$$2A + 14B = 0 \; ; \; 14A - 2B = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$A = \frac{7}{100} \; ; \; B = -\frac{1}{100}$$

اذن :

$$y_2 = \frac{1}{100}\,(7 \sin 2x - \cos 2x)$$

للحصول على y_2 نلاحظ أن الطرف الأيسر من (4) يحوي حداً بـ y_3 لذلك فإن y_3 من الشكل :

$$y_3 = A x^2 + B x + c$$

بالتعويض في (4) نجد :

$$-2 A x^2 + (10 A - 2 B) x - 8 A + 5 B - 2 c \equiv x^2$$

ومنه :

$$-2 A = 1 \; ; \; 10 A - 2 B = 0 \; , \; -8 A + 5 B - 2 c = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نحصل :

$$A = -\frac{1}{2} \; , \; B = -\frac{5}{2} \; , \; C = -\frac{17}{4}$$

إذن :

$$y_3 = -\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2} x - \frac{17}{4}$$

والحل العام المطلوب هو :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + c_1 e^{2x} + (c_2 x + c_3) e^{x}$$

يمكن بطريقة ثانية (طريقة المؤثرات التفاضلية) الحصول على الحل الخاص للمعادلة المفروضة . إن هذه المعادلة تكتب على الشكل :

$$F(D)\, y \equiv (D^3 - 4 D^2 + 5 D - 2)\, y = e^{2x} + \sin 2x + x^2$$

ومنه :

$$y = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} (e^{2x} + \sin 2x + x^2)$$

فإذا علمنا أن :

$$\frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} = \frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1} - \frac{1}{(D-1)^2}$$

وأن :

$$(5) \quad \frac{1}{D-a} Q(x) = e^{ax} \int e^{-ax} Q(x)\, dx$$

فإن :

$$\begin{aligned} y = {} & e^{2x} \int (1 + e^{-2x} \sin 2x + x^2 e^{-2x})\, dx \\ & - e^{x} \int (e^{x} + e^{-x} \sin 2x + x^2 e^{-x})\, dx \\ & - e^{x} \int \left[\int (e^{x} + e^{-x} \sin 2x + x^2 e^{-x})\, dx \right] dx \end{aligned}$$

وبحساب هذه التكاملات نصل إلى المطلوب .

غير انه من المستحسن اتباع الطرق التالية في حل المعادلة :

$$F(D)\, y = Q(x)$$

أي :

$$y = \frac{1}{F(D)} Q(x)$$

١ً – اذا كان Q من الشكل e^{ax} فعندئذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(a)} e^{ax} \qquad F(a) \neq 0$$

أما إذا كان $F(a) = o$ فعندئذ نلجأ إلى الطريقة (5) .

٢ – أما إذا كان Q من الشكل x^m فعندئذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m) x^m \quad a_0 \neq o$$

حيث نحصل على أمثال x^m في الطرف الأيمن من تقسيم 1 على F(D) مع الاكتفاء بالحدود التي درجتها أقل من m أو تساويها .

٣ – أما إذا كان Q من الشكل $\sin(a x + b)$ أو $\cos(a x + b)$ فإننا نستفيد من القواعد التالية :

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin(a x + b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(a x + b)$$

$$\frac{1}{F(D^2)} \cos(a x + b) = \frac{1}{F(-a^2)} \cos(a x + b)$$

وذلك بفرض $F(-a^2) \neq o$ أما اذا كان $F(-a^2) = o$ فإننا نبحث ، في الحالة الأولى مثلاً ، عن حل المسألة :

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin[(a + b) x + b]$$

ثم نجعل $h \to o$ في الجواب .

٤ – أما اذا كان Q من الشكل $e^{ax} g(x)$ فعندئذ يكون :

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} g(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D + a)} g(x)$$

٥ – واذا كان Q من الشكل $x g(x)$ فيكون :

$$y=\frac{1}{F(D)}x\,g(x)=x\frac{1}{F(D)}\quad g^{(x)}-\frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2}g(x)$$

ففي مسألتنا يكون :

$$y_1=\frac{1}{(D-2)(D-1)^2}e^{2x}=\frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-1}e^{2x}\right)$$

ولكن :

$$\frac{1}{D-1}e^{2x}=e^{2x}$$

اذن :

$$y_1=\frac{1}{D-2}e^{2x}=e^{2x}\int e^{2x}e^{-2x}dx=xe^{2x}$$

ويكون :

$$y_2=\frac{1}{D^3-4D^2+5D-2}x^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}D-\frac{17}{8}D^2\right)x^2$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{17}{4}$$

وأخيراً :

$$y_3=\frac{1}{D^3-4D^2+5D-2}\sin 2x=\frac{1}{-4D+16+5D-2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{D+14}\sin 2x=\frac{D-14}{D^2-(14)^2}\sin 2x=\frac{D-14}{-200}\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{200}(2\cos 2x)+\frac{7}{100}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{100} (7 \sin 2x - \cos 2x)$$

وهو المطلوب .

٥٤٠ – أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x(1-x)y'' + (x+1)y' - y = 0 \qquad (1)$$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً على شكل كثير حدود في x من الدرجة الأولى .

استعمل طريقة تحويل الثوابت لحل المعادلة :

$$2x(1-x)y'' + (x+1)y' - y = (1-x)^2 \qquad (2)$$

(جامعة دمشق ، ر. ف. الدورة الأولى ١٩٧٠)

الحـــل :

لنضع $y = Ax + B$ في (1) فنجد :

$$(x+1)A - (Ax+B) \equiv 0$$

ومنه $A = B$ وبالتالي فإن $y = A(x+1)$ حل للمعادلة (1) مهما كان A . لنجعل $A = 1$ فيكون :

$$y_1 = x + 1$$

حلاً خاصاً لـ (1) . نستفيد من هذا الحل للحصول على الحل العام لـ (1) فنكتب :

$$y = (x+1)z$$

نعوض في (1) فنجد :

$$2x(1-x^2)z'' - (3x^2 - 6x - 1)z' = 0$$

وهذه معادلة لا تحوي z لحلها نضع $z' = u$ فنحصل :

$$\frac{du}{u} = \frac{3x^2 - 6x - 1}{2x(1 - x^2)} dx = \left[-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right] dx$$

وبمكاملة هذه المعادلة نجد :

$$u = \frac{c(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

ومنه :

$$z' = \frac{c(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

وبالتالي :

$$z = c \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

ولحساب هذا التكامل نضع $x = t^2$ فيكون :

$$z = 2c \int \frac{(t^2 - 1)\,dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{2ct}{t^2+1} + c_1 = \frac{-2c\sqrt{x}}{x+1} + c_1$$

والحل العام للمعادلة (1) هو :

$$y = c_1(x+1) - 2c\sqrt{x}$$

$$(3) \qquad y = c_1(x+1) + c_2\sqrt{x}$$

للحصول على الحل العام لـ (2) يكفي أن نجد حلاً خاصاً لها بعد أن وجدنا لها حلاً عاماً بدون طرف ثانٍ .

لنحول الثوابت في (3) ونأخذ :

$$c_1'(x+1) + c_2'\sqrt{x} = 0$$

ثم نحسب y' و y'' ونعوض بالمعادلة فنجد :

$$c_1' + \frac{c_2'}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2x}$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين نجد :

$$c_1' = -1 \; ; \; c_2' = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

بالمكاملة نجد (مع اهمال الثوابت) :

$$c_1 = -x \; ; \; c_2 = \frac{2\sqrt{x}}{3}(x+3)$$

فالحل الخاص لـ (2) هو :

$$y = \frac{x}{3}(3-x)$$

والحل العام المطلوب هو :

$$y = c_1(x+1) + c_2\sqrt{x} + \frac{x}{3}(3-x)$$

٥٤١ – اذا كانت لدينا المعادلة :

$$(y^2-1)(xy+1)\,dx + x(xy^2+y+x)\,dy = 0$$

فهل لها عامل تكميل من الشكل $(py+q)^n$ حيث p و q تابعان لـ x و n ثابت ؟ في حال الإيجاب ، أوجد الحل العام للمعادلة المذكورة .

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩)

الحـل :

كي يكون $(py+q)^n$ عامل تكميل للمعادلة المفروضة يلزم ويكفي أن نتمكن من تعيين $p(x)$ و $q(x)$ بحيث يكون :

$$\left[(py+q)^n (xy^3 + y^2 - xy - 1) \right]'_y \equiv$$
$$\left[(py+q)^n (x^2 y^2 + xy + x^2) \right]'_x$$

أو بالاشتقاق وبالاختصار على $(py+q)^{n-1}$ نجد :

$$np(xy^3+y^2-xy-1)+(py+q)(3xy^2+2y-x)\equiv$$
$$n(p'y+q')(x^2y^2+xy+x^2)+(py+q)(2xy^2+y+2x)$$

والطرفان كثيرا حدود (من الدرجة الثالثة) بالنسبة إلى y . اذن فهذه المطابقة تكافىء المطابقات الاربع التالية :

$$nxp = 3xp \equiv ny^2p' + 2xp$$
$$np + 2p + 3xq \equiv nxp' + nx^2q' + p + 2xq$$
$$-nxp - xp + 2q \equiv nx^2p' + nxq' \times 2xp + q$$
$$-np - xq \equiv nx^2q' + 2xq$$

والمطابقة الاولى تعطي :

$$nx^2p' \equiv nxp + xp$$

أو :

$$\frac{dp}{p} = \frac{n+1}{n} \frac{dx}{x}$$

(قسمنا على n ، لأنه لو كان $n=0$ لكان عامل التكميل $\equiv 1$ ، أي أن المعادلة تامة ، ومن التجربة المباشرة نرى أن ذلك غير صحيح) .

ومنه :

$$\lg \frac{p}{a} = \frac{n+1}{n} \lg x$$

أي :

$$p = a\, x^{1 + \frac{1}{n}}$$

حيث a ثابت (حتى الآن كيفي) .

والمطابقة الرابعة تعطي :

$$n x^2 q' = -3 x q - n a x^{1+\frac{1}{n}}$$

أو :

$$n x q' = -3 q - n a x^{\frac{1}{n}}$$

وهي معادلة خطية بحلها نجد :

$$q = -\frac{n}{4} a x^{\frac{1}{n}} + b x^{-\frac{3}{n}}$$

حيث b ثابت (حتى الآن كيفي) .

وتبقى المتطابقتان الثانية والثالثة . فاذا عوضنا أولاً في الثانية نجد :

$$(n \times 1) a x^{1+\frac{1}{n}} - \frac{n}{4} a x^{1+\frac{1}{n}} + b x^{1-\frac{3}{n}} \equiv$$

$$n\left(1 + \frac{1}{n}\right) a x^{1+\frac{1}{n}} + n\left[-\frac{1}{4} a x^{\frac{1}{n}+1} - \frac{3}{n} b x^{1-\frac{3}{n}}\right]$$

ويبقى منها :

$$b = -3b$$

اذن :
$$b = o$$
ومنه :
$$q = -\frac{1}{4} n a x^{\frac{1}{n}}$$

وتكون المطابقة الثانية عندئذ محققة أيضاً ، وتبقى الثالثة . نعوض فيها فنجد بعد الاختصار :

$$-(n+3)a = (n+1)a$$

أو :

$$(2n+4)a = o$$

ولو كان $a = o$ لكان $p \equiv o$ و $q \equiv o$ ولكان عامل التكميل $\equiv o$ وهو عامل تكميل سخيف . نتركه فيبقى $2n+4 = o$ ، اذن $n = -2$ وبذلك تتحقق المطابقة الثالثة أيضاً .

فالشرط اللازم الكافي لتحقق المطابقات الأربع هو أن يكون :

$$p = a x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad q = \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad n = -2$$

وبذلك يكون للمعادلة عامل تكميل من الشكل المطلوب هو :

$$\left(a x^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$$

حيث a ثابت كيفي . ويكتب عامل التكميل هذا ، اذا أخذنا $\left(\frac{1}{2} a\right)^{-2} = 1$ ، بالشكل :

$$\frac{x}{(2xy + 1)^2}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة نضرب طرفيها بعامل التكميل السابق فتصبح :

$$\frac{x(xy+1)(y^2-1)}{(2xy+1)^2}dx + \frac{x^2(xy^2+y+x)}{(2xy+1)^2}dy = 0$$

وهي تامة ، لحلها نبدأ بحساب التكامل :

$$x^2 \int \frac{xy^2+y+x}{(2xy+1)^2} dy$$

حيث نعتبر x ثابتاً . لننتقل الى متحول جديد $z : z = 2xy + 1$ فيأخذ التكامل بعد التعويض الشكل :

$$\frac{1}{8} \int \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{4x^2}{z^2}\right) dz$$

وبالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{8}\left[z + \frac{1}{z} - \frac{4x^2}{z}\right] + f(x)$$

اذن :

$$F(x , y) = \frac{1}{8}\left[(2xy+1) + \frac{1-4x^2}{2xy+1}\right] + f(x)$$

حيث $f(x)$ تابع لـ x نعينه بالاشتقاق بالنسبة لـ x ومطابقة الناتج مع امثال dx فنجد :

$$\frac{1}{8}\left[2y + \frac{-8(2xy+1) - 2y(1-4x^2)}{(2xy+1)^2}\right] + f'(x)$$

$$\equiv \frac{x(xy+1)(y^2-1)}{(2xy+1)^2}$$

ومنه :

$$f'(x) \equiv 0$$

وبالتالي :

$$f(x) = \text{const}$$

اذن يمكن أن نأخذ :

$$F(x, y) = \frac{1}{8}\left(2xy + 1 + \frac{1 - 4x^2}{2xy + 1}\right)$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو :

$$2xy + \frac{1 - 4x^2}{2xy + 1} = c_1$$

أو :

$$\frac{x^2(y^2 - 1)}{2xy + 1} = c$$

حيث c ثابت كيفي .

٥٤٢ – عيّن التابع $F(x)$ بحيث يكون المعادلة :

$$y' + y^2 + [f(x) - 2x^2]\,y + [f(x) - 1] = 0$$

حلان خاصان y_1 و y_2 يحققان العلاقة $y_2 = 2y_1 + 1$. ثم عوّض عن $f(x)$ بالقيمة التي تجدها ، وأوجد الحل العام للمعادلة الناتجة .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٧)

الحل :

لكي يتحقق الشرط المطلوب ، يلزم ويكفي أن يكون هناك تابعان لـ x ، y_1 و y_2 يحققان الشروط الآتية :

$$\begin{cases} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)\, y_1 + (f - 1) = 0 \\ y_2' + y_2^2 + (f - 2x^2)\, y_2 + (f - 1) = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{cases}$$

بتعويض الثالثة في الثانية نجد أن هذه الشروط تكافىء :

$$\begin{cases} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)\, y_1 + (f - 1) = 0 \\ 2y_1' + (4y_1^2 + 4y_1 + 1) + (f - 2x^2)(2y_1 + 1) \\ \qquad + (f - 1) = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{cases}$$

وهي تكافىء (نطرح من الثانية ضعفي الأولى) :

$$\begin{cases} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)\, y_1 (f - 1) = 0 \\ y_1^2 + 2y_1 + 1 - x^2 = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{cases}$$

وهذه تكافىء الجملتين اللتين نحصل عليهما بتعويض α بـ $1+$ أو $1-$ في :

$$\begin{cases} y_1' + y_1^2 + (f - 2x^2)\, y_1 + (f - 1) = 0 \\ y_1 = \alpha x - 1 \\ y_2 = 2y_1 + 1 \end{cases}$$

أو (بالتعويض من الثانية في الأولى والثالثة) :

$$\begin{cases} \alpha + 3x^2 - 2\alpha x - 2\alpha x^3 + \alpha x f = 0 \\ y_1 = \alpha x - 1 \\ y_2 = 2\alpha x - 1 \end{cases}$$

ونستنتج من الأولى أن :

$$f(x) = 2x^2 - 3\alpha x + 2 - \frac{1}{x}$$

اذن لكي يتحقق الشرط المطلوب يلزم ويكفي أن يتحقق أحد الشرطين :

$$\begin{cases} f = 2x^2 - 3x + 2 - \dfrac{}{x} \\ y_1 = x - 1 \\ y_2 = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 2x^2 + 3x + 2 - \dfrac{1}{x} \\ y_1 = -x - 1 \\ y_2 = -2x - 1 \end{cases}$$

أي أن هناك قيمتين للتابع $f(x)$ تحققان الشرط المطلوب ويوافق كل قيمة منها حلان خاصان . بالتعويض عن f بقيمته في المعادلة تصبح :

$$(*) \qquad y' + y^2 + \left(-3\alpha x + 2 - \frac{1}{x}\right) y$$

$$+ \left(2x^2 - 3\alpha x + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

لايجاد الحل العام نجري التغيير :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = z$$

ونعوض في المعادلة فتصبح :

$$z' + (y_1 - y_2) z = 0$$

أو :

$$z' - \alpha x z = 0$$

ومنه بالمكاملة :

$$z = c\, e^{\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

ويصبح الحل العام معيناً بالعلاقة :

$$\frac{y - (\alpha x - 1)}{y - (2\alpha x - 1)} = c e^{\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

وبالحل نجد :

$$y = \frac{(2\alpha x - 1)\, c e^{\frac{1}{2}\alpha x^2} - (\alpha x - 1)}{c e^{\frac{1}{2}\alpha x^2} - 1}$$

نعوض $\alpha = 1$ فنحصل على الحل العام للمعادلة الأولى التي تنتج عن (*) من أجل $\alpha = 1$. واذا عوضنا $\alpha = -1$ نحصل على الحل العام للمعادلة الثانية التي تنتج عن (*) من أجل $\alpha = -1$.

٥٤٣ – حل معادلة جاكوبي :

$$(x - y)(x\,dy - y\,dx) + (5x + 2y + 5)\,dx - (x + 3y + 5)\,dy = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٧)

الحـــل :

نبدأ بالتخلص من الحدين الثابتين في أمثال dx و dy ويكون ذلك باجراء التغيير :

$$x = a + X \quad ; \quad y = b + Y$$

فتصبح المعادلة :

$$(X - Y + a - b)(X\,dY - Y\,dX) + (X - Y + a - b)$$
$$(a\,dY - b\,dX) + (5X + 2Y + 5a + 2b + 5)\,dX$$
$$-(X + 3Y + a + 3b + 5)\,dY = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة : أمثال dX من الحد الثاني مع الثالث وأمثال dY من الحد الثاني مع الرابع ، نجد أن الحد الثابت في أمثال dX هو :

$$5a + 2b + 5 - b(a - b)$$

وفي امثال dY هو :

$$-(a + 3b + 5) + a(a - b)$$

ثم نعين a و b بحيث يكون هذان المقداران معدومين ، أي :

$$(1) \qquad \frac{a + 3b + 5}{a} = \frac{5a + 2b + 5}{b} = \frac{a - b}{1} = \lambda$$

حيث λ مجهول مساعد .

من (1) نحصل على المعادلات :

$$(2) \qquad \begin{cases} (1 - \lambda)a + 3b + 5 = 0 \\ 5a + (2 - \lambda)b + 5 = 0 \\ a - b - \lambda = 0 \end{cases}$$

وهذه ثلاث معادلات خطية بمجهولين يلزم كي يكون لها حل مشترك أن تحقق λ المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 5 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

أو (بعد الاصلاح) :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 13\lambda + 15 = 0$$

ومن الواضح أن $\lambda_1 = 1$ جذر لهذه المعادلة . فاذا استفدنا من هذا الجذر نجد أن الجذرين الآخرين هما $\lambda_2 = -3$ و $\lambda_3 = 5$.

اذا جعلنا $\lambda = 1$ في المعادلات (2) نجد ان :

$$a = -\frac{2}{3} \qquad b = -\frac{5}{3}$$

ولو عوضنا الجذر الثاني في (2) لوجدنا ان $b = 1$; $a = -2$.
اما الجذر الثالث فيعطينا $b = -15$; $a = 10$. ومن الواضح ان من الأبسط ان نأخذ $b = 1$, $a = -2$ فتصبح المعادلة الجديدة بـ X و Y هي:

$$(X - Y - 3)(X\,dY - Y\,dX) + (X - Y - 3)(-2\,dY - dX) + (5X + 2Y - 3)\,dX - (X + 3Y + 6)\,dY$$

او :

$$(3) \qquad (X - Y)(X\,dY - Y\,dX) + (6Y + 4X)\,dX - (Y + 6X)\,dY = 0$$

ولحل هذه المعادلة نقسم على $X - Y$ فتصبح أمثال dX و dY متجانسة

ثم نفرض $u = \frac{Y}{X}$ ونعوض فنجد :

$$(1 - u) X^2 du + (6u + 4) dX - (u + 6) (X du + u dX) = 0$$

أو :

$$(1 - u) X^2 - (u + 6) X + (6u + 4 - u^2 - 6u) \frac{dX}{du}$$

وهي معادلة برنويي في X (حيث u متحول مستقل) .

$$(- u^2 + 4) \frac{dX}{du} - (u + 6) x + (1 - u) x^2 = 0$$

لحل معادلة برنويي هذه نفرض $z = \frac{1}{x}$ فنحصل على المعادلة الخطية:

$$(u^2 - 4) \frac{dz}{du} - (u + 6) z = u - 1$$

ولحلها نبدأ بحلها بدون طرف ثان فنجد :

$$\frac{dz}{z} = \frac{u + 6}{(u - 2) (u + 2)} du = \frac{2 du}{u - 2} - \frac{du}{u + 2}$$

وبالمكاملة نجد :

$$z = c \frac{(u - 2)^2}{u + 2}$$

حيث c ثابت كيفي . لحل المعادلة بطرف ثانٍ نحول الثابت c ونعوض في المعادلة فنحصل على :

$$dc = \frac{u-1}{(u-2)^3}\,du = \frac{du}{(u-2)^2} + \frac{du}{(u-2)^3}$$

ومنه :

$$c = -\frac{1}{u-2} - \frac{1}{2(u-2)^2} + \frac{c_1}{2}$$

فالحل العام للمعادلة الخطية هو :

$$z = -\frac{u-2}{u+2} - \frac{1}{2(u+2)} + \frac{c_1(u-2)^2}{2(u+2)}$$

ومنه يكون حل معادلة برنويي :

$$X = \frac{2u+4}{c_1(u-2)^2 - 2u + 3}$$

للحصول على حل المعادلة (3) نضع $u = \frac{Y}{X}$ فنجد بعد الاصلاح :

$$c(Y-2X)^2 - 2XY + 3X^2 = 2Y + 4X$$

نضع الآن $X = x + 2$ و $Y = y - 1$ فنجد حل المعادلة الأصلية :

$$c(y-2x-5) - 2(xy+2y-x-2) + 3(x^2+4x+4) = 2y + 4x + 6$$

أو :

$$\frac{2xy - 3x^2 + 6y - 10x - 10}{y - 2x - 5} = c$$

٥٤٤ - أوجد الحل العام لكل من المعادلتين :

$$x + y y' = (1 + y'^2)^{3/2} \quad ; \quad (y + y')^3 = y - y'$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨)

الحل :

لحل المعادلة الأولى نبدأ بتمثيل السطح :

$$x + y z = (1 + z^2)^{3/2}$$

وسيطياً ، فنجد :

$$x = -u v + (1 + v^2)^{3/2} \quad ; \quad y = u \quad ; \quad z = V$$

ثم نعوض في المعادلة :

$$d y = z d x$$

فنجد :

$$d u = v \left[- v d u - u d v + \frac{3}{2} (1 + v^2)^{\frac{1}{2}} 2 v d v \right]$$

أو :

$$(1 + v^2) d u = v \left[- u + 3 v (1 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right] d v$$

أو :

$$(1) \qquad (1 + v^2) \frac{du}{dv} + u v = 3 v^2 \sqrt{1 + v^2}$$

وهي معادلة خطية في u نبدأ بحلها بدون طرف ثاني :

$$(1 + v^2) \frac{d u}{d v} = - u v$$

أو :

$$\frac{du}{u} = -\frac{v\,dv}{1+v^2}$$

وبالمكاملة نجد :

$$\lg \frac{u}{c} = \lg \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

وبإزالة اللوغارتم :

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+v^2}}$$

للحصول على حل المعادلة بطرف ثان نحول الثابت ونعوض في المعادلة فنجد :

$$\frac{dc}{dv} = 3\,v^2$$

ومنه :

$$c = v^3 + c_1$$

فالحل العام لـ (1) هو :

$$u = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}$$

نعوض في المعادلات الوسيطية فنحصل :

$$x = -\frac{v\,(v^3 + c_1)}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{(1+v^2)^2}{\sqrt{1+v^2}}\,,\quad y = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}\,,\quad z = v$$

نحذف الأخيرة فنحصل على المنحنيات التكاملية ممثلة وسيطياً بدلالة v :

$$x = (1+v^2)\sqrt{1+v^2} - \frac{v\,(v^3 + c_1)}{\sqrt{1+v^2}}\,,\quad y = \frac{v^3 + c_1}{\sqrt{1+v^2}}$$

لحل المعادلة الثانية تمثل السطح :

$$(y+z)^3 = y - z$$

وسيطياً ، وذلك بفرض $y + z = u$ فيكون $y - z = u^3$ ومنه :

$$y = \frac{1}{2}(u + u^3) \quad , \quad z = \frac{1}{2}(u - u^3)$$

ونأخذ مع هاتين المعادلتين : $x = v$

فنجد التمثيل الوسيطي (بدلالة الوسيطين u و v) . نعوض في المعادلة $dy = z\,dx$ فنجد :

$$\frac{1}{2}(1 + 3u^2)\,du = \frac{1}{2}(u - u^3)\,dv$$

أو :

$$dv = \left[\frac{1}{u} + \frac{2}{1-u} - \frac{2}{1+u}\right] du$$

وبالمكاملة نجد :

$$v = \lg \frac{u}{(1-u^2)^2} + c$$

وبالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد :

$$x = \lg \frac{u}{(1-u^2)^2} + c \quad , \quad y = \frac{1}{2}(u + u^3) \quad , \quad z = \frac{1}{2}(u - u^3)$$

نحذف الأخيرة ونقتصر على الأولى والثانية فنجد ان هاتين المعادلتين تمثلان الحل العام وسيطياً (بدلالة u) .

٥٤٥ – حل المجموعة الآتية :

$$y' - y + z - 5u = 0$$
$$z' - y - z = -x^2$$
$$u' + y - z + 4u = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧)

الحل :

نبدأ بحل المجموعة بدون أطراف ثانية فنفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y = A x^r \quad , \quad z = B x^r \quad , \quad u = C x^r$$

نعوض ونطابق فنجد :

$$(r-1)A + B - 5C = 0$$
$$-A + (-1+r)B = 0$$
$$A - B + (4+r)C = 0$$

وهذه جملة معادلات خطية متجانسة في A و B و C . يلزم كي يكون لها حل غير الحل البدهي ان ينعدم معين الأمثال فنحصل على المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} r-1 & 1 & -5 \\ -1 & -1+r & 0 \\ 1 & -1 & 4+r \end{vmatrix} = 0$$

$$(r+1)(r+1)(r+2) = 0$$

ولهذه المعادلة الجذور البسيطة التالية : $r = 1 , -1 , -2$

إن الجذر الأول $r = 1$ يعطينا :

$$B - 5C = 0 \quad -A = 0 \quad A - B + C = 0$$

ومنه : $A = 0 \quad , \quad B = 5C$

فالحل الخاص هو : $0 \quad , \quad 5e^{x} \quad , \quad e^{x}$

أما الجذر الثاني $r = -1$ فيعطي :

$$-2A + B - 5C = 0 \quad , \quad -A - 2B = 0 \quad , \quad A - B + 3C = 0$$

ومنه : $A = -2B \quad , \quad B = C$

فالحل الخاص هو :

$$-2e^{-x} \quad , \quad e^{-x} \quad , \quad e^{-x}$$

أما الجذر الثالث $r = -2$ فيعطي :

$$-3A + B - 5C = 0 \quad , \quad -A - 3B = 0 \quad , \quad A - B + 2C = 0$$

ومنه : $A = -3B \quad , \quad C = 2B$

فالحل الخاص هو :

$$-3e^{-2x} \quad , \quad e^{-2x} \quad , \quad 2e^{-2x}$$

ان هذه الحلول الثلاثة مستقلة خطياً فالحل العام بدون أطراف ثانية هو :

$$y = \qquad -2c_2 e^{-x} - 3c_3 e^{-2x}$$

$$z = 5c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

$$u = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{-2x}$$

للحصول على الحل الخاص بأطراف ثانية نحول الثوابت ونعوض في المجموعة فنجد :

$$- 2 c_2' e^{-x} - 3 c_3' e^{-2x} = 0$$

$$5 c_1' e^{x} + c_2' e^{-x} + c_3' e^{-2x} = - x^2$$

$$c_1' e^{x} + c_2' e^{-x} + 2 c_3' e^{-2x} = 0$$

وبالحل نجد :

$$c_1' = - \frac{1}{6} x^2 e^{-x} \ , \ c_2' = - \frac{1}{2} x^2 e^{x} \ , \ c_3' = \frac{1}{3} x^2 e^{2x}$$

وبالمكاملة :

$$c_1 = \frac{1}{6} e^{-x} (x^2 + 2 x + 2)$$

$$c_2 = - \frac{1}{2} e^{x} (x^2 - 2 x + 2)$$

$$c_3 = \frac{1}{12} e^{2x} (2 x^2 - 2 x + 1)$$

ومنه الحل الخاص :

$$y = \frac{1}{4} (2 x^2 - 6 x + 7)$$

$$z = \frac{1}{4} (2 x^2 + 10 x + 3)$$

$$u = \frac{1}{2} (2 x - 1)$$

وللحصول على الحل العام بأطراف ثانية نضيف هذا الحل الخاص إلى الحل العام بدون أطراف ثانية فينتج المطلوب .

٥٤٦ - أوجد بطريقة التخفيض ، جميع حلول المعادلة :

$$y'^2 y^{(4)} - 4 y' y'' y''' + 3 y''^3 = 0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠)

الحـل :

نفرض أولاً أن $y' = z(x)$ ونعوض فنجد :

$$z^2 z''' - 4 z z' z'' + 3 z'^3 = 0$$

وهي معادلة متجانسة في z ومشتقاته ولهذا نفرض :

$$\frac{z'}{z} = u(x)$$

فيكون :

$$z' = z u , \; z'' = z (u' + u^2) \; , \; z''' = z (u'' + 3 u u' + u^3)$$

بالتعويض نجد :

$$z \left[u'' + 3 u u' + u^3 - 4 u (u' + u^2) + 3 u^3 \right] = 0$$

ولكن $z = 0$ اي $y' = 0$ يعطي الحل $y = c$. ولذلك (باصلاح ما داخل القوسين الكبيرين) نصل إلى المعادلة :

$$u'' - u u' = 0$$

وهذه لا تحوي x لذلك نعتبر u متحولاً مستقلا ونأخذ :

$$u' = p(u)$$

فيكون :

$$u'' = p' p$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$pp' - up = o$$

ومنه إما : $p = o$ أي : $u' = o$ أي : $u = c_1$

(c_1 ثابت كيفي) وبالتالي : $\frac{z'}{z} = c_1$

وبالمكاملة : $z = c_2 e^{c_1 x}$ ، $y' = c_2 e^{c_1 x}$

وبالمكاملة ثانية نجد :

$$y = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x} + c_3$$

أو :

$$p' = u$$

وبالمكاملة :

$$p = \frac{1}{2} (u^2 + c)$$

حيث c ثابت كيفي . وبما أن : $u' = p$ يكون :

$$u' = \frac{1}{2} (u^2 + c)$$

أو : $$\frac{du}{u^2 + c} = \frac{1}{2} du$$

وهنا نميز ثلاث حالات اذا كان c موجباً نضع :

$c = c_1^2$ (c_1 ثابت كيفي) فنجد :

$$\frac{du}{u^2 + c_1^2} = \frac{1}{2}dx$$

وبالتالي :

$$\operatorname{arctg}\frac{u}{c_1} = \frac{1}{2}c_1 x + c_2$$

أو :

$$u = c_1 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)$$

اذن :

$$\frac{dz}{z} = c_1 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)}$$

وبالمكاملة :

$$\lg\frac{z}{c_3} = -\ 2 \lg\cos\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)$$

اذن :

$$y' = z = \frac{c_3}{\cos^2\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right)}$$

ومنه :

$$y = \frac{2\ c_3}{c_1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_2\right) + c_4$$

وإذا كان c سالباً نكتب : $c = -\ c_1^2$ فنجد :

$$\frac{1}{2}dx=\frac{du}{u^2-c_1^{\ 2}}=\frac{1}{2c_1}\left(\frac{1}{u-c_1}-\frac{1}{u+c_1}\right)du$$

وبالمكاملة نجد :

$$\frac{u-c_1}{u+c_1}=c_2e^{c_1x}$$

أو :

$$u=c_1\frac{1+c_2e^{c_1x}}{1-c_2e^{c_1x}}$$

ومنه :

$$\frac{dz}{z}=c_1\frac{1+c_2e^{c2x}}{1-c_2e^{c_1x}}dx$$

وللمكاملة هنا نفرض $v=c_2\,e^{c_1x}$ فنجد بالتعويض :

$$\frac{dz}{z}=\frac{1+v}{1-v}\frac{dv}{v}=\frac{dv}{v}+\frac{2\,dv}{1-v}$$

ومنه :

$$\lg\frac{z}{c_3}=\lg\frac{v}{(1-v)^2}$$

اذن :

$$z=\frac{c_3\,v}{(1-v)^2}=c_3\frac{c_2e^{c_1x}}{(1-c_2e^{c_1x})^2}$$

أي :

$$dy=c_3\,c_2\frac{e^{c_1x}}{(1-c_2e^{c_1x})^2}dx$$

نفرض أن : $c_2e^{c_1x}=W$

فيكون : $\frac{dw}{W}\frac{1}{c_1}=dx$ ،

اذن : $dy = \frac{c_3}{c_1} \frac{dw}{(1-w)^2}$

ومنه : $y = \frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{c_3}{c_1} \frac{1}{1-c_2 e^{c_1 x}} + c_4$

واذا كان c معدوماً نجد : $\frac{dx}{u^2} = \frac{1}{2} dx$

ومنه بعد المكاملة والاصلاح : $u = -\frac{2}{x+c_1}$

وبالعودة الى z والمكاملة نجد : $z = \frac{c_2}{(x+c_1)^2}$

واخيراً : $y = -\frac{c_2}{x+c_1} + c_3$

٥٤٧ – تحقق من أن للمعادلة الخطية :

$$x(x^2+1)y'' + 2y' - 2xy = 0 \quad (1)$$

حلاً خاصاً من الشكل $y = x^n$ (حيث n ثابت) .
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

أوجد بعد ذلك (بطريقة تحويل الثوابت) الحل العام للمعادلة :

$$x(x^2+1)y'' + 2y' - 2xy = x^2+1 \quad (2)$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٧)

الحـل :

نعوض $y = x^n$ في المعادلة (1) فنجد :

$$n(n-1)x^{n-1}(x^2+1) + 2nx^{n-1} - 2x^{n+1} = 0$$

أو :

$$(n^2 - n - 2)x^{n+1} + (n^2+n)x^{n-1} \equiv 0$$

إذن يجب أن يكون :

$$n^2 - n - 2 = 0 \quad ; \quad n^2 + n = 0$$

أو : $n(n+1) = 0$ $\qquad$ $(n+1)(n-2) = 0$

وتتحققان (فقط) لمـّا $n = -1$ وبالتالي يكون :

$y = \dfrac{1}{x}$ حلاً خاصاً للمعادلة (1)

لنستخدم هذا الحل في تخفيض مرتبة المعادلة فنفرض :

$y = \dfrac{z}{x}$ ونعوض في (1) فنجد :

$$(x^2+1)z'' - 2xz' = 0$$

ولحل هذه المعادلة نضع : $z' = t$ فيكون :

$$(x^2+1)t' - 2xt = 0$$

وهذه معادلة ذات متحولات قابلة للفصل فاذا كاملناها نجد :

$$t = c(x^2+1)$$

أي : $z' = c(x^2+1)$

ومنه :
$$z = c\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + c_1$$
وإذا عوضنا z بما يساويها نجد الحل العام للمعادلة (1) :
$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 (x^2 + 3) \qquad (3)$$
لايجاد حل خاص لـ (2) نحول الثوابت في الحل العام (3) ونأخذ :
$$\frac{c_1'}{x} + c_2' (x^2 + 3)$$
ثم نحسب $y'' \; y'$ ونعوض بالمعادلة فنجد :
$$x(x^2+1)\left[-\frac{c'_1}{x^2} + c_2'(2x)\right] = x^2 + 1$$
وبحل المعادلتين الأخيرتين نجد :
$$c_1' = -\frac{x^3 + 3x}{3(x^2+1)} \quad ; \quad c_2' = \frac{1}{3(x^2+1)}$$
بالمكاملة نجد (باهمال الثوابت) :
$$c_2 = \frac{1}{3}\text{arc tg}x \quad , \quad c_1 = -\frac{x^2}{6} - \frac{1}{3}\lg(x^2+1)$$
ومنه الحل الخاص لـ (2) :
$$y_1 = -\frac{x}{6} - \frac{1}{3x}\lg(x^2+1) + \frac{1}{3}(x^2+3)\text{ arc tg }x$$
ويكون الحل العام لـ (2) :

$$y = y_1 + \frac{c_1}{x} + c_2 (x^2 + 3)$$

٥٤٨ – اذا كانت لدينا المعادلتان :

$$(1+x) x^2 y'' + (4 + 4 x + x^2) xy' + (2 + 2 x + x^2) y = 0$$

$$(1 - x) x^2 y'' + (6 - 4 x - x^2) xy' + (6 - 3 x^2) y = 0$$

فهل توجد حلول مشتركة بينهما ؟

في حالة الايجاب ، أوجد الحل العام للمعادلة الأولى ، ثم أوجد الحل العام المعادلة :

$$(1 + x) x^2 y'' + (4 + 4 x + x^2) xy' + (2 + 2 x + x^2) y = (1 + x)^2$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

الحل :

نوحد أمثال y'' في المعادلتين المفروضتين فنضرب طرفي الأولى بـ $(1 - x)$ وطرفي الثانية بـ $(1 + x)$ ثم نطرح فنجد أن مجموعة المعادلتين الأصليتين تكافىء مجموعة المعادلتين :

$$(1+x) x^2 y'' + (4 + 4 x + x^2) xy' + (2 + 2 x + x^2) y = 0$$

$$(2 + 2 x - 2 x^2) xy' + (4 + 6 x - 2 x^2 - 2 x^3) y = 0$$

ولايجاد الحلول المشتركة بين المعادلتين الأصليتين يكفي أن نجد الحلول المشتركة بين المعادلتين الأخيرتين ، ولهذا يكفي أن نجد جميع حلول المعادلة الثانية ثم نختار من بينها الحلول التي تحقق المعادلة الأولى . ولكن الثانية

تكتب بالشكل :

$$(2+2x-2x^2)\,x\frac{dy}{dx}=(2x^3+2x^2-6x-4)\,y$$

أو :

$$\frac{dy}{y}=-\frac{x^3+x^2-3x-2}{(x^2-x-1)\,x}dx=-\frac{x+2}{x}dx$$

$$=-\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

ومنه :

$$\lg\frac{y}{c}=-(x+2\lg x)$$

اذن :

$$y=c\,e^{-x-2\lg x}=\frac{c}{x^2}e^{-x}$$

وهذه هي جميع حلول المعادلة الثانية . وبالتعويض في المعادلة الأولى، نجد أن الطرف الأول يصبح :

$$\left[(1+x)x^2\left(\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)+(4+4x+x^2)\,x\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\right.$$
$$\left.+(2+2x+x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]ce^{-x}$$

او :

$$\left[(1+x)(6+4x+x^2)+(4+4x+x^2)(-2-x)+\right.$$
$$\left.(2+2x+x^2)\right]ce^{-x}$$

ومن السهل أن نرى ان هذا يطابق الصفر – اذن فالحلول المشتركة بين

المعادلتين هي التوابع : $y = \frac{c}{x^2} e^{-x}$ حيث c ثابت كيفي

لايجاد الحل العام للمعادلة الأولى نستخدم الحل الخاص :

$y = x^{-2} e^{-x}$ في تخفيض مرتبتها ، وذلك بفرض ان :

$y = x^{-2} e^{-x} z$ فيكون :

$$y' = x^{-2} e^{-x} z' + (-2x^{-3} - x^{-2}) e^{-x} z$$

$$y'' = x^{-2} e^{-x} z'' + 2(-2x^{-3} - x^{-2}) e^{-x} z' + (6x^{-4} + 4x^{-3} + x^{-2}) e^{-x} z$$

وبالتعويض في المعادلة نجد :

$$(1 + x) x z'' = (2x + x^2) z'$$

$$(1 + x) z'' = (2 + x) z'$$

أو :

$$\frac{dz'}{z'} = \frac{x + 2}{x + 1} dx$$

وبالمكاملة نجد :

$$\lg \frac{z'}{c_1} = x + \lg (x + 1)$$

أو :

$$z' = c_1 (x + 1) e^{x}$$

وبالمكاملة مرة ثانية نجد :

$$z = c_1 \left[e^{x} (x + 1) - e^{x} \right] + c_2$$
$$= c_1 x e^{x} + c_2$$

ومنه :

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x^2}$$

وهذا هو الحل العام المطلوب .

لايجاد الحل العام للمعادلة :

$$(1 + x)\, x^2 y'' + (4 + 4x + x^2)\, xy' + (2 + 2x + x^2)\, y = (1 + x)^2$$

نستخدم طريقة تحويل الثوابت ، وذلك بالبحث عن حل خاص لهذه المعادلة من الشكل :

$$y = c_1 \left(\frac{1}{x} \right) + c_2 \left(\frac{1}{x^2} e^{-x} \right)$$

حيث c_1 و c_2 تابعان لـ x ، نعينهما بفرض أن :

$$c_1' \left(\frac{1}{x} \right) + c_2' \left(\frac{1}{x^2} e^{-x} \right) = 0$$

فيكون :

$$y' = c_1 \left(-\frac{1}{x^2} \right) + c_2 \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) e^{-x}$$

$$y'' = c_1' \left(-\frac{1}{x^2} \right) + c_2' \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} + \cdots$$

وبالتعويض في المعادلة الجديدة نجد العلاقة الثانية :

$$(1+x)x^2\left[c_1\left(-\frac{1}{x^2}\right)+c_2'\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}\right]=(1+x)^2$$

وبذلك يكون علينا حساب c_1' و c_2' من المعادلتين :

$$c_1'x+c_2'e^{-x}=0$$

$$c_1'x+c_2'(2+x)e^{-x}=-x(1+x)$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$c_1'=1 \qquad c_2'=-xe^{x}$$

وبالمكاملة :

$$c_1=x \quad , \quad c_2=(-x+1)e^{x}$$

ومنه الحل الخاص :

$$y=1+\frac{1-x}{x^2}$$

فالحل العام المطلوب هو :

$$y=\frac{x^2-x+1}{x^2}+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2e^{-x}}{x^2}$$

٥٤٩ – لدينا المعادلة :

$$y(y+z)dx+z(z+x)dy+y[y+f(x)]dz=0$$

اكتب شرط الحل، ثم عين التابع $f(x)$ بحيث يكون هذا الشرط محققاً، ثم عوض عن $f(x)$ في المعادلة السابقة بالقيمة التي وجدتها، ثم

أوجد الحل العام للمعادلة الناتجة .

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٧٠)

الحـل :

ان شرط الحل للمعادلة :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$$

هو ، كما نعلم :

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \equiv o$$

فبالنسبة للمعادلة المفروضة يكون هذا الشرط :

$$y(y+z)\left[2z + x - 2y - f(x)\right] + z(z+x)\left[y f'(x) - y\right] + y\left[y + f(x)\right]\left[2y + z - z\right] \equiv o$$

أو :

$$y^2\left[2z + x - 2y - f(x)\right] + yz\left[2z + x - 2y - f(x)\right] + z(z+x)\,y f'(x) - zy(z+x) + 2y^3 + 2y^2 f(x) \equiv o$$

بما أن الطرف الأول كثير حدود في z ويطابق الصف فـان أمثاله كلها تطابق الصفر .

$$y\left[1 + f'(x)\right] \equiv o$$

$$x y f'(x) - y f(x) \equiv o$$

$$y^2 f(x) + y^2 x \equiv o$$

من الأولى نجد $f'(x) \equiv -1$ نعوض في الثانية فنحصل على :

$-xy - yf(x) \equiv 0$ ، ومنه $f(x) = -x$ ، وبالتالي :

$f'(x) \equiv -1$ وهذا يعني أن $f(x) \equiv -x$ يحقق الأولى والثانية .

نعوض في الثالثة فنجد $-xy^2 + xy^2 \equiv 0$ فهي محققة ايضاً . إذن :

$f(x) = -x$ يحقق الشرط المطلوب (ولا يوجد غيره) .

نعوض في المعادلة المفروضة فنجد :

$$y(y+z)\,dx + z(z+x)\,dy + y(y-x)\,dz = 0$$

ان هذه المعادلة قابلة للحل تماماً ومتجانسة . نحسب المقدار :

$$Px + Qy + Rz = y(y+z)x + z(z+x)y + y(y-x)z$$

$$= xy^2 + xyz + z^2y + zy^2$$

فهو لا يطابق الصفر ، اذن المقدار :

$$\frac{1}{xy^2 + xyz + z^2y + zy^2}$$

عامل تكميل للمعادلة .

بتحليل المخرج نجد ان عامل التكميل هذا يكتب بالشكل :

$$\frac{1}{y(y+z)(x+z)}$$

لنضرب المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة :

$$\frac{dx}{x+z} + \frac{3\,dy}{y(y+z)} + \frac{(y-x)\,dz}{(y+z)(x+z)} = 0$$

نكامل الحد الأول فنجد :

$$\lg(x+z) + h(y, z)$$

نشتق بالنسبة إلى y فنحصل على :

$$h'y = \frac{z}{y(y+z)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+z}$$

ومنه :

$$h = \lg y - \lg(y+z) + g(z)$$

نعوض h بقيمتها فنجد :

$$\lg(x+z) + \lg y - \lg(y+z) + g$$

نشتق بالنسبة إلى z فنحصل :

$$\frac{1}{x+z} - \frac{1}{y+z} + g'(z) = \frac{y-x}{(y+z)\ (z+x)}$$

ومنه :

$$g'(z) = o$$

اذن :

$$g(z) = \text{const}$$

فيكون تكامل الطرف الأول من المعادلة هو:

$$\lg(x+z) + \lg y - \lg(y+z) + \text{const}$$

والحل العام للمعادلة هو :

$$\lg \frac{y(x+z)}{y+z} = \text{cont}$$

أو :

$$\frac{y(x+z)}{y+z} = c$$

حيث c ثابت كيفي .

٥٥٠ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2 - y^2 - z^2)\,p + 2\,x\,yq = 2\,x\,(z + 1)$$

ثم أوجد السطح التكاملي الذي يحوي الدائرة :

$$x^2 + z^2 = 1 \quad ; \quad y = 1$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠)

الحل :

نكتب المجموعة الملحقة .

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2\,xy} = \frac{dz}{2\,x\,(z+1)}$$

من النسبتين الأخيرتين نجد : $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z+1}$

وحل هذه المعادلة هو : $\dfrac{z+1}{y} = c$

إذن : $\dfrac{z+1}{y}$ تكامل اولي نستخدمه في تخفيض المرتبة .

لنجعل : $z = c\,y - 1$ في النسبتين الأوليتين فنحصل :

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - (c\,y - 1)^2} = \frac{dy}{2\,xy}$$

ومنه :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - (c\,y - 1)^2}{2\,x\,y}$$

وهي معادلة برنويي يمكن حلها بالطريقة المعروفة ، أو نكتب

$$\frac{dx^2}{dy} = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2 + (cy - 1)^2}{y}$$

وهي خطية في x^2 . نحلها أولاً بدون طرف :

$$\frac{dx^2}{dy} = \frac{x^2}{y}$$

فنجد :

$$x^2 = ky$$

ثم نحول الثابت k :

$$y \frac{dk}{dy} = -\frac{y^2 + c^2 y^2 - 2cy + 1}{y}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل :

$$k = -(1 + c^2)y + 2c\lg y + \frac{1}{y} + c_1$$

اذن :

$$x^2 = -(1 + c^2)y^2 + 2c_y \lg y + 1 + c_1 y$$

أو :

$$\frac{1}{y}\left[x^2 + (1 + c^2)y^2 - 2cy\lg y - 1\right] = c_1$$

ومنه التكامل الأولي :

$$\frac{1}{y}\left[x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 2(z + 1)\lg y - 1\right]$$

فالحل العام للمعادلة المفروضة يتعين بالمعادلة :

$$F\left[\frac{z+1}{y},\right.$$

$$\left.\frac{1}{y}(x^2+y^2+(z+1)^2-2(z+1)\lg y-1)\right]=0$$

حيث F تابع كيفي .

ولايجاد السطح التكاملي الخاص نكتب المعادلات :

$$y=1\ ;\ x^2+z^2+1\ ;\ \frac{z+1}{y}=c_1$$

$$\frac{1}{y}\left[x^2+y^2+(z+1)^2-2(z+1)\lg y-1\right]=c_2$$

ثم نعوض الأولى في البقية :

$$x^2+z^2=1\ ;\ z+1=c_1\quad ;\quad x^2+(z+1)^2=c_2$$

أو : $x^2+(c_1-1)^2=1\quad ;\quad x^2+c_1^2=c_2$

أو : $c_2-c_1^2+(c_1-1)^2=1$

إذن : $c_2-2c_1=0$

فالسطح المطلوب :

$$\frac{1}{y}\left[x^2+y^2+(z+1)^2-2(z+1)\lg y-1\right]=\frac{2(z+1)}{y}$$

أو :

$$x^2+y^2+(z+1)^2-2(z+1)\lg y-1=2(z+1)$$

أو :

$$x^2+y^2+z^2-2(z+1)\lg y-2=0$$

۵۵۱ - أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$x^2 q (x p + y q) x p + z = 0$$

ثم أوجد السطح التكاملي الذي يحوي القطع :

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad z + (y + 1)^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

الحل :

لايجاد تكامل تام نكتب المجموعة الملحقة :

$$\frac{dx}{x^3 q + x} = \frac{dy}{x^3 p + 2 x^2 yq} = \frac{dz}{2 x^3 q p + xp + 2 x^2 yq^2} =$$

$$= \frac{dp}{3 x^2 pq + 2 x y q^2 + 2 p} = \frac{-dq}{x^2 q^2 + q}$$

ومن النسبتين الأولى والأخيرة نجد :

$$\frac{dx}{x (x^2 q + 1)} + \frac{dq}{q(x^2 q + 1)} = 0$$

أو :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dq}{q} = 0$$

ومنه التكامل الأولي : xq .

نكتب $x q = a$ ، ومنه $q = \frac{a}{x}$ وبالتعويض في المعادلة المفروضة نجد:

$$p = -\frac{a^2 y + z}{ax^2 + x}$$

وبالتعويض في :

$$dz = pdx + q\,dy$$

نجد :

$$(1) \quad dz = -\frac{a^2y + z}{ax^2 + x}dx + \frac{a}{x}\,dy$$

لحلها نهمل الحد الأول فنجد :

$$z = \frac{ay}{x} + f(x)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) مرة ثانية نجد :

$$\frac{-ay}{x^2} + f'(x) = -\frac{a^2y + \frac{ay}{x} + f(x)}{ax^2 + x}$$

أو :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{f}{x(ax + 1)}$$

وبالمكاملة نجد :

$$f(x) = b\,\frac{ax + 1}{x}$$

فالتكامل التام المطلوب :

$$z = \frac{ay}{x} + \frac{b}{x} + ab$$

لايجاد السطح التكاملي الذي يحوي القطع المشار إليه في نص السؤال نكتب معادلة القطع على الشكل .

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = t \quad z = -(t+1)^2$$

ثم نفتش عن سطوح التكامل التام التي تمر من النقطة المقابلة لـ t وتمس القطع فيها . بالتعويض في التكامل التام :

$$2at + 2b + ab + (t+1)^2 = 0 \qquad (2)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ t :

$$2(t+1) + 2a = 0 \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد :

$$a = b = -(t+1)$$

وبالتعويض في التكامل التام نجد المجموعة البسيطة من سطوحه :

$$z = -(t+1)\frac{y}{x} - (t+1)\frac{1}{x} + (t+1)^2$$

حيث t هو الوسيط الوحيد : لنبحث عن مغلف هذه المجموعة فنكتب ان المميز بالنسبة إلى الوسيط (t + 1) معدوم :

$$(y+1)^2 + 4x^2 z = 0$$

ومنه يكون :

$$z = -\frac{(y+1)^2}{4x^2}$$

هو السطح التكاملي المطلوب .

٥٥٢ - إذا كانت لدينا المعادلة :

$$(1)\qquad z^2\,dx + (z^2 - 2yz)\,dy + f(x,y,z)\,dz = 0$$

فيطلب تعيين جميع التوابع $f(x, y, z)$ التي تجعل هذه المعادلة قابلة للحل تماماً. اختر (بعد ذلك) أحد التوابع الناتجة (كما تشاء)، وسمه $f_1(x, y, z)$، ثم أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2)\qquad z^2\,dx + (z^2 - 2yz)\,dy + f_1(x,y,z)\,dz = 0$$

وأوجد (ايضاً) جميع عوامل تكميل هذه المعادلة الأخيرة.

(جامعة دمشق، مقرر المعادلات التفاضلية، الدورة الاولى ١٩٧١)

الحل :

كي تكون المعادلة (1) قابلة للحل تماماً يجب أن يتحقق الشرط :

$$z^2\left[2z - 2y - f'_y\right] + (z^2 - 2yz)\left[f'_x - 2z\right] = 0$$

أو :

$$(3)\qquad (z - 2y)\,f'_x - z\,f'_y + 2yz = 0$$

حيث f تابع لـ x و y و z . إن المعادلة (3) جزئية خطية بطرف ثان بالنسبة إلى f . لايجاد جميع حلولها نكتب المجموعة الملحقة :

$$\frac{dx}{z-2y} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{0} = \frac{df}{-2yz}$$

من النسبة الثالثة نجد التكامل الأولي : z ومن الثانية والرابعة نجد التكامل الأولي $f - y^2$ ، لايجاد تكامل أولي ثالث نستفيد من الأول فنكتب $z = c$ ونعوض في النسبتين الأولى والثانية فنجد :

$$\frac{dx}{c-2y} = \frac{dy}{-c}$$

أو :

$$c\,dx + (c - 2y)\,dy = 0$$

ومنه :

$$cx + cy - y^2 = \text{const} .$$

فالتكامل الأولي الثالث $z(x+y) - y^2$ والحل العام لـ (3) يعطى بالعلاقة :

$$f - y^2 = H\left[z, xz + yz - y^2\right]$$

حيث H تابع كيفي . إذن فجميع التوابع المطلوبة $f(x, y, z)$ تعطى بالعلاقة :

$$f(x, y, z) = y^2 + H\left[z, xz + yz - y^2\right]$$

نختار أحد هذه التوابع وليكن $f_1(x, y, z) = y^2$ ونعوض في (2) فنحصل على المعادلة :

$$z^2\,dx + (z^2 - 2yz)\,dy + y^2\,dz = 0$$

وهذه المعادلة قابلة للحل تماماً . لحلها نبدأ بـ :

$$z^2\,dx + (z^2 - 2yz)\,dy = 0$$

حيث نعتبر z ثابتاً . نكامل فنجد :

$$z^2 x + z^2 y - z y^2 = g(z)$$

فالحل العام يعطى بعلاقة من الشكل :

$$(4) \qquad z^2 x + z^2 y - z y^2 - g(z) = 0$$

حيث $g(z)$ تابع مجهول نريد تعيينه . نفاضل (4) :

$$z^2\,dx + (z^2 - 2zy)\,dy + \left[2zx + 2zy - y^2 + g'\right] dz = 0$$

يجب أن تتناسب امثال هذه المعادلة مع امثال المعادلة الأصلية ومنه :

$$\frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 - 2\,zy}{z^2 - 2\,zy} = \frac{2z\,x + 2z\,y - y^2 - g'}{y^2}$$

وهذه المطابقات محققة من أجل جميع قيم x, y, z المحققة للعلاقة (4) ومنه :

$$2\,z\,x + 2\,zy - y^2 - g' = y^2$$

أو :

$$g' = -\,2\,y^2 + 2\,z\,x + 2\,z\,y$$

وبالاستفادة من (4) :

$$g' = \frac{2\,g}{z}$$

ومنه :

$$g = c\,z^2$$

فالحل العام يعطى بالعلاقة :

$$z^x + zy - y^2 - c^z = o$$

حيث c ثابت كيفي .

لايجاد عامل تكميل نكتب :

$$x + y - \frac{y^2}{z} = c$$

ثم نفاضل فنجد

$$dx + \left(1 - \frac{2y}{z}\right)dy + \frac{y^2}{z^2}dz$$

ويكون عامل التكميل هو :

$$\mu_1 = \frac{1}{z^2} = \frac{1 - \frac{2y}{z}}{z^2 - 2yz} = \frac{\frac{y^2}{z^2}}{y^2}$$

وجميع عوامل التكميل هي :

$$\mu = \frac{1}{z^2} H(x + y - \frac{y^2}{z})$$

حيث H تابع كيفي .

٥٥٣ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$z''_{x^2} - 4 z''_{y^2} - 4 z'_x + 4 z = (x + y) e^{x - y}$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩)

الحل :

نكتب هذه المعادلة بالشكل :

$$(D^2 - 4 D'^2 - 4 D + 4) z = (x + y) e^{x - y}$$

أو :

$$\left[(D - 2)^2 - 4 D'^2 \right] z = (x + y) e^{x - y}$$

$$(D + 2 D' - 2) (D - 2D' - 2) z = (x + y) e^{x - y}$$

نبدأ بحل المعادلة بدون طرف ثان :

$$(1) \quad (D + 2 D' - 2) (D - 2 D' - 2) z = 0$$

ولهذا نأخذ المعادلة :

$$(D + 2 D' - 2) z = 0$$

أو : $p + 2q - 2z = o$

إن المجموعة الملحقة لهذه المعادلة هي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{2z}$$

وبسهولة نجد التكاملين الأولين :

$$y - 2x \; ; \quad ze^{-2x}$$

فالحل العام هو :

$$ze^{-2x} = f_1 (y - 2x)$$

أو : $z = e^{2x} f_1 \ (y - 2x)$

حيث f_1 تابع كيفي .

وكذلك نكتب المعادلة :

$$(D - 2D' - 2) z = o$$

التي مجموعتها الملحقة :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{2z}$$

والتي تقبل :

$$y + 2x \quad ; \quad ze^{-2x}$$

تكاملين أوليين لها ، إن الحل العام لهذه المعادلة اذن :

$$z = e^{2x} f_2 (y + 2x)$$

والحل العام للمعادلة (١) هو :

$$z = e^{2x} f_1 (y - 2x) + e^{2x} f_2 (y + 2x)$$

لنفتش عن حل خاص بدون طرف ثان. نرمز لهذا الحل بالرمز z_1 ونرمز لـ $(D - 2D' - 2)\, z_1$ بالرمز u فيكون :

$$(D + 2D' - 2)\, u = (x + y)\, e^{x-y}$$

وبذلك يكفي أن يكون u_1 حلاً خاصاً للمعادلة :

$$u'_x + 2u'_y - 2u = (x + y)\, e^{x-y} \qquad (2)$$

إن المجموعة الملحقة لهذه المعادلة هي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{(x+y)\, e^{x-y} + 2u}$$

لهذه المعادلة تكامل أولي : $y - 2x$. لايجاد تكامل أولي ثان نكتب $y - 2x = k$ ومنه $y = 2x + k$ وبالتعويض في المجموعة الملحقة نجد :

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{2u + (3x + k)\, e^{-x-k}}$$

أي :

$$\frac{du}{dx} = 2u + (3x + k)\, e^{-x-k}$$

وبحل هذه المعادلة الخطية في u نجد :

$$u = -\frac{1}{3} e^{-x-k} (3x + k + 1) + c_1 e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت كيفي . بتعويض k بقيمتها وبعزل الثابت c_1 نجد التكامل الأولي الثاني .

$$ue^{-2x} + \frac{1}{3}(x + y + 1)\, e^{-x-y}$$

والحل العام للمعادلة (2) هو :

$$ue^{-2x} \times \frac{1}{3}(x+y+1)e^{-x-y} = f(y-2x)$$

حيث f تابع كيفي . نأخذ $f(t) \equiv o$ فنجد الحل الخاص للمعادلة (2) :

$$u_1 = -\frac{1}{3}(x+y+1)e^{x-y}$$

وبما أن : $$(D-2D'-2)z_1 = u_1$$

فإن :

$$z'_{1x} - 2z'_{1y} - 2z_1 = -\frac{1}{3}(x+y+1)e^{x-y}$$

إن المجموعة الملحقة لهذه المعادلة هي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz_1}{2z_1 - \frac{1}{3}(x+y+1)e^{x-y}} \qquad (3)$$

لهذه المعادلة تكامل أولي : $y + 2x$. لايجاد تكامل أولي ثان نكتب $y + 2x = k$. وبالتعويض في المجموعة الملحقة نجد :

$$\frac{dz_1}{dx} = 2z_1 - \frac{1}{3}(k+1-x)e^{3x-k}$$

وبحل هذه المعادلة الخطية فى z_1 نجد (بعد تعويض k بقيمتها) :

$$z_1 = -\frac{1}{3}(x+y+2)e^{x-y} + c_2 e^{2x}$$

حيث c_2 ثابت كيفي . بعزل الثابت c_2 نجد التكامل الأولي الثاني :

$$z_1 e^{-2x} + \frac{1}{3}(x+y+2)e^{-x-y}$$

والحل العام للمعادلة (3) هو :

$$z_1 e^{-2x} + \frac{1}{3}(x+y+2)e^{-x-y} = f_1(y+2x)$$

حيث f_1 تابع كيفي . نأخذ $f_1(t) \equiv 0$ فنجد الحل الخاص المطلوب .

$$z_1 = -\frac{1}{3}(x+y+2)e^{x-y}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$z = e^{2x} f_1(y-2x) + e^{-2x} f_2(y+2x) - \frac{1}{3}(x+y+2)e^{x-y}$$

تمارين غير محلولة

٥٥٤ – تحقق من أن للمعادلة :

$$(2xy^3 - y^2 + x^2 y)\,dx + (x^3 - x^2 y^2 + 2xy)\,dy = 0$$

عامل تكميل من الشكل $(py + q)^n$ ، حيث p ، q تابعان لـ x (فقط) و n ثابت . ثم أوجد الحل العام للمعادلة ، وجميع عوامل تكميلها .

(جامعة دمشق، مقرر المعادلات التفاضلية ، للسنة الثالثة ، الدورة الثانية ١٩٦٧)

ج : عامل التكميل : $\dfrac{1}{x^2 (xy - 1)^2}$

الحل العام : $\dfrac{y^2 + x}{x(xy - 1)} = c$

وأما جميع عوامل التكميل فهي :

$$\frac{1}{x^2 (xy - 1)^2}\, F\left[\frac{y^2 + x}{x(xy - 1)}\right]$$

٥٥٥ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2 + 4xy + x + y)\,dx + (8xy + 8y^2 + x + 4y)\,dy = 0$$

مع العلم بان لها عامل تكميل يتعلق بـ $x + 2y$ فقط ، ثم أوجد جميع عوامل تكميل هذه المعادلة .

(جامعة دمشق: مقرر المعادلات التفاضلية للسنة الثالثة ، الدورة الأولى ١٩٦٨)

ج : عامل التكميل : $\dfrac{1}{(2x+4y+1)^2}$

الحل العام : $\dfrac{x^2 + 2xy + 4y^2}{2x + 4y + 1} = c$

جميع عوامل التكميل :

$$\frac{1}{(2x+4y+1)^2} F\left[\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{2x + 4y + 1}\right]$$

٥٥٦ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xy^3\,dx - (3xy + 2)\,dy = 0$$

وجميع عوامل تكميلها ، مع العلم بأن لها عامل تكميل (غير الصفر) من الشكل :

$$[\,p(y) + xq(y)\,]^n$$

حيث n ثابت .

(جامعة دمشق : شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧٠)

ج : للمعادلة عاملا تكميل من الشكل المذكور هما :

$$\mu_1 = (xy + 2)^{-3} \quad ; \quad \mu_2 = (xy^2 + y)^{-\frac{3}{2}}$$

الحل العام : $\dfrac{xy^2 + y}{(xy+2)^2} = c$

أما جميع عوامل التكميل فهي :

$$\frac{1}{(xy+2)^3} F\left[\frac{xy^2 + y}{(xy+2)^2}\right]$$

٥٥٧ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y (1 - x) dx + (x + 2 x^2 + y^2) dy = 0$$

مع العلم بأن لها عامل تكميل من الشكل :

$(x p + q)^n$ حيث p و q تابعان لـ y و n ثابت .

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧١)

ج : للمعادلة عاملا تكميل من الشكل المذكور هما :

$$(2 x + y^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} \quad ; \quad (3 xy + y^3)^{-\frac{5}{3}}$$

الحل العام :

$$\frac{(3 xy + y^3)^2}{(2x + y^2 + 1)^3} = c$$

٥٥٨ – حل المعادلة :

$$(2 y^2 - xy + 2 y) dx + (x^2 - 2 x y + y) dy$$

وأوجد جميع عوامل تكميلها ، مع العلم بأن لها عامل تكميل من الشكل

$$\frac{1}{y} f(y + 2 x)$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠).

ج : عامل التكميل :

$$\mu = \frac{1}{y(y + 2 x)^2}$$

الحل العام :

$$F = \frac{1}{4} \lg \frac{y}{y + 2 x} - \frac{4 + 5 y}{4} \frac{1}{y + 2 x} = c$$

جميع عوامل التكميل :

$$\frac{1}{y(y+2x)^2} H(F)$$

حيث H تابع كيفي .

٥٥٩ – عين جميع التوابع f (x) التي يكون (من اجل كل منها) للمعادلة:

$$o = y' + [y + f(x)]^2$$

حلان خاصان y_1 و y_2 يحققان العلاقة :

$$y_2 = 4y_1 + 1$$

ثم تحقق من أن هناك تابعين f (x) يحقق كل منها الشرط السابق ، وينعدم كل منهما من أجل x = o ، أوجد هذين التابعين ، ثم عوض بكل منهما عن f (x) في المعادلة الاصلية ، ثم أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الناتجتين .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨)

ج : التوابع f (x) المطلوبة هي :

$$f(x) = \frac{2}{(3+1{,}5a)(x-a)} + \frac{1}{3}$$

(a ثابت كيفي) .

وأما التابعان f (x) اللذين ينعدمان عندما x = o فهما :

$$\frac{x}{3x-2} \quad ; \quad \frac{x}{3(x+6)}$$

الحل العام الموافق للقيمة الاولى :

$$y=\frac{c(x-2)\sqrt[3]{3x-2}+(1-x)}{(3x-2)\left(1-c\sqrt[3]{3x-2}\right)}$$

الحل العام الموافق للقيمة الثانية :

$$y=\frac{c(x-6)(x+6)^3-(x+3)}{3(x+6)\left[1-c(6+x)^3\right]}$$

٥٦٠ – عين جميع التوابع $f(x)$ التي تجعل للمعادلة :

$$xy'+y^2+(x+1)y+x+2f(x)$$

حلين خاصين y_1 و y_2 يحققان العلاقة :

$$y_2=2y_1+x+1$$

ثم حل المعادلة :

$$xy'+y^2+(x+1)y+x+\frac{2}{9}x^2=0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

٥٦١ – حل المعادلة :

$$(2x-2y+3)dx+(2x-3y+1)dy+(x+2y+3)(y\,dx-x\,dy)=0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠)

ج : $$\frac{1}{x}=\frac{5}{2}+\frac{3x+y}{4x}\lg\frac{x+y}{3x+y}+c\frac{3x+y}{x}$$

٥٦٢ – حل المعادلة التالية (بعد أن تخفض مرتبتها) :

$$x^3 (x-y)\, y'' + x^3 y'^2 - xy\,(3x-y)\, y' + (2x-y) y^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧)

ج : $y = c_2 x \;;\; y = x \dfrac{(1-c)\, c_1 x - 1}{c_1 x^c - 1}$

٥٦٣ – حل المعادلة التالية (بعد أن تخفض مرتبتها) :

$$12\, y'''^3 - 9\, y''\, y'''\, y^{(4)} + y''^2\, y^{(5)} = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى١٩٦٨)

ج : $y = c_3 (x-c_2)\, \lg\left[(x-c_2) + \sqrt{(x-c_2)^2 - c_1} \right]$
$- c_3 \sqrt{(x-c_2)^2 - c_1} + c_4 x + c_5$

٥٦٤ – خفض بطريقتين مختلفتين ، مرتبة المعادلة :

$$2x^2 yy'' - x^2 y'^2 + y^2 = 0$$

واستنتج من ذلك ، في كل مرة ، حلها العام .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٩)

ج : $y = c_1 x\, (\lg x + c)^2$

٥٦٥ – اوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{(x+1)^2}$$

مستخدماً (لايجاد الحل الخاص) طريقة تحويل الثوابت .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٧)

ج : $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + \frac{c_3 \lg x}{x} + \frac{1-2x}{4x} + \frac{x^2-1}{2x}\lg\frac{x+1}{x}$

٥٦٦ – اوجد جميع الحلول المشتركة بين المعادلتين :

$$(4x^2-1)y'' + 4xy' - y = 0$$

$$(2x-1)y'' + 2xy' - y = 0$$

ثم اوجد الحل العام للمعادلة الاولى منهما .

اوحد بعد ذلك (بطريقة تحويل الثوابت) الحل العام للمعادلة :

$$(4x^2-1)y'' + 2xy' - y = \sqrt{4x^2-1}$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٦٨)

ج : الحلول المشتركة $y = c\sqrt{2x-1}$: الحل العام المطلوب :

$$y = c_1\sqrt{2x+1} + c_2\sqrt{2x-1} + \frac{1}{3}\sqrt{4x^2-1}$$

٥٦٧ – اوجد الحلول المشتركة بين المعادلتين :

$$(1) \quad xy'' + 2(1-x)y' - 2y = 0$$

$$(2) \quad x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$$

ثم اوجد الحل العام لكل منهما .

ثم اوجد (بطريقة تحويل الثوابت) الحل العام للمعادلة :

$$(3) \quad xy'' + 2(1-x)y' - 2y = 1$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٦٨)

ج : الحلول المشتركة $y = \frac{c}{x}$

الحل العام للاولى : $y=\frac{c_1}{2x}e^{2x}+\frac{c_2}{x}$

الحل العام للثانية : $y=\frac{c_1}{x}+c_2(x+1)$

الحل العام للثالثة : $y=\frac{c_1}{2x}e^{2x}+\frac{c_2}{x}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}$

٥٦٨ – اوجد الحل العام لكل من المعادلتين :

$$xy''-3y'-(x+1)y=0$$
$$(x+4)y'+(x+3)y=5e^{-x}$$

مع العلم بان لهما حلا مشتركا

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الاولى ١٩٧١)

ج : $y=c_1(2x^2-4x+3)e^x+c_2(2x+3)e^{-x}$

$y=-5e^{-x}+c(x+4)e^{-x}$

٥٦٩ – تحقق من أن للمعادلة :

$$(1)\quad y''\sin^2 x+(\cos x-3)y'\sin x+2y=0$$

حلين خاصين y_1 و y_2 يحققان العلاقة $y_2=y_1^2$ (أحدهما مربع الآخر) واوجد هذين الحلين الخاصين ، والحل العام للمعادلة . ثم اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2)\quad y''\sin^2 x+(\cos x-3)y'\sin x+2y=(1-\cos x)^2$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٨٠)

ج : الحلان الخاصان : $tg\frac{x}{2}\ ,\ tg^2\frac{x}{2}$

الحل العام للمعادلة (2):

$$y = c_1 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_2 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - x \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

٥٧٠ – حل المعادلة :

$$x\,(x^3 y''' + 6x^2 y' - 12y)' + (x-3)\,(x^3 y''' + 6x^2 y'' - 12y) = 3x^4 + 4x^5$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٦٩)

٥٧١ – اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x_1^2 - x_2^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_1 (x_3 + x_4)\frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_1 (z+1)$$

حيث z تابع لـ (x_1, x_2, x_3, x_4)

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الأولى ١٩٧٠)

ج :

$$F\left[\frac{z+1}{x_2}, \frac{1}{x_2}\left(x_1^2 + x_2^2 + (z+1)^2 - 2(z+1)\lg x_2 - 1\right), x_4, \frac{x^2}{(x_3+x_4)^2}\right] = 0$$

٥٧٢ – اوجد تكاملا تاما للمعادلة :

$$p^2 + 2y^4 (xp + yq - 3z) = 0$$

ثم اوجد السطوح التكاملية التي تحوي القطع :

$$y = 1 \quad ; \quad z + x^2 = 1$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٦٨)

ج : التكامل التام : $z = axy^2 + by^3 + \frac{a^2}{6}$

السطح المطلوب : $z = y^3 - \frac{3x^2y^4}{y^3+2}$

٥٧٣ – تحقق من أن المعادلة :

$$z^2\,dx + (z^2 - 2yz)\,dy + (2y^2 - xz - yz)\,dz = 0$$

قابلة للحل تماما ، ثم اوجد حلها العام ، واستنتج منه عامل تكميل لطرفها الأيمن

عين جميع التوابع $f(x, y, z)$ التي تجعل المعادلة التالية قابلة للحل تماما :

$$[z^2 + f(x, y, z)]\,dx + [z^2 - 2yz + f(x, y, z)]\,dy + [2y^2 - xz - yz + f(x, y, z)]\,dz = 0$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٦٨)

ج : الحل العام: $\frac{(x+y)z - y^2}{z^2} = c$

عامل تكميل : $\frac{1}{z^3}$

التوابع f المطلوبة :

$$f = z^3 F\left(x + y + z\right)\frac{y^2 - xz - yz}{z^2}\,]$$

٥٧٤ – اوجد تكاملا تاما للمعادلة :

$$p^2 + 2y^3(xp + yq - 7z)$$

ثم اوجد السطح التكاملي الذي يحوي القطع :

$$y = 1 \quad ; \quad 2z + 3x^2 = 0$$

(جامعة دمشق ، شهادة المعادلات التفاضلية ، الدورة الثانية ١٩٧٠)

ج : التكامل التام : $z = axy^6 + by^7 + \frac{a^2}{6} y^4$

السطح التكاملي : $z = - \frac{3}{2} x^2 y^8$

٥٧٥ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + y + 2) e^{x + 2y}$$

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الأولى ١٩٧٠)

٥٧٦ – لدينا مجموعة المنحنيات :

$$xyz = c_1 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان كيفيان

اوجد جميع السطوح التي يتعامد كل منها ، في كل نقطة من نقاطه ، مع منحنى المجموعة السابقة المار من هذه النقطة .

(جامعة دمشق ، مقرر المعادلات التفاضلية الجزئية ، الدورة الثانية ١٩٦٨)