الفصل الثاني عشر

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية

١ – نقول عن معادلة إنها تفاضلية جزئية إذا حوت بالاضافة إلى التابع المجهول ومتحولاته (وهي على الأقل متحولان) المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للمتحولات.

فإذا ورد في المعادلة مشتقات جزئية من المرتبة الأولى على الأكثر قلنا إنها معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى وإن ورد في المعادلة مشتقات جزئية من المرتبة الثانية على الأكثر قلنا إنها معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية .

وعندما يكون التابع المجهول تابعاً لمتحولين فقط يكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى :

$$F(x, y, z, p, q) = o \qquad (1)$$

(بفرض $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$)

ويكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية .

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = o \qquad (2)$$

(بفرض $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ و $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$)

٢ – كل تابع في المتحولات المستقلة يجعل من المعادلة التفاضلية الجزئية متطابقة في هذه المتحولات يدعى حلاً للمعادلة التفاضلية أو تكاملاً لها .

٣ – نقول عن معادلة تفاضلية جزئية إنها خطية من المرتبة الأولى إذا كانت من الشكل :

(3) $$\sum_{i=1}^{n} P_i (x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } , \dots , x_n , z) p_i = R (x_1 , x_2 , \dots x_n , z)$$

$$(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad \text{بفرض})$$

ونقول إنها خطية متجانسة إذا كانت من الشكل :

(4) $$\sum_{i=1}^{n} P_i (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \; p_i = o$$

وإذا كان عدد المتحولات اثنين آلتا(3) و (4) إلى الشكل :

(5) $$P (x, y , z) p + Q (x, y , z) = k (x , y , z)$$

(6) $$P(x , y) p + Q (x , y) q = o$$

٤ – لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة من المرتبة الأولى (6) نبدأ بحل المعادلة التفاضلية :

(7) $$\frac{dx}{P (x , y)} = \frac{dy}{Q (x , y)}$$

فإذا كان حل هذه المعادلة هو :

(8) $$\varphi (x , y) = c$$

فعندئذ يكون الحل العام للمعادلة (6) هو :

(9) $$z = \Phi [\varphi (x , y)]$$

حيث $\Phi (u)$ تابـع كيفي في u .

٥ – لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة (4) نبدأ بحل مجموعة المعادلات :

$$\frac{dx_1}{P_1 (x_1 , x_2 , \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_2 (x_1 , x_2 ,\dots, x_n)}$$

فإذا كان لهذه المجموعة من المعادلات مجموعة الحلول الأساسية المستقلة :

$$\varphi_1 (x_1 , \dots x_n) = c_1 \text{ ، } \dots \text{ ، } \varphi_{n-1} (x_1 \text{ و } \dots \text{ و } x_n) = c_{n-1}$$

يكون الحل العام للمعادلة (4) هو :

$$z = \Phi (\varphi_1 , \varphi_2 , \dots , \varphi_{n-1})$$

حيث $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ تابع كيفي للمتحولات u_1 و u_2 و ... و u_{n-1} .

٦ – لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى (5) نبدأ بحل المعادلات:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

فإذا كانت حلول مجموعة المعادلات هذه هي :

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1 \qquad \varphi_2(x, y, z) = c_2 \tag{10}$$

(بفرض φ_1 و φ_2 تابعين مستقلين)

يكون الحل العام للمعادلة المذكورة هو :

$$\varphi_1(x, y, z) = \Phi[\varphi_2(x, y, z)] \tag{11}$$

حيث $\Phi(u)$ تابع كيفي في u .

٧ – لإيجاد حل خاص للمعادلة (5) أو (6) يمر بالمنحني :

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \tag{12}$$

نبدل (12) في (9) أو في (11) فنجد شكل التابع Φ ومنه نعرف الحل الخاص

٨ – نقول عن تابع z في المتحولين x و y إنه تكامل تام للمعادلة (1) إذا كان يحوي ثابتين كيفيين .

$$z = V(x, y, a, b) \tag{13}$$

وإذا كان من الممكن كذلك الحصول على المعادلة (1) بحذف a و b من المعادلات :

$$z = V(x, y, a, b) \qquad p = V_x(x, y, a, b) \qquad q = V_y(x, y, a, b) \tag{14}$$

٩ – للحصول على تكامل تام نكتب مجموعة المعادلات التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dy}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-F_x - pF_z} = \frac{dq}{-F_y - qF_z} \tag{15}$$

والتي تدعى بالمعادلات التفاضلية للمميزات .

فاذا استطعنا ايجاد تكامل أول واحد لهذه المجموعة وليكن :

$$G(x, y, z, p, q) = a \tag{16}$$

(بفرض a ثابتة تكامل)

فعندئذ يمكن الوصول إلى التكامل التام على الشكل التالي :

نحسب p و q من المعادلتين (1) و (16) بدلالة x و y و z و a :

$$p = f_1(x, y, z, a) \qquad q = f_2(x, y, z, a) \tag{17}$$

ثم نكامل هاتين المعادلتين فنحصل على التكامل التام

$$y = \varphi(x, y, a) + b \tag{18}$$

اما اذا استطعنا ان نعرف تكاملين أوليين للمعادلة (6)

$$H(x, y, z, p, q) = \alpha \qquad G(x, y, z, p, q) = b \tag{19}$$

وإذا كان هذان التكاملان متشابكين ، أي يحققان العلاقة :

$$[G, H] = (G_x + pG_z)H_p + (G_y + qG_z)H_q - (H_x + pH_z)G_p - (H_y + qH_z)G_q \equiv 0 \tag{20}$$

فعندئذ يمكن من المعادلات (1) و (20) حساب z بدلالة x و y و a و b :

$$z = V(x, y, a, b) \tag{21}$$

وهو التكامل التام المطلوب .

١٠ – للحصول على حل خاص للمعادلة (١) يمر من منحني بدء :

$$x = x(v) \qquad y = y(v) \qquad z = z(v) \tag{22}$$

نكامل المجموعة (15) فنحصل على x و y و z و p و q بدلالة وسيط مثل u وثوابت خمس :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(u, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q = q(u, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \end{array}\right. \tag{23}$$

ندعو (22) بالأشرطة التكاملية .

ثم نحسب من المعادلات (1) و (22) والعلاقة :

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}$$

p و q بدلالة v فيكون لدينا :

$$x = x(v) \quad y = y(v) \quad z = z(v) \quad p = p(v) \quad q = q(v) \tag{24}$$

نسمي (24) بالشريط المميز

نبدل في (23) u بقيمة ثابتة مثل $u = o$ و x و y و z و p و q بدلالة v من (24) فنحصل على الثوابت الخمس بدلالة v . نعود من جديد ونبدل في x و y و z من (23) هذه الثوابت بدلالة v فنحصل على تمثيل وسيط للسطح التكاملي المطلوب .

قد يكون من العسير أحياناً الحصول على (23) من (5) فعندئذ نحصل على تكامل تام (13) ثم نبدل (22) في (14) فنحصل على قيم a و b بدلالة v . نبدل هذه القيم في (13) فنحصل على حزمة سطوح (تابعة لوسيط v) ، مغلفهـا هو السطح التكاملي المطلوب .

١١ ــ نقول عن معادلة من الشكل :

$$A r + 2 B s + C t + D p + E q + F z + G = o \tag{25}$$

(بفرض أن الامثال $A , B , \ldots , G$ توابع مستمرة في x و y) إنها خطية من المرتبة الثانية ، ونقول هذه المعادلة إنها زائدية أو ناقصية أو مكافئية في نقطة ما ، حسبما يكون المقدار $B^2 - AC$ موجباً أو سالباً أو معدوماً في تلك النقطة .

١٢ ــ الشكل النظامي للمعادلة الزائدية هو :

$$s + a p + b q + c z + d = o$$

وللمعادلة الناقصية هو $\quad r + t + a_1 p + b_1 q + c_1 z + d_1 = o$

وللمعادلة المكافئية هو $\quad t + a_2 p + b_2 q + c_2 z + d_2 = o \qquad (26)$

بفرض أن الأمثال في هذه الأشكال توابع في x و y

١٣ ــ للحصول على الشكل النظامي للمعادلة الزائدية نبدأ بإيجاد حلين مستقلين

$$\xi = \xi (x , y) \qquad \eta = \eta (x , y) \tag{27}$$

للمعادلة التفاضلية الجزئية $\quad A \varphi_x^2 + 2 B \varphi_x \varphi_y + C \varphi_y^2 = o \qquad (28)$

ثم نجري تغييراً في المتحولات لـ (25) بوساطة دساتير التحويل (27)

اما اذا كانت المعادلة ناقصية فعندئذ تكون دساتير التحويل

$$u = \frac{1}{2} (\xi + \eta) \qquad v = \frac{1}{2 i} (\xi - \eta)$$

وفي حالة المعادلات المكافئة تكون دساتير التحويل

$$\xi = \xi(x, y)$$

والتابع η في x و y يؤخذ كيفياً .

مسائل وتمارين محلولة

٤٩٦ – أوجد التكامل العام للمعادلة :

$$y\,p - x\,q = 0$$

الحل: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية العادية (تدعى بالمعادلة التفاضلية للمميزات)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

أو

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

ومنه نجد

$$x^2 + y^2 = c_1$$

والحل العام هو

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

حيث $\varphi(u)$ تابع كيفي u .

٤٩٧ – أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$(y - 3)\,p - (x - 2)\,q = 0$$

والذي يمر بمنحني البدء :

$$x = 2 + 5 \sin v \qquad y = 3 + 5 \sin v \qquad z = 5 \cos v$$

الحل : نحل المعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{y - 3} = \frac{dy}{-(x - 2)}$$

أو

$$(x - 2)\,dx + (y - 3)\,dy = 0$$

فنجد

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = c$$

والحل العام هو

$$z = \varphi(x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13) \qquad (1)$$

نبدل x و y و z من المعـادلة الأخيرة بقيمها بدلالة v من منحني البدء فنجد .

$$5 \cos v = \varphi (50 \sin^2 v)$$

فاذا فرضنا $50 \sin^2 v = \tau$

يكون $\varphi (\tau) = \sqrt{\frac{50 - \tau}{2}}$

وبذلك يأخذ الحل (١) الشكل :

$$2 z^2 = 50 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2$$

وهو الحل الخاص المطلوب

٤٩٨ – أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x z \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

الحل : نحل مجموعة المعادلات التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}$$

فنجد $\frac{y}{x} = c_1 \qquad z^2 - 2 x = c_2$

ويكون الحل العام المطلوب هو :

$$u = \varphi \left(\frac{y}{x} , z^2 - 2 x \right)$$

بفرض أن $\varphi (u , v)$ تابـع كيفي في u و v .

٤٩٩ – أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2 x y \frac{\partial u}{\partial y} - 2 x z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

الحل : نكتب المعادلات التفاضلية للمميزات :

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

إن حل مجموعة المعادلات هذه :

$$\frac{z}{y} = c_1 \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{y} = c_2$$

ويكون الحل العام المطلوب هو :

$$u = \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)$$

٥٠٠ – أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z} + (x^2+2u)\frac{\partial\omega}{\partial u} = 0$$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{x^2+2u}$$

وحلول هذه المعادلات هي :

$$\frac{z}{x} = c_1 \qquad \frac{y}{x} = c_2 \qquad \frac{u-x^2\lg x}{x^2} = c_3$$

والحل العام المطلوب هو :

$$\omega = \varphi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}, \frac{u-x^2\lg x}{x^2}\right)$$

٥٠١ – أوجد الحل الخاص المعادلة :

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0$$

الذي يمر بمنحني البدء $\omega = x + y \qquad z = 0$

الحل : مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2} = 0$$

وحل هذه المجموعة :

$$\frac{y}{x} = c_1 \qquad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z = c_2$$

والحل العام هو :

$$\omega = \varphi\left[\frac{y}{x} , \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z\right]$$

لإيجاد الحل الخاص نبدل كل z بصفر وكل ω بـ $x + y$ فنجد :

$$x + y = \varphi\left[\frac{y}{x} \text{ و } \frac{1}{2}(y^2 + x^2)\right]$$

فلو فرضنا $\frac{y}{x} = \tau$ $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \sigma$

لوجدنا $y = \frac{\mp\tau\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1 + \tau^2}}$ $x = \frac{\mp\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1 + \tau^2}}$

ولكان $\varphi(\tau , \sigma) = \frac{\mp\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1 + \tau^2}}(1 + \tau)$

وهذا هو شكل التابع الكيفي الموافق لمنحني البدء . فالحل الخاص هو :

$$\omega = \varphi(\tau , \sigma) = \mp \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{1 + \tau^2}}(1 + \tau)$$

$$\tau = \frac{y}{x} \qquad \sigma = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z$$

بالتعويض نجد :

$$\omega^2 = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 2z)$$

٥٠٢ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xzp + yzq = x$$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد التكامل الأولي $\frac{y}{x} = c_1$ ومن النسبتين الأولى والثالثة نجد التكامل $2x - z^2 = c_2$ ويكون الحل العام :

$$2x - z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث $\varphi(u)$ تابع كيفي في u .

٥٠٣ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xp + yq = xy + z$$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy + z}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد $c_1 = \frac{y}{x}$ فاذا عوضنا في النسبة الثالثة وجدنا :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{c_1 x^2 + z}$$

أو

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z + c_1 x$$

وتكامل هذه المعادلة التفاضلية العادية الخطية هو :

$$z = c_1 x^2 + c_2 x$$

فاذا عوضنا c_1 بـ $\frac{y}{x}$ وجدنا :

$$\frac{z - y x}{x} = c_2$$

والحل العام هو :

$$\frac{z - y x}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

او

$$z = y x + x \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث φ تابع كيفي في $\frac{y}{x}$.

٥٠٤ - أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x z p + y z q + x y = o$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يمر بالمنحني $z = h$ ، $x y = a^2$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

ولهذه المعادلة مجموعة الحلول الأساسية :

$$\frac{y(xy + z^2)}{x} = c_2 \qquad \frac{y}{x} = c_1 \qquad (1)$$

والحل العام هو

$$\frac{y}{x}(xy + z^2) = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

او

$$z^2 + x y = \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

بفرض φ_1 و φ_2 هما تابعان كيفيان في $\frac{y}{x}$

لتتعين الحل الخاص نبدل في (2) z بـ h و xy بـ a^2 . فنجد :

$$h^2 + a^2 = \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

وهذه العلاقة تعطينا شكل التابع الكيفي الموافق لمنحني البدء . وإذا عوضنا في (2) وجدنا :

$$z^2 + x y = h^2 + a^2$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

يمكن الحصول على الحل الخاص بطريقة ثانية نبدل z بـ h و $x y$ بـ a^2 في المعادلات (1) فنجد :

$$\frac{a^2}{x^2} = c_1 \qquad \frac{a^2 (h^2 + a^2)}{x^2} = c_2$$

ومن هاتين العلاقتين نجد $c_1 (h^2 + a^2) = c_2$

لنعوض c_1 و c_2 من المعادلات (١) فنجد :

$$\frac{v}{x} (h^2 + a^2) = \frac{y (x y + z^2)}{x}$$

$$z^2 + x y = h^2 + a^2$$

٥٠٥ – أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$x (x^2 + y^2) p + 2 y^2 (x p + y q - z) = o$$

الذي يمر بالدائرة $x^2 + y^2 = a^2 \qquad z = h$

الحل : نكتب المعادلة التفاضلية على الشكل :

$$x (x^2 + 3 y^2) p + 2 y^3 q = 2 y^2 z$$

والمعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x (x^2 + 3 y^2)} = \frac{dy}{2 y^3} = \frac{dz}{2 y^2 z}$$

من النسبتين الثانية والثالثة نجد التكامل الأولي $\frac{z}{y} = c_1 \qquad (1)$

ومن النسبتين الاولى والثانية نجد التكامل الأولي

$$\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}=c_2 \tag{2}$$

والحل العام هو :

$$y(x^2+y^2)= x^2\varphi\left(\frac{z}{y}\right) \tag{3}$$

للحصول على الحل الخاص نعوض منحني البدء في (1) و (2) نجد :

$$y=\frac{h}{c_1} \qquad \frac{y\,a^2}{a^2-y^2}=c_2$$

من هاتين العلاقتين نجد علاقة c_1 بـ c_2

$$c_1\,h\,a^2=(c_1^2\,a^2-h^2)\,c_2$$

نعوض c_1 و c_2 بما يساويها من (1) و (2) فنجد الحل الخاص المطلوب:

$$(x^2+y^2)(a^2z^2-h^2y^2)=a^2h\,x^2z$$

يمكن الحصول على الحل الخاص بطريقة ثانية فاذا بدلنا في (3) متحولين اثنين بدلالة الثالث (بالاعتماد على شروط البدء) نجد :

$$a^2y=(a^2-y^2)\,\varphi\left(\frac{h}{y}\right)$$

فاذا فرضنا $\frac{h}{y}=\sigma$ وجدنا :

$$\varphi(\sigma)=\frac{a^2h\sigma}{a^2\sigma^2-h^2} \tag{4}$$

نبدل في (3) التابع φ بما يساويه بدلالة (4) فنجد :

$$y(x^2+y^2) = x^2\,\frac{a^2hz\,y^2}{y(a^2z^2-h^2y^2)}$$

أو

$$(x^2+y^2)(a^2z^2-h^2y^2) = a^2h\,x^2z$$

وهذه نفس النتيجة السابقة .

٥٠٦ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$$

ثم أوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطع الزائد :

$$x = a \qquad z^2 - y^2 = a^2$$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد التكامل الأولي $\frac{y}{x} = c_1$.

للحصول على تكامل أولي ثان نضرب صورة ومخرج النسبة الأولى بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ z ثم نجمع الصور لبعضها والمخارج لبعضها فنجد .

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{z(x^2 + y^2 + z^2)}$$

من النسبتين الأولى والرابعة نجد :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = c_2$$

والحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

لتعيين الحل الخاص نبدل في الحل العام متحولين اثنين بدلالة الثالث (اعتماداً على منحني البدء) فنجد :

$$2a^2 + 2y^2 = a\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right)$$

فإذا فرضنا $\sigma = \frac{y}{a}$ حصلنا على شكل التابع φ الموافق لمنحني البدء المفروض :

$$\varphi(\sigma) = 2a(1 + \sigma^2) \qquad (2)$$

فاذا بدلنا التابع φ في (1) بما يساويه بدلالة (2) نجد الحل الخاص المطلوب :

$$x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2)$$

٥٠٧ – أوجد الحل العام للمعادلة :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$$

الحل : إن مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{x^2 + 2u}$$

ومن هذه المعادلات نجد مجموعة الحلول الأساسية .

$$\frac{y}{x} = c_1 \qquad \frac{z}{x} = c_2 \qquad \frac{u - x^2 \lg x}{x^2} = c_3$$

والحل العام المطلوب هو :

$$\frac{u - x^2 \lg x}{x^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

او

$$u = x^2 \lg x + x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

حيث $\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ تابع كيفي في $\frac{y}{x}$ و $\frac{z}{x}$.

٥٠٨ – أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$pq = x + y \qquad (1)$$

الحل : إذا كتبنا المعادلة على الشكل :

$$F(x, y, z, p, q) \equiv pq - x - y$$

يكون

$$F_p = q \qquad F_q = p \qquad pF_p + qF_q = 2pq$$

$$-F_x - pF_z = 1 \qquad -F_y - qF_z = 1$$

تكون مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{1}$$

من النسبتين الرابعة والخامسة نجد التكامل الأولي :

$$p - q = a \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$(a + q)\, q = x + y$$

$$q^2 + a q - x - y = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في q ، نحسب منها q بدلالة x و y ولكننا نكتفي بأحد حلولها :

$$q = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4x + 4y}}{2} \qquad (3)$$

واعتماداً على (2)

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4x + 4y}}{2} \qquad (4)$$

لو اعتبرنا x ثابتة في (3) وكاملنا بالنسبة لـ y لوجدنا :

$$2z = -ay + \frac{1}{6}\left(a^2 + 4x + 4y\right)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة لـ x نجد :

$$2p = \left(a^2 + 4x + 4y\right)^{\frac{1}{2}} + \varphi'(x)$$

وبالاعتماد على العلاقة (4) نجد $\varphi'(x) = a$ أو $\varphi(x) = ax + b$

والتكامل التام يكون :

$$2z = a(x - y) + \frac{1}{6}\left(a^2 + 4x + 4y\right)^{\frac{3}{2}} + b$$

٥٠٩ – أوجد تكاملاً تاماً للمعادلة :

$$z = px + qy + p^3 \qquad (1)$$

الحل : إذا كتبنا المعادلة على الشكل :

$$F(x, y, p, q) \equiv z - px - qy - p^3$$

يكون $F_p = -x - 3p^2 \qquad F_q = -y$

$$pF_p + qF_q = -xp - yq - 3p^3$$

$$-F_x - pF_z = p - p = 0$$

$$-F_y - qF_z = q - q = 0$$

ولكانت مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات :

$$\frac{dx}{-x-3p^2} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-xp-yq-3p^3} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

بسهولة نجد التكاملين الأولين :

$$G(x, y, z, p, q) \equiv p - a = 0 \qquad (2)$$

$$H(x, y, z, p, q) \equiv q - b = 0$$

وبما أن هذين التكاملين يحققان علاقة التشابك :

$$(H_x + pH_z)G_p + (H_y + qH_z)G_q - (G_x + pG_z)H_p - (G_y + qG_z)H_q = 0$$

فانه يمكن الحصول على تكامل تام بجذف p و q من (1) و (2) فنجد :

$$z = ax + by + a^3$$

وبصورة عامة لكل معادلة تفاضلية جزئية من الشكل :

$$z = px + qy + f(p, q)$$

تكاملاً تاماً من الشكل : $z = ax + by + f(a, b)$

٥١٠ – أوجد تكاملا تاماً للمعادلة :

$$p^2 + q^2 = z^2 \qquad (1)$$

الحل : نكتب المعادلة على الشكل $F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - z^2$

فنجد $F_p = 2p \quad F_q = 2q \quad pF_p + qF_q = 2(p^2 + q^2) = 2z^2$

$-F_x - pF_z = 2pz \qquad -F_y - qF_z = 2qz$

وتكون مجموعة المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2z^2} = \frac{dp}{2pz} = \frac{dq}{2qz}$$

من النسبتين الخامسة والرابعة نجد التكامل الأولي :

$$q = ap$$

نبدل في المعادلة (١) فنجد :

$$p^2 = \frac{z^2}{1 + a^2}$$

وبجذر هذه المعادلة والاكتفاء باشارة + نجد :

$$p = \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}}$$

وبالتكامل نجد :

$$\lg z = \frac{x}{\sqrt{1 + a^2}} + \varphi(y)$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{q}{z} = \varphi'$$

ولكن $$q = \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}}$$

ومنه $$\varphi' = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

بالتكامل نجد $$\varphi = \frac{ay}{\sqrt{1 + a^2}} + b$$

ويكون $$\lg z = \frac{x + a y}{\sqrt{1 + a^2}} + b$$

تكاملاً تاماً للمعادلة المفروضة

٥١١ – أوجد السطح المار بالمنحني $x = o$ $z = y$ والذي يحقق المعادلة التفاضلة الجزئية $2z - p^2 - q^2 = o$

الحل : المعادلات التفاضلية للمميزات هي :

$$\frac{dx}{-2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{-2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q}$$

ومن هذه المعادلات نجد التكاملين الأولين المتشابكين

$$p = x + a \qquad q = y + b$$

ومنه نجد التكامل التام $$2z - (x + a)^2 - (y + b)^2 = o \qquad (2)$$

لإيجاد التكامل الخاص نكمل منحني البدء المفروض إلى شريط بـدء .

من أجل ذلك نكتب معادلات المنحني بشكل وسيطي :

$$x = o \qquad y = t \qquad z = t$$

ومن العلاقة $$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$$

نجد $q = 1$ ومن المعادلة المفروضة نجد :

$$p = \mp \sqrt{2t - 1}$$

وشريط البدء هو :

$$x = o \qquad y = z = t \qquad p = \mp \sqrt{2t - 1} \qquad q = 1$$

نبدل في (2) وفي العلاقتين اللتين تنتجان عنها بالاشتقاق الجزئي تارة بالنسبة لـ x وتارة أخرى بالنسبة لـ y فنجد :

$$2t - a^2 - (t + b)^2 = o$$

$$\mp 2\sqrt{2t - 1} - 2a = o$$

$$2 - 2(t + b) = 0$$

ومنه

$$b = 1 - t \qquad a = \mp \sqrt{2t - 1}$$

نبدل في (2) فنجد حزمة السطوح

$$2z - (x \pm \sqrt{2t-1})^2 - (y + 1 - t)^2 = 0$$

ومغلف هذه الحزمة هو السطح التكاملي

$$x = u \qquad y = \frac{\pm u}{\sqrt{2t-1}} + t$$

$$2z = (u \pm \sqrt{2t-1})^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2t-1}}\right)^2$$

٥١٢ – أوجد السطح التكاملي الذي يحقق المعادلة التفاضلية $pq = 1$ ويمر بالمنحني .

$$x = \tau \qquad y = \tau^3 \qquad z = 2\tau^2$$

الحل : من المعادلات :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} \qquad (1)$$

نجد التكاملات الاولية :

$$p = a \qquad q = b \qquad px - qy = c \qquad z - 2qy = d \qquad (2)$$

لنتمم منحني البدء إلى شريط بدء :

$$\frac{dz}{d\tau} = p\frac{dx}{d\tau} + q\frac{dy}{d\tau}$$

أو

$$4\tau = p + 3q\tau^2$$

بالاعتماد على المعادلة التفاضليـة المفروضة نجد اما $p = \tau$ و $q = \frac{1}{\tau}$

أو $p = 3\tau$ و $q = \frac{1}{3\tau}$ ففي الحالة الأولى نجد بالتبديل في (2) :

$$(3) \qquad a = \tau \quad b = \frac{1}{\tau} \quad c = o \quad d = o$$

واعتماداً على (2) :

$$z = 2\,b\,y + d = d + 2\,b\left[\frac{a\,x - c}{b}\right]$$

$$z = d + 2\,a\,x - 2\,c$$

$$y = \frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$$

واعتماداً على (3) نجد :

$$z = 2\,\tau\,x \qquad y = \tau^2\,x$$

والسطح التكاملي المطلوب هو $z^2 = 4\,y\,x$

وفي الحالة الثانية نجد :

$$a = 3\,\tau \qquad b = \frac{1}{3\,\tau} \qquad c = \frac{8}{3}\,\tau^2 \qquad d = \frac{4}{3}\,\tau^2$$

ويكون :

$$z = -4\,\tau^2 + 6\,\tau\,x \qquad y = 9\,\tau^2\,x - 8\,\tau^3$$

ويكون السطح :

$$x = \sigma \qquad y = \tau^2(9\,\sigma - 8\,\tau) \qquad z = 2\,\tau(3\,\sigma - 2\,\tau)$$

كذلك سطحاً تكاملياً

٥١٣ – لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية .

$$x^2\,r + 2\,x\,y\,s + y^2\,t = o$$

بين نوع هذه المعادلة ثم أرجعها إلى شكلها النموذجي واعط الحل العام لها .

الحل : إن المعادلة المفروضة مكافئية دوماً لأن :

$$B^2 - AC = x^2\,y^2 - x^2\,y^2 \equiv o$$

لإرجاعها إلى شكلها النموذجي نبدأ بحل المعادلة :

$$x^2(\varphi_x)^2 + 2\,x\,y\,\varphi_x\,\varphi_y + y^2(\varphi_y)^2 = o$$

$$(x\varphi_x + y\varphi_y)^2 = 0$$

أو

$$x\varphi_x + y\varphi_y = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة $\varphi = \omega\left(\frac{y}{x}\right)$

حيث ω تابع كيفي .

لذلك نجري التحويل $\eta = \frac{y}{x}$ $\xi = x$

فيكون :

$$z_y = \frac{1}{x} z_\eta \qquad z_x = z_\xi - \frac{y}{x^2} z_\eta$$

$$z_{xx} = z_{\xi\xi} - \frac{2y}{x^2} z_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} z_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} z_\eta$$

$$z_{yx} = -\frac{1}{x^2} z_\eta + \frac{1}{x} z_{\eta\xi} - \frac{y}{x^3} z_{\eta\eta}$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x^2} z_{\eta\eta}$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نجد

$$z_{\xi\xi} = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$z = \varphi(\eta) + \xi\psi(\eta)$$

أو

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

وذلك بفرض أن φ و ψ تابعان كيفيان في $\frac{y}{x}$.

٥١٤ – لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل : إن هذه المعادلة زائدية دوماً (باستثناء الحالة التي يكون فيها $x = 0$ أو $y = 0$) :

$$AC - B^2 = -x^2 y^2 \leqslant 0$$

لإرجاعها إلى الشكل النموذجي نبدأ بحل المعادلة :

$$y^2 (\varphi_y)^2 - x^2 (\varphi_x)^2 = 0$$

او $y \varphi_y + x \varphi_x = 0$ $\qquad$ $y \varphi_y - x \varphi_x = 0$

والحل العام لهاتين المعادلتين :

$$\varphi = \omega\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \varphi = \omega(xy)$$

لذلك نجري التحويل $\eta = \dfrac{x}{y}$ $\qquad$ $\xi = xy$

فنجد المعادلة $-2\xi z_{\xi\eta} + z_\eta = 0$

لحل هذه المعادلة نفرض $z_\eta = u$ فنجد :

$$-2\xi u_\xi + u = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية في u (المتحول ξ) وحلها العام :

$$u = c(\eta)\sqrt{\xi}$$

حيث $c(\eta)$ هو تابع اختياري في η .

نعوض u بما يساويها فنجد :

$$z_\eta = c(\eta)\sqrt{\xi}$$

ومنه

$$z = \sqrt{\xi}\int c(\eta)\, d\eta + \psi(\eta)$$

او

$$z = \varphi(\eta)\sqrt{\xi} + \psi(\eta)$$

وذلك بفرض $\varphi(\eta)$ و $\psi(\eta)$ هما تابعان كيفيان في η .

نعود للمتحولات الاصلية فنجد :

$$z = \psi(x\,y) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \sqrt{x\,y}$$

تمارين غير محلولة

حل المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية :

٥١٥ - $\cos y\ p + \cos x\ q = \cos x \cos y$

ج : $z = \sin y + \varphi(\sin x - \sin y)$

٥١٦ - $x\,y\,b - y^2 q + x(1 + x^2) = o$

ج : $4\,x\,y\,z = -\,x^4 - 2\,x^2 + \varphi(x\,y)$

٥١٧ - $x^2 p - x\,y\,q + y^2 = o$

ج : $3\,x\,y\,z = y^3 + \varphi(x\,y)$

٥١٨ - $x\,p + y\,q = 2\,x\,y\sqrt{a^2 - z^2}$

ج : $z = a \sin\left[x\,y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

٥١٩ - $x\,p + y\,q = z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ج : $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^{a+1}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

٥٢٠ - $(y^2 + z^2 - x^2)\,p - 2\,x\,y\,q + 2\,x\,z = o$

ج : $x^2 + y^2 + z^2 = y\,\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$

٥٢١ - $(x\,y^3 - 2\,x^4)\,p + (2\,y^4 - x^3 y)\,q = 9\,z\,(y^3 - x^3)$

ج : $x^3 y^3 z = \varphi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right)$

٥٢٢ – $(z+y-x)p+(z+x-y)q=x+y-z$

ج : $(x+y+2z)(x+y+z)^2=\psi[(x-y)(x+y+2z)]$

٥٢٣ – $(z+e^x)p+(z+e^y)q=z^2-e^{x+y}$

ج : $y+ze^{-x}=\varphi(x+ze^{-y})$

٥٢٤ – $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\dfrac{\partial u}{\partial z}+(y+u)\dfrac{\partial u}{\partial z}=y+z$

ج : $y+z+u=x^2\varphi[x(y-z)$ و $x(y-u)]$

٥٢٥ – أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$xyp-y^2q=x$$

الذي يمر بالمنحني $2ayz=a^2+2$ $\quad x=a$

الجواب : $2xyz=x^2+2$

٥٢٦ – أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$z(x+z)p-y(y+z)q=o$$

والذي يمر بالمنحني $z=\sqrt{y}$ $\quad x=1$

الجواب : $z^2=xy$

٥٢٧ – أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=o$$

الذي يمر بالدائرة $z=1$ $\quad x^2+y^2=ax$

الجواب : $axz=x^2+y^2$

٥٢٨ – أوجد السطح التكاملي الذي يحقق المعادلة

$$xp+yq=\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$

الذي يمر بالقطع الناقص $x^2+y^2=a^2$ $\quad x=2z$

الجواب $a^2 x^2 = 4 z (z - x) (x^2 + y^2)$

عين الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية الآتية وذلك من أجل منحنيات البدء المذكورة أمام كل معادلة وذلك مباشرة دون استخـدام التكامل التام . ثم أوجد تكاملا تاماً وبعد ذلك أوجد الحل الخاص ثانية عن طريق التكامل التام :

٥٢٩ - $p = \sin (x q)$ $\qquad z = 2 y \qquad x = 0$

ج : $z = - \frac{1}{a} \cos a x + a y + b \qquad z = 2 y + \sin^2 x$

٥٣٠ - $p^2 - q^2 = 2 z$ $\qquad x = 0 \quad z = (1 + y)^2$

ج : $z = \frac{1}{2} [(a + x)^2 - (b - y)]^2 \qquad z = (\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x + y + 1)^2$

٥٣١ - $p^2 = q^3$ $\qquad y = 0 \quad z = a^3 x + b$

ج : $z = A x + A^{\frac{2}{3}} y + B \qquad z = a^3 x + a^2 y + b$

٥٣٢ - $\frac{1}{x} e^p - q - y = 0$ $\qquad y = z = 0$

ج : $z = x \lg \frac{2 x}{x + \sqrt{x^2 + 4 y}} - \frac{1}{2} y^2 - x + \sqrt{x^2 + 4 y}$

$z = x \lg a + x \lg x - x + a y - \frac{1}{2} y^2 + b$

٥٣٣ - $p q = z^2$ $\qquad z = e^{-2y} \qquad x = 0$

ج : $z = b e^{\frac{x}{a}} + a y \qquad z = e^{-\frac{x}{2} - 2y}$

حوّل المعادلات الآتية إلى الشكل النموذجي :

٥٣٤ - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ج : $[\eta = x + y \qquad \xi = x - y] \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ ٥٣٥ -

ج: $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$[\ \xi = y^2 \qquad \eta = x^2\ ]$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ ٥٣٦ -

ج: $$\xi^2 z_{\xi\xi} - \eta z_\eta = 0 \qquad [\ \xi = x \qquad \eta = x e^y\ ]$$