الفصل الحادي عشر

حل المعادلات التفاضلية بواسطة السلاسل

إن طرق حل المعادلات التفاضلية بواسطة السلاسل تنتج عن نظرية الوجود وإن الشروط التي تفرض على هذه المعادلات هي الشروط نفسها التي تقدمها هذه النظرية . سنطبق هذه النظرية على بعض المعادلات البسيطة .

١ ـ المعادلة ذات المرتبة الأولى :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

تشترط نظرية الوجود ان يكون التابع $f(x, y)$ منتظماً (هو لومورفيا) بجوار النقطة $(x_0 \ y_0)$ وذلك ليكون لهذه المعادلة حل مؤلف من سلسلة ينتهي مجموعها إلى y_0 عندما يسعى x نحو x_0 .

يمكننا ان نتوصل إلى هذا الحل بطريقتين : تستدعي اولاهما أن نفرض :

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n + \dots$$

ونحمل هذا التركيب في المعادلة (١) ثم نطابق بين طرفيها ونستخرج بالتدرج الأمثال غير المعنية .. $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$

أما الطريقة الثانية فانها تسعى لحساب قيم المشتقات المتتالية للتابع y وذلك من أجل القيمتين $(x_0 \ y_0)$ واعتباراً من المعادلة (١) ، بعمليات اشتقاق متتالية ثم تنقل هذه القيم في المنشور :

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 + \dots$$

٢ – المعادلة خطية متجانسة من المرتبة الثانية :

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y'' + p_2(x)\,y = 0$$

حيث نفرض أن امثال هذه المعادلة توابع منتظمة بجوار $x = a$.

نقول إن $x = a$ نقطة عادية لهذه المعادلة فيما إذا كان $P_0(a) \neq 0$ وإلا فإنها تدعى بنقطة شاذة .

إذا كانت $x = a$ نقطة عادية فإننا نفتش عن حلين خاصين يتألف كل منها من سلسلة تامة بالنسبة للحل $x = a$ ونتوصل إلى حساب امثال كل منها بطريقة الأمثال غير المعينة وينتج عن هذين الحلين الخاصين الحل العام للمعادلة المفروضة كما هو معلوم في نظريات هذه المعادلات .

أما إذا كان $x = a$ حلاً شاذاً فان الطريقة السابقة لا يمكن تطبيقها في هذه الحالة وإذا امكن كتابة المعادلة المفروضة بالشكل :

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x-a}\,y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2}\,y = 0$$

وكان من الممكن نشر كل من $R_1(x)$ ، $R_2(x)$ بجوار $x = a$ سميت هذه النقطة نقطة شاذة نظامية ويمكن ايجاد حل للمعادلة المذكور بشكل سلسلة متقاربة من الشكل :

$$y = (x-a)^m \sum_{0}^{\infty} A_n (x-a)^n \qquad (A_0 \neq 0)$$

وتتعين قيم m بطريقة الأمثال غير المعينة ونحصل على معادلة من الشكل :

$$m(m-1) \qquad + m\,P_1(a) + P_2(a) = 0$$

تعطينا قيمتين لـ m ينتج عنها حلان المعادلة المفروضة .

٣ – المعادلة خطية تامة من المرتبة الثانية :

$$P_0(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_2(x)\,y = Q$$

نطبق الخاصة القائلة بأن الحل العام للمعادلة التامة يساوي مجموع الحل العام للمعادلة المتجانسة مع حل خاص للمعادلة التامة .

٤ – قد يكون في بعض الحالات ، من الضروري حل المعادلة التفاضلية بجوار قيم كبيرة لـ x أي ايجاد سلسلة متقاربة بجوار اللانهاية . نجري على هذه المعادلة تغييراً معرفاً بالعلاقة : $x = \frac{1}{z}$. وندرس حلول المعادلة الناتجة بجوار الصفر .

مسائل وتمارين محلولة

٤٥٨ – حل المعادلة التفاضلية التالية بواسطة سلسلة بحيث يكون $y = y_0$ من اجل $x = o$:

$$y' = x^2 + y \qquad (1)$$

الحل : إن الطرف الثاني من هذه المعادلة : $f(x, y) = x^2 + y$ منتظم ومستمر بجوار النقطة (o, y) وتكون شروط نظرية الوجود قد تحققت فلنفرض أن حل هذه المعادلة من الشكل :

$$y = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

يمكن اشتقاق هذه السلسلة حداً فحداً ضمن مجال تقاربها ونحصل بذلك على سلسلة متقاربة ايضاً وذلك استناداً الى خواص السلاسل الصحيحة :

$$y' = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \ldots + n A_n x^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة (1) فسوف نجد :

$$y' - x^2 - y \equiv (A_1 - A_0) + (2 A_2 - A_1) x + (3 A_3 - A_2 - 1) x^2$$
$$+ (4 A_4 - A_3) x^3 + \ldots + (n A_n - A_{n-1}) x^{n-1} + \ldots$$

لينعدم الطرف الأيمن من هذه العلاقة من اجل كل نقطة واقعة في جوار (o, y_0) يلزم ويكفي ان تنعدم امثالها في وقت معاً :

$$A_1 - A_0 = o \quad , \quad A_1 = A_0 = y_0 \quad , \quad 2 A_2 - A_1 = o$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2} A_1 = \tfrac{1}{2} A_0 = \tfrac{1}{2} y_0$$

$$3 A_3 - A_2 - 1 = 0 \quad , \quad A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} y_0$$

$$4 A_4 - A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = \frac{1}{12} + \frac{y_0}{24}$$

....

$$n A_n - A_{n-1} = 0 \qquad A_n = \frac{1}{n} A_{n-1} \qquad n \geqslant 4$$

ونجد بالتدرج :

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)\dots 4} A_3 = \frac{1}{n(n-1)\dots 4.3} \left(1 + \frac{1}{2} A_0\right) =$$

$$\frac{1}{n!}(2 + y_0)$$

واذا حملنا هذه القيم في التابع (٢) فإنه يأخذ الشكل :

$$y = y_0 + y_0 x + \frac{1}{2} y_0 x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{y_0}{6}\right) x^3 + \left(\frac{1}{12} + \frac{y_0}{24}\right) x^4$$

$$+ \dots + \frac{(2 - y_0)}{n!} x^n + \dots$$

$$y = (y_0 + 2)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right) - x^2 - 2x - 2$$

$$y = (y_0 + 2) e^x - x^2 - 2x - 2$$

وهذا هو الجواب الذي كنا نجده لو حلت هـذه المعادلة بالطرق العادية وباعتبارها خطية من المرتبة الاولى .

٤٥٩ – حل المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - 4x + y + 1$ حيث يشترط ان يكون $y = 3$ من اجل $x = 2$.

الحل : يمكننا ان نفتش عن حل لهذه المعادلة من الشكل :

$$y = 3 + A_1(x - 2) + A_2(x - 2)^2 + \dots + A_n(x - 2)^n + \dots$$

كما يمكن بشكل أسهل أن نغير المتحول حسب العلاقة $v = x - 2$
فتأخذ الشكل :

$$\frac{dy}{dv} = v^2 + y - 3$$

ونتابع الحل بالطريقة المعروفة فنفرض :

$$y = 3 + A_1 v + A_2 v^2 + \cdots + A_n v^n + \cdots$$

$$\frac{dy}{dv} = A_1 + 2 A_2 v + 3 A_3 v^2 + \ldots + n A_n v^{n-1} + \ldots$$

وبنقل هاتين القيمتين في المعادلة المفروضة نجد :

$$\frac{dy}{dv} - v^2 - y + 3 \equiv A_1 + (2 A_2 - A_1) v + (3 A_3 - A_2 - 1) v^2$$
$$+ (4 A_4 - A_3) v^3 + \ldots + (n A_n - A_{n-1}) v^{n-1} + \ldots$$

ونجد بعد مطابقة الطرف الأيمن من هذه المعادلة للصفر ان :

$$A_1 = 0 \;, \quad 2 A_2 - A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad 3 A_3 - A_2 - 1 = 0$$

$$A_3 = \frac{1}{3}$$

$$4 A_4 - A_3 = 0 \qquad A_4 = \frac{1}{12} , \ \ldots \ ,$$

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!} \ , \ (n \geqslant 3)$$

وتأخذ إفادة التابع y الشكل :

$$y = 3 + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{12} v^4 + \ldots + \frac{2}{n!} v^4 + \ldots$$

وإذا عدنا الى المتحول x فانه يكون :

$$y = 3 + 2 \left[\frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{(x-2)^4}{4!} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n!} + \ldots \right]$$

قارن هذه النتيجة مع حل المعادلة المفروضة بالطرق العادية .

٤٦٠ — حل المعادلة التفاضلية التـالية بواسطة السلاسل ضمن الشرط ($y = y_0$ من اجل $x = o$) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{1 - x} \tag{1}$$

الحل : نفتش عن حل من الشكل :

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots \tag{2}$$

نفرض $A = y_0$ وننقل هذه القيمة في المعادلة (١) فنجد :

$$(1 - x)(A_1 + 2A_2 x + \dots + n A_n x^{n-1} + \dots) - 2x +$$
$$(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n + \dots) = o$$

تأخذ هذه المعادلة بعد الاصلاح الشكل :

$$(A_1 + A_0) + (2A_2 - 2)x + (3A_3 - A_2)x^2 + \dots$$
$$[(n+1)A_{n+1} - (n-1)A_n]x^n + \dots \equiv o$$

لنكتب ان كلًا من امثال هذه المطابقة يساوي الصفر فنجد :

$$A_1 + A_0 = o \quad , \quad A_1 = -A_0 \quad , \quad 2A_2 - 2 = o \quad , \quad A_2 = 1$$

$$3A_3 - A_2 = o \quad , \quad A_3 = \frac{1}{3} A_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad 4A_4 - 2A_3 = o$$

....

$$(n+1)A_{n+1} - (n-1)A_n = o \quad , \quad A_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} A_n \qquad n \geqslant 2$$

ونجد بالتدرج :

$$A_n = \frac{n-2}{n} A_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} A_{n-2} = \dots =$$

$$\frac{2(n-2)!}{n!} A_2 = \frac{2}{n(n-1)}$$

ويكون اخيراً الحل العام لهذه المعادلة :

$$y = y_0(1 + x) + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \dots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \dots$$

$$y = y_0 (1 + x) + \sum_{2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n$$

يبرهن بسهولة أن هذه السلسلة تتقارب من اجل $|x| < 1$

قارن النتيجة السابقة مع حل المعادلة بالطرق العادية :

$$y = 2(1 - x) \log(1 - x) + 2x + c(1 - x)$$

٤٦١ – حل المعادلة التفاضلية التالية بسلسلة صحيحة بالنسبة لـ x :

$$(1 + x^2) y'' + x y' - y = o$$

الحل : نلاحظ ان $P_0(x) = 1 + x^2$ ، $P_1(x) = x$ ، $P_2(x) = -1$

وان $P(o) \neq o$ و $x = o$ نقطة عادية والمطلوب إيجاد y بمنشور بجوار الصفر .

لنفرض : $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_n x^n + \dots$

لنشتق هذه العلاقة مرتين ولنحمل النتائج في المعادلة المفروضة فنجد :

$$(1 + x^2)[2A_2 + 6A_3 x + \dots + n(n-1) A_n x^{n-2} + \dots]$$
$$+ x(A_1 + \dots + n A_n x^{n-1} + \dots) - (A_0 + A_1 x$$
$$+ \dots + A_n x^n + \dots) \equiv o$$

تأخذ هذه المعادلة بعد ترتيبها الشكل :

$$(2A_2 - A_0) + 6A_3 x + (12A_4 + 3A_2) x^2 + \dots +$$
$$[(n+2)(n+1) A_{n+2} + (n^2 - 1) A_n] x^n + \dots \equiv o$$

نستنتج من هذه المطابقة بعد ان نكتب ان كل مثل من امثالها يساوي الصفر :

$$2 A_2 - A_o = 0 \quad , \quad A_2 = \frac{1}{2} A_0 \quad , \quad 6 A_3 = 0 \quad A_3 = 0$$

$$12 A_4 + 3 A_2 = 0 \quad , \quad A_4 = - \frac{1}{8} A_o , \dots$$

$$(n + 2) (n + 1) A_{n+2} + (n^2 - 1) A_n = 0$$

$$A_{n+2} = - \frac{n - 1}{n + 2} A_n .$$

نستنتج من العلاقة الاخيرة ان الامثال ذات الترتيب الفردي معدومة برمتها :

$$A_3 = A_5 = A_7 = \dots = A_{2k+1}$$

اما الامثال ذات الترتيب الزوجي $n = 2k$ فانها تعطى بالدستور :

$$A_{2k} = - \frac{2k - 3}{2k} A_{2k-2} = \frac{(2k - 3) (2k - 5)}{2k (2k - 2)} A_{2k-4} = \dots =$$

$$(- 1)^{k+1} \frac{1 . 3 . 5 \dots (2k - 3)}{2^k . k !}$$

ويأخذ عندها الحل المطلوب الشكل :

$$y = A_o \left[1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \sum_{2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1 . 3 . 5 \dots (2k - 3)}{2^k . k !} x^{2k} \right] + A_1 x$$

يبرهن بسهولة تامة ان هذه السلسلة متقاربة من اجل : $| x | < 1$.

٤٦٢ – حل المعادلة التالية بسلسلة صحيحة بالنسبة لـ $(x - 1)$

$$x y' - y - x - 1 = 0 \qquad (1)$$

الحل : يمكننا ان نفرض للتابع y قيمة مؤلفة من سلسلة صحيحة من الشكل :

$$y = A_o + A_1 (x - 1) + A_2 (x - 1)^2 + \dots + A_n (x - 1)^n + \dots$$

ونتابع الحل بالطرق ذاتها التي رأيناها في التمارين السابقة :

ويمكن أن نبـدل . في هذه المعادلة المتحول حسب العلاقــة :

$x = t + 1$ ونفرض :

$$y = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n + \dots$$

ونبدل في المعادلة (١) فنحصل على المطابقة :

$$(t+1)(A_1 + 2A_2 t + \dots + nA_n t^{n-1} \dots)$$
$$-t-2-(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots \quad +A_n \; t^n + \dots) \equiv 0$$
$$(A_1 - 2 - A_0) + (2A_2 - 1)t + (3A_3 + A_2)t^2 + \dots +$$
$$[(n+1)A_{n+1} + (n-1)A_n]t^n + \dots \equiv 0$$

لنكتب شروط هذه المطابقة وهي أن تكون امثال هذه المعادلة مساوية للصفر :

$$A_1 - 2 - A_0 = 0 \;,\; A_1 = 2 + A_0 \;,\; 2A_2 - 1 = 0 \;,\; A_2 = \frac{1}{2}$$
$$3A_3 + A_2 = 0 \;,\; A_3 = -\frac{1}{3}A_2 = -\frac{1}{6} \;,\; 4A_4 + 2A_3 = 0 \;,$$
$$A_n = -\frac{1}{2}A_3 = \frac{1}{12}$$

....

$$(n+1)A_{n+1} + (n-1)A_n = 0 \;,\; A_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1}A_n \quad , \quad n \geqslant 2$$
$$A_n = (-1)^n \frac{(n-2)(n-3)\dots 2.1}{n(n-1)\dots 4.3} A_2 = (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$$

ونجد أخيراً :

$$y = A_0 + (2 + A_0)t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} t^n + \dots$$

وإذا عدنا إلى المتحول الأصلي فاننا نجد :

$$y = A_0 x + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \dots$$

$$y = A_0 x + 2(x-1) + \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} (x-1)^n$$

إن هذه السلسلة متقارنة من أجل $|x-1| < 1$ أي $0 < x < 2$

قارن هذه النتيجة مع حل المعادلة المفروضة بعد ان تجده بالطرق العادية وهو :

$$y = c\,x - 1 + x \log x$$

٤٦٣ - حـــل المعادلة $y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$

بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

الحل : لنفرض :

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$$

لنحسب المشتق الأول والمشتق الثاني لهذا التابع ونحمل الناتج في المعادلة المفروضة فنجد المطابقة :

$$2(A_2 - 1) + (6A_3 + 4A_0 - 2)x + (12A_4 + 2A_1 - 1)x^2 + 20A_5 x^3 + \dots + [(n+2)(n+1)A_{n+2} - 2(n-1)A_{n-1} + 4A_{n-1}]x^n + \dots \equiv 0$$

وإذا كتبنا شروط هذه المطابقة وهي أن يكون كل مثل من أمثال كثير الحدود الموجود في طرفها الأيسر مساوياً للصفر نجد العلاقات :

$$2A_2 - 2 = 0 \ , \quad A_2 = 1 \ , \quad 6A_3 + 4A_0 - 2 = 0$$

$$A_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} A_0$$

$$A_4 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} A_1 \ , \quad A_5 = 0 \dots$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - 2(n-3)A_{n-1} = 0$$

$$A_{n+2} = \frac{2(n-3)}{(n+1)(n+2)} A_{n-1} \qquad n \geqslant 3$$

ويكون عندها الحل التام لهذه المعادلة :

$$y = A_0 \left(1 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{2}{405}x^9 - \dots\right) + A_1 \left(x - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{567}x^{10} - \dots\right) + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{1}{126}x^7 + \dots$$

٤٦٤ – حل المعادلة : $x y'' + (x-3) y' - 2 = 0$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

الحل : إذا كتبنا هذه المعادلة بالشكل :

$$y'' + \frac{x-3}{x} y' - \frac{2}{x} y = 0$$ نلاحظ ان $R_1(x) = x - 3$ ، $R_2(x) = -2$

وانه يمكن نشر هذين التابعين بجوار الصفر حسب دستور ماك ـلوران وأنه من الممكن حل هذه المعادلة بسلسلة تامة .

لنفرض : $y = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots$

ولنحسب المشتق الأول لهـذا التابع ثم المشتق الثاني له ولنحمل كل ذلك في المعادلة المفروضة فنجد المطابقة :

$$m(m-4) a_0 x^{m-1} + [(m+1)(m-3) a_1 + (m-2) a_0] x^m + \dots + [(m+r+1)(m+r-3) a_{r+1} + (m+r-2) a_r] x^{m+r} + \dots \equiv 0$$

لنكتب شروط المطابقة للصفر :

$$m(m-4) a_0 = 0 \ ، \ (m+1)(m-3) a_1 + (m-2) a_0 = 0$$

....

$$(m+r+1)(m+r-3) a_{r+1} + (m+r-2) a_r = 0$$

إننا لن نستفيد شيئاً فيما إذا أخذنا $a_0 = 0$ لأن a_0 هو عامل الحد الأول من إفادة y لذا نأخذ إما $m = 0$ أو $m = 4$.

إذا كان $m = o$ فإننا نجد :

$$a_{r+1} = \frac{-(r-2)}{(r+1)(r-3)} a_r \text{ ، } \dots \text{ ، } a_1 = \frac{-2}{3} a_o$$

إن العلاقة الأخيرة تعيننا على حساب أي عامل من عوامل إفادة y

عندما تعرف العامل الذي يسبقه وبذلك نجد : $a_2 = -\frac{a_1}{4} = \frac{a_o}{6}$ ، $a_3 = o$

وكذلك نجدان بقية الأمثال التي تتبع a_3 مساوية للصفر ويكون الحل الخاص الأول :

$$y_1 = a_o \left(1 - \frac{2}{3} x + \frac{1}{6} x^2\right)$$

أما اذا أخذنا $m = 4$ فإننا نجـــد $5 a_1 + 2 a_c = o$ ،

$$a_{r+1} = \frac{-(r+2) a_r}{(r+5)(r+1)}$$

نحسب استناداً إلى هاتين العلاقتين بعض الأمثال فنجد :

$$y_2 = a_o \left(x^4 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{3}{5.6} x^6 - \frac{4}{5.6.7} x^7 + \dots\right)$$

إن الحلين y_1 , y_2 مستقلين عن بعضها فيكون الحل العام للمعادلة :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

٤٦٥ حل المعادلة التفاضلية :

$$(x - x^2) y'' + (1 - 5x) y' - 5y = o \qquad (1)$$

لنفرض أن

$$z = x^m (a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \qquad (2)$$

حل للمعادلة المذكورة ولنحسب المشتق الأول والمشتق الثاني لهذا التابع ثم لنحمل كل ذلك في المعادلة (١) فنجد :

$$(x - x^2) z'' + (1 - 5x) z' - 5z = a_o m^2 x^{m-1} + \qquad (3)$$
$$[a_1(m+1)^2 - a_o(m+2)] x^m + [a_2(m+2)^2 - a_1(m+3)^2] x^{m+1}$$
$$+ [a_3(m+3)^2 - a_2(m+4)^2] x^{m+2} + \dots \equiv o$$

لـكي تتحقق هذه المطابقة يلزم ويكفي ان تكون امثال حدودهـــا معدومة أي :

$m^2 = 0$ ونسمي هذه المعادلة بالمعادلة المعينة .

$a_1 (m+1)^2 - a_0 (m+2)^2 = 0$ ومنه $a_1 = \frac{(m+2)^2}{(m+1)^2} a_0$

$a_2 (m+2)^2 - a_1 (m+3)^2 = 0$ $\qquad a_2 = \frac{(m+3)^2}{(m+2)^2} a_1$

وهكذ نحصل بالتدرج على الدستور الذي يعطينا الحل العام :

$$a_n = \frac{(m+n+1)^2}{(m+n)^2} a_{n-1} = \frac{(m+n+1)^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)^2} \cdot a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{(m+n+1)^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)^2} \cdots \frac{(m+2)^2}{(m+1)^2} a_0 = \frac{(m+n+1)^2}{(m+1)^2} a_0$$

ونجد أخيراً :

$$\bar{z} = a_0 x^m \left[1 + \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2 x + \left(\frac{m+3}{m+1}\right)^2 x^2 + \ldots + \left(\frac{m+n+1}{m+1}\right)^2 x^n + \ldots \right]$$

إن هذا النابع يمثل حلاً للمعادلة المفروضة إذا اعطينا قيمة لـ m مساوية أحدجذور المعادلة المعينة وبذلك نحصل فيالحالة العامة على قيمتين مختلفتين لـ m وينتج عنها حلان متباينان للمعادلة المفروضة . أما اذا كان ، كما في هذه الحالة، للمعادلة المعينة جذر مضاعف فاننا سوف لن نظفر إلا بحل واحد .

إذا حملنا التابـع $\bar{z}$ في المعادلة (٣) فإننا نحصل على المعادلة :

$$(x - x'')\bar{z}'' + (1 - 5x)\bar{z}' - 5\bar{z} = a_0 m^2 x^{m-1} \tag{5}$$

وذلك لأننا قد فرضنا في الأصل أن التابع (٢) يحقق المعادلة (١) ثم اخترنا أمثال هذا النابع بحيث تنعدم امثال الطرف الأيمن من المعادلة (٣) ما عدا الأول منها :

إن العلاقة (٥) تمثل مطابقة مهما كانت قيمة m وينتج عنها مطابقة صحيحة بعد اشتقاق طرفيها بالنسبة لـ m :

$$(6) \quad \frac{d}{dm}\left[(x - x^2) \bar{z}'' + (1 - 5x) \bar{z}' - 5 \bar{z} \right] = 2 a_o m x^{m-1} + a_o m^2 x^{m-1} \log x$$

وبما ان :
$$\frac{\partial \bar{y}'}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)'$$

$$\frac{\partial y''}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)''$$

فإن المعادلة (٦) الأخيرة تأخذ الشكل الثاني :

$$(x - x^2) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial m}\right)'' + (1 - 5x) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial m}\right)' - 5 \bar{z} = 2 a_o m x^{m-1} + a_o m^2 x^{m-1} \log x$$

ونلاحظ بسهولة أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يصبح مساوياً للصفر عندما نجعل فيه $m = o$ وهذا يعني أن $\frac{\partial \bar{z}}{\partial m}$ يكون للمعادلة المفروضة عندما نبدل فيه m بصفر وبذلك نتوصل الى حل خاص آخر للمعادلة المفروضة يضاف إلى الحل الأول الذي نحصل عليه بجعل $m = o$ في (٤) :

$$z_1 = a_o \left[1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^2 + \ldots + (n + 1)^2 x^n + \ldots \right]$$

$$\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial m} = a_o x^m \log x \left[1 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{m+n+1}{m+1}\right)^2 - \frac{2 a_o x^m}{(m+1)^2} \sum_1^{\infty} \frac{n(m+n+1)}{m+1} x^n\right.$$

إذ جعلنا في هذه الإفادة $m = o$ فاننا نحصل على الحل الثاني :

$$z_2 = a_o \log x \left[1 + \sum_1^{\infty} (n + 1)^2 x^n \right] - 2 a_o \sum_1^{\infty} n (n + 1) x^n$$

ويكون الحل التام للمعادلة المفروضة : $y = c_1 z_1 + c_2 z_2$

٤٦٦ – حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0 \qquad (1)$$

لنفرض أن :
$$z = x^m (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \qquad (2)$$

حل للمعادلة المفروضة ولنحسب المشتقين الأول والثاني لهذا التابع ولنحمل ذلك في المعادلة (١) فنجد :

$$x^2 z'' + x z' + (x^2 - 1) z = a_0 (m^2 - 1) x^m +$$
$$a_1 [(m+1)^2 - 1] x^{m+1} + \left\{ a_2 [(m+2)^2 - 1] + a_0 \right\} x^{m+2} + \dots$$
$$\left\{ a_n | (m+n)^2 - 1 | + a_{n-2} \right\} x^{m+n} + \dots \equiv 0$$

نستخرج قيم امثال التابع (٢) من شروط المطابقة السابقة ونجد :

$$z = a_0 x^m \left[1 - \frac{x^2}{(m+1)(m+3)} + \frac{x^4}{(m+1)(m+3)^2 (m+5)} + \dots \right]$$

إن المعادلة المعينة هي $m^2 - 1 = 0$ والجذران هما : $m_1 = 1$ ، $m_2 = -1$ والفرق بينها عدد صحيح .

يعطينا الجذر الأول ، $m_1 = 1$ ، الحل الخاص :

$$z_1 = a_0 x \left| 1 - \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4^2.6} \dots \right| \qquad (3)$$

أما إذا جعلنا $m = -1$ فان امثال منشور التابع z تصبح مالا نهاية ويجدر بنا أن نحذف انضروب $(m+1)$ من مخارج الأمثال وذلك بأن نفرض $a_0 = k(m - m_2) = k(c+1)$ فيكون :

$$z = k x^m \left| (m+1) - \frac{x^2}{m+3} + \frac{x^4}{(m+3)^2 (m+5)} \dots \right| \qquad (4)$$

واستناداً الى ما أوردناه في التمرين السابق فان هذا التابع يحقق المعادلة:

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} + (x^2 - 1) z = K x^m (m+1)(m^2-1)$$
$$= K x^m (m+1)^2 (m-1)$$

ونستنتج بسبب وجود $(m+1)^2$ بالطرف الايمن وباشتقاق طرفيها بالنسبة لـ m .

ان المشتق $\frac{\partial z}{\partial m}$ حل للمعادلة المفروضة بعدما ان نجعل فيه $m = -1$:

اذا جعلنا في التابع (١) $m = -1$ فاننا نجد :

$$z_2 = K x^{-1} \left(- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 . 4} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6} + \dots \right) = K u \tag{5}$$

$$z_3 = \left[\frac{\partial z}{\partial m} \right]_{m=-1} = K u \log x + K x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 . 4} \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{x^6}{2^2 \; 4^2 . 6} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \dots \right] = K v$$

نلاحظ بسهولة تامة ان الحلول $z_1 , z_2 . z_3$ غير مستقلة خطياً عن بعضها اذ ان : $z_1 = - 4 z_2$ ويكون عندها الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = c_1 z_1 + c_2 z_2$.

٤٦٧ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1 - x^2) y'' - 2 x y' + n (n+1) y = 0$$

الحل : نسمي هذه المعادلة بمعادلة لوجاندر Legendre واذا أخذنا الشكل العام للسلسلة التامة وبدلنا في المعادلة المفروضة ثم كتبنا شروط المطابقة للصفر نجد العلاقات :

$a_0 m (m-1) = 0$ المعادلة المعينة وتعطي $m_1 = 0$, $m_2 = 1$

$$(m+1) m a_1 = 0 , \quad (m+2)(m+1) a_2 - (m-n)(m+n+1) a_0 = 0 , \dots$$
$$(m+r)(m+r-1) a_r - (m - n + r - 2)(m+n+r-1) a_{r-2} = 0$$

اذا أخذنا $m = o$ فاننا نجد :

$$a_2 = \frac{-n\, n+1)}{2} a_o \quad , \quad a_r = -\frac{(n-r+2)(n+r-1)}{r(r-1)} a_{r-2}$$

ونحصل على الحل الخاص :

$$z_1 = a_o \left(1 - \frac{n(n+1)}{n!} x^2 + \frac{n(n-2)\, n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right)$$

$$+a_1\left(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right)$$

بما أن هذا الحل يحوي ثابتين اختياريين a_1 , a_o فهو الحل العام لمعادلة لوجاندر

ويمكن ايجاد السلسلة الثانية اذا أخذنا $m=1$ وسوف نجد أن كل الامثال المزدوجة معدومة والفردية تساوي امثال للثابت الاختياري a_1.

٤٦٨ – حل المعادلةالتفاضلية : $(1)\quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = o$

الحل : تسمى هـذه المعادلة بمعادلة بيسيل Bessel نحلها بالطرق المعروفة وذلك بأن نفرض حلاً من الشكل :

$$(2) \qquad z = a_o x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_n x^{m+n} + \dots$$

واذا حسبنا المشتق الأول والمشتق الثاني وحملنا ذلك في معادلة بيسيل ثم طابقنا فاننا نحصل على العلاقات :

$a_o (m^2 - n^2) = o$ وهي المعادلة المعينة تعطي $m = \pm n$

$$a_1 \left[(m+1)^2 - n^2 \right] = o \quad , \quad a_2 \left[(m+2)^2 - n^2 \right] + a_o = o , \dots$$

$$\left[(m+r)^2 - n^2 \right] a_r + a_{r-2} = o$$

اذ اخذنا $m=n$ فاننا نحصل على الحل :

$$(3) \quad y_1 = a_o x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right]$$

واذا خذنا $m = -n$ فسوف نجد

$$(4) \quad y_2 = a_o x^{-n} \left[1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \dots \right]$$

اذا كان n عدد كيفي ولم يكن مساوياً للصفر أو لعدد صحيح فان كلا من هاتين السلسلتين متقاربة وهما متباينان ويكون الحل العام في هذه الحالة : $y = c_1 y_1 + c_3 y_2$.

أما اذا كان $n = o$ فان السلسلتان متطابقان . واذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فان السلسلة (٤) لن يكون لها معنى لأن بعض امثالها سيصبح مالا نهاية . ان الطريقة العامة لا تعطينا في هاتين الحالتين سوى حل خاص واحد ولإيجاد حل خاص آخر نستعمل ، حسب الاحوال ، احدى الطريقتين المفصلتين في التمرينين (٤٦٥ ، ٤٦٦) .

٤٦٩ – حل المعادلة :

$$(x - x^2) y'' + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1) x \right] y' - \alpha \beta y = o$$

الحل : نسمي هذه المعادلة بمعادلة كوس Gauss ولكي نحصل على حل مؤلف من سلسلة متقاربة بجوار الصفر نضع في هذه المعادلة :

$$y = A_o x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \dots + A_n x^{m+n} + \dots$$

فنجد :

$$m(m + \gamma - 1) A_o x^{m-1} + \Big\{ (m+1)(m+\gamma) A_1 - \Big[m(m + \alpha + \beta) + \alpha\beta \Big] A_o \Big\} x^m + \dots + \Big\{ (m+n)(m+n+\gamma - 1) A_n - \Big[(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1) + \alpha\beta \Big] A_{n-1} \Big\} x^{m+n-1} + \dots \equiv o$$

ونجد بالإستفادة من شروط التطابق :

$$A_n = \frac{(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)} A_{n-1}$$

بالاضافة الى المعادلة المعينة : $\quad m(m+\gamma-1) = 0$

واستناداً الى ما رأيناه سابقاً (تمرين : ٤٦٥) فان التابع :

$$\bar{y} = A_0 x^m \left[1 + \frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)} x + \frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)} \cdot \frac{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)(m+\gamma+2)} x^3 + \ldots \right]$$

يحقق المعادلة :

$$(x - x^2)\bar{y}'' + [\gamma + (\alpha+\beta+1)x]\, y' - \alpha\beta\bar{y}$$
$$= m(m+\gamma-1) A_0 x^{m-1}$$

اذا اخذنا $m = 0$ و $A_0 = 1$ فاننا نجد الحل :

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} +$$
$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) . \beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^2}{3!}$$

ومن اجل $m = 1 - \gamma$ و $\gamma \neq 1$ و $A_0 = 1$ نجد الحل :

$$y_2 = x^{1-\gamma}\left[+ \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)} x + \right.$$
$$\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{x^2}{2!} +$$
$$\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\alpha-\gamma+3)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)(\beta-\gamma+3)}{(2-\gamma)(3-\gamma)(4-\gamma)} x^2 + \cdots$$

تسمى السلسلة y_1 بالسلسلة الهندسية الزائدة hypergéometique وتمثل

عادة بـ $y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ونلاحظ ان :

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$

ويكون الحل العام لمعادلة بيسيل من الشكل :

$$y = A F(\alpha, \beta, \gamma, x) + B x^{1-\gamma} F(\alpha, \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$

تمارين للحل

٤٧٠ – حل المعادلة التفاضلية التالية بسلسلة تامة بالنسبة لـ x :

$$(1 - xy) y' - y = 0$$

ج :

$$y = A_0 [(1 + x + \frac{1}{2!}(1 + A_0) x^2 + \frac{1}{3!}(1 + 5A_0 + 2A_0^2) x^3$$

$$+ \frac{1}{4!}(1 + 17A_0 + 26A_2^2 + 6A_1^3) x^4 + \dots$$

٤٧١ – حل المعادلة التفاضلية التالية بسلسلة تامة تتمتع بالشرط (من أجل $x = 0$ يكون $y = 0$) :

$$y' - x^2 - e^y = 0$$

ج :

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{17}{60}x^5 + \dots$$

٤٧٢ – حل المعادلة التالية بسلسلة تامة بالنسبة لـ x : $(1 - x) y' = x^2 - y$

ج :

$$y = A_0(1 - x) + x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x \dots + \frac{1.2 \cdot x^n}{(n+2)(n+3)} + \dots \right)$$

٤٧٣ – حل المعادلة التالية بسلسلة تامة بالنسبة لـ $(x - 1)$:

$$x y' = 1 - x + 2y$$

ج :

$$y = A_0 [1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2] + \frac{1}{2}(x - 1)$$

٤٧٤ – حل المعادلة : $y' = 2x^2 + 3y$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

ج : $y = A_0(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 \ldots) + (\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + \ldots)$

٤٧٥ – حل المعادلة : $(x + 1)y' = x^2 - 2x + y$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

ج : $y = A_0(1 + x) - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{5} - \ldots$

٤٧٥ – حل المعادلة : $y'' - x^2 y' - y = 0$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

$$y = A_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{20} + \ldots\right) + A_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \ldots\right)$$

٤٧٦ - حل المعادلة : $y'' + (x - 1)y' + y = 0$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ $x - 2$.

ج : $y = A_0[1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{12}$

$(x-2)^4 - \frac{1}{20}(x-2)^5 + \ldots] + A_1[x - 2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 -$

$\frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{6}(x-2)^4 - \ldots]$

٤٧٧ – حل المعادلة : $y'' + xy = 0$ بسلسلة صحيحة بالنسبة لـ x .

ج : $y = A_0(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \ldots) + A_1(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{504} - \ldots)$

٤٧٨ – حل المعادلة : $2xy'' + (x + 1)y' + 3y = 0$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

ج : $y = A(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots) + B\sqrt{x}(1 - \frac{7x}{6}$

$+ \frac{21x^2}{40} - \frac{11x^3}{80} + \ldots)$

٤٧٩ – حل المعادلة : $2x^2 y'' - x y' + (x^2+1) y = 0$ بسلسلة تامة بالنسبة لـ x .

ج :
$$y = A\sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{168} - \dots\right) + Bx\left(1 - \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{360} - \dots\right)$$

٤٨٠ – حل المعادلة : $3xy'' + 2y' + x^2 y = 0$

ج :
$$y = A\left(1 - \frac{x^3}{24} + \frac{x^6}{2448} - \dots\right) + Bx^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{x^3}{30} + \frac{x^6}{3420} - \dots\right)$$

٤٨١ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(x - x^2) y'' + (1 - x) y' - y = 0$$

ج : $y = c_1 u + c_2 v$ حيث :

$$u = c_1\left(1 + x + \frac{2}{4}x^2 + \frac{2.5}{4.9}x^3 + \frac{2.5.10}{4.9.16}x^4 + \dots\right)$$

$$v = u \log x + \left(-2x - x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}x^3 \dots\right)$$

٤٨٢ – حل المعادلة : $xy'' + y' + xy = 0$

ج : $y = c_1 u + c_2 v$ حيث :

$$u = \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}x^6 + \dots\right)$$

$$v = u \log x + \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{3x^4}{2^3.4^2} - \frac{11\ x^6}{6.2^2.4^3.6^2} + \dots\right)$$

٤٨٣ – حل المعادلة التفاضلية : $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0$

ج : $y = c_1 u + c_2 v$:

$$u = x^{-2}\left(-\frac{x^4}{4^2.4} + \frac{x^6}{2^3.4.6} - \frac{x^8}{2^3.4^2.6.8} + \dots\right)$$

$$v = u \log x + x^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{11\ x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots\right)$$

٤٨٤ – حل المعادلة التفاضلية : $x(1-x)y'' - 3xy' - y = 0$

ج : $y = c_1 u + {}_2 u$ $u = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = x(1-x)^2$

$v = u \log x + 1 + x + x^2 + \dots = u \log x + (1-x)^{-1}$

٤٨٥ – حل المعادلة التفاضلية: $x(1-x)y'' - (1+3x)y' - y = o$

ج : $c_1 u + c_2 v$, $u = 1.2x^2 + 2.3x^3 + 3.4x^4 + \dots$

$v = u + u \log x + (-1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots)$

٤٨٦ – حل معادلة غوس : $(x - x^2)y'' + (\frac{3}{2} - 2x)y' - \frac{1}{4}y = o$

ج : $y = A F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x) + B\sqrt{x}$

٤٨٧ – حل المعادلة التفاضلية : $(x - x^2)y'' + 4(1-x)y' - 2y = o$

ج : $y = A F(1, 2, 4, x) + B\frac{1-x}{x^3}$

٤٨٨ – حل المعادلة التفاضلية $(x^2 - 3x + 2)y'' + uxy' + 2y = o$

وذلك بعد ان تحولها إلى معادلة غوس بتغير متحول من الشكل :

$$x = \xi t + \eta$$

ج: $y = A F(1, 2, 8, 2-x) + B(2-x)^{-7} F(-6, 5, -6, 2-x)$

إذا رمزنا بـ $y_n(x)$ لحل معادلة لوجاندر برهن أن المعادلات التالية تقبل الحلول المرافقة :

٤٨٩ – $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = o$

ج : $y = y_n(ix)$

٤٩٠ – $(x^2 - 1)y'' + 2(p+1)xy' - (n+p+1)(n-p)y = o$

ج : $y = y_n^{(n)}(x)$

٤٩١ – $2x(x-1)y'' + [(2n+5)x - (2n+3)]y'$
$+ (n+1)y = o$

ج : $y = x^{-\frac{n+1}{2}} y_n\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)$

٤٩٢ – $x(x^2+1)y'' + (2x^2+1)y' - n(n+1)xy = 0$

ج : $y = y_n(\sqrt{x^2+1})$

إذا رمزنا بـ $Z_n(x)$ لحل معادلة بيسيل برهن ان المعادلات التالية تقبل الحلول المرافقة :

٤٩٣ – $x^2y'' + xy' - (x^2+n^2)y = 0$ ج : $Z_n(ix)$

٤٩٤ – $x^2y'' + xy' - (x+n^2)y = 0$ ج : $Z_{2n}(2i\sqrt{x})$

٤٩٥ – $x^2y'' + xy' + \frac{1}{4}(x-n^2)y = 0$ ج : $Z_n(\sqrt{x})$