الفصل العاشر

جملة المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

١ ـ جملة معادلتين :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \quad , \quad (2) \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

حيث نعتبر x متحولاً مستقلاً و y و z تابعين مجهولين لـ x .

لحل هذه الجملة نستخرج قيمة z من الاولى ونضع هذه القيمة في الثانية فنجد علاقة يمكن كتابتها بعد حلها بالنسبة لـ z بالشكل :

$$(3) \qquad z = h(x, y, y')$$

نشتق هذه العلاقة ونبدل قيمة z' بـ $g(x, y, z)$ فنحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ y :

$$y'' = k(x, y, y')$$

إذا حلت هذه المعادلة فان حلها سيكون تابعاً لثابتين اختياريين وهو من الشكل :

$$y = \varphi(x, c_1, c_2)$$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة (٣) فاننا نجد z من الشكل $z = \psi(x , c_1 , c_2)$ وهو يتعلق بالثابتين الاختياريين c_1 , c_2 نفسهما .

٢ ـ خطوط القوى : لنرمز بـ $\overrightarrow{F}$ لحقل قوى ولمركباته بـ : X , Y, Z إن

خط القوى،حسب التعريف ،هو كل منحن يمس في كل نقطة من نقاطه شعاع الحقل المتعلق بهذه النقطة وتتعين هذه الخطوط بجملة المعادلتين :

$$\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)}$$

٣ – **جملة n معادلة** : لتكن المجموعة :

$$(4) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

التي تعرف n تابعاً مجهولاً رمزنا لها بـ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بدلالة المتحول المستقل x . لحلها نشتق مثلاً المعادلة الاولى منها $(n-1)$ مرة ونبدل في كل مرة المشتقات التي تظهر بقيمها مأخوذة من المعادلات (٤) فنحصل على معادلات من الشكل :

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = g_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n} = g_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

إذا حلت الـ $(n-1)$ معادلة الأول من جملة المعادلات (٥) بالنسبة لـ $y_2, y_3, \ldots, y_n$ فإننا نحصل على معادلات تفاضلية من الشكل :

$$y_i = \Theta_i[x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-2)}]$$

وإذاحملنا هذه القيم في المعادلة الأخيرة من (٥) فإننا نجد معادلة تفاضلية من الشكل :

$$(6) \qquad \frac{d^ny_1}{dx^n} = H[x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}]$$

بحل هذه المعادلة نحصل على التابع الأول بالشكل : $y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ثم بالتدرج نحصل على بقية التوابع وهي تحوي n ثابتاً اختيارياً .

٤ – **التكاملات الأولية** : التكامل الأولي هو تابع من الشكل :

$$\eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

إذا حملنا فيه حلول جملة المعادلات (٤) كانت قيمته الناتجة عن ذلك تساوي مقداراً ثابتاً أي مستقلة عن x وإذا عرفنا تكاملاً أولياً لجملة معادلات من المرتبة n امكن خفض مرتبتها بوحدة .

٥ – جملة المعادلات الخطية :

نفرض أن هذه الجملة قد حلت بالنسبة لمشتقات التوابع المختلفة الداخلة فيها وأخذت الشكل القانوني .

$$y_j' + \sum_{1}^{n} a_{j,k}\, y_k = o \qquad j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n$$

يفرض مبدئياً ان الأمثال $a_{j,k}$ تابعة للمتحول x أما y_j فهي توابع لـ x .

٦ – جملة ثلاث معادلات خطية . جملة الحلول الأساسية :

آ – جملة المعادلات متجانسة :

$$y' = a\,y + b\,z + cu$$
$$z' = a_1 y + b_1 z + c_1 u$$
$$u' = a_2 y + b_2 z + c_2 u$$

إذا كانت y_1 ، z_1 ، u_1 حلولاً لجملة المعادلات المفروضة فإن $c\,y_1 + c\,z_1 + c\,u_1$ حل لها أيضاً .

وإذا كانت y_2 ، z_2 ، u_2 جملة ثانية من الحلول فإن $y_1 + y_2\,, z_1 + z_2\,, u_1 + u_2$ تحقق جملة المعادلات المفروضة .

واذا كان $y_3\,, z_3\,, u_3$ جملة ثالثة من الحلول فان التوابع التالية تحقق الجملة :

$$c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + c_3\,y_3 \quad , \quad c_1\,z_1 + c_2\,z_2 + c_3\,z_3 \quad , \quad c_1\,u_1 + c_2\,u_2 + c_3\,u_3$$

تؤلف هذه الجمل الثلاثة جملة حلول أساسية فيما إذا كان :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

لا يطابق الصفر .

ويكون عندها الحل العام للجملة هو :

$$y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + c_3\,y_3 \quad , \quad z = c_1\,z_1 + c_2\,z_2 + c_3\,z_3$$

$$u = c_1\,u_1 + c_2\,u_2 + c_3\,u_3$$

ب - جملة المعادلات ذات أطراف ثانية :

$$y' = a y + b z + c u + d$$
$$z' = a_1 y + b_1 z + c_1 u + d_1$$
$$u' = a_2 y + b_2 z + c_2 u + d_2$$

نطبق من أجل ايجاد الحل العام لجملة المعادلات التامة طريقة لا غرانج وهي طريقة تحويل الثوابت الإختيارية .

٧ - جملة المعادلات الخطية ذات الأمثال الثابتة :

آ - الجملة متجانسة :

$$y_j' + \sum_{1}^{n} a_{j,k}\, y_k = o \qquad j = 1 , 2 , \dots n$$

تقبل هذه الجملة حلولاً من الشكل : $y_j = a_j\, e^{rx}$ حيث (a_j , r) ثوابت .

مسائل و تمارين محلولة

٤٢٣ - حل جملة المعادلتين :

$$\frac{dz}{dx} = - y + 4\, z \quad , \quad \frac{d y}{d x} = y + 2 z \qquad (1)$$

الطريقة الأولى : نحل هذه الجملة بالطريقة العامة فنشتق المعادلة الاولى ثم نحذف بين جملة المعادلات المفروضة والمعادلة الناتجة التابع z ومشتقه فنجد على التوالي :

$$y'' = y' + 2\, z' \; , \; z' = - y + 2\, (y' - y) = - 3\, y + 2 y'$$
$$y'' = y' + 2\, (- 3\, y + 2 y') = 5 y' - 6\, y$$

ونحصل على المعادلة الخطية من المرتبة الثانية

$$y'' - 5 y' + 6\, y = o$$

حلها العام :

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} \qquad (2)$$

واذا حملناقيمة التابع y هذه ومشتقها في المعادلةالأولى نجد :

$$z = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad (3)$$

إن التابعين (٢و٣) يمثلان الحل العام لجملة المعادلات المفروضة .

الطريقة الثانية : في بعض الحالات يمكننا ان نتوصل لحل جملة المعادلات بتركيب معادلات هذه المجموعة مع بعضها بحيث نتوصل إلى معادلات تفاضلية عادية تحوي توابع إضافية فمثلاً من أجل هذا التمرين يمكننا ان نطرح المعادلة الثانية من الأولى فنجد :

$$y' - z' = \frac{d(y - z)}{dx} = 2(y - z)$$

واذاطرحنامن الأولى مثلي الثانية نجد: $\frac{d(y - 2z)}{dx} = 3(y - 2z)$

إن حلي هاتين المعادلتين هما : $y - z = \lambda e^{2x}$

$$y - 2z = \mu e^{3x}$$

ونجد من جديد : $y = 2\lambda e^{2x} - \mu e^{3x} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$$z = \lambda e^{2x} - \mu e^{3x} = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

٤٢٤ – حل جملة المعادلتين : $y' + 3y + z = 1 \ , \ z' - y + z = x$

الحل : نستنتج من المعادلة الاولى : $z = 1 - 3y - y'$

ونجد بأخذ مشتق الطرفين واستنتاج قيمة z' من جملة المعادلتين :

$$z' = -3y' - y'' = x + y - (1 - y' - 3y)$$

ومنه : $y'' + 4y' + 4y = 1 - x$

وهي معادلة خطية ذات امثال ثابتة حلها العام :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{-x + 2}{4}$$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة الأولى من المجموعة فإننا نجد :

$$z = -[(c_1 + c_2) + c_2 x]e^{-2x} + \frac{3x-1}{4}$$

٤٢٥ — حل جملة المعادلات :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = y - z \;,\; \frac{dy}{dt} = z - x \;,\; \frac{dz}{dt} = x - y$$

الحل : لنحاول ايجاد بعض التكاملات الأوليـة وذلك في سبيل خفض مرتبة هذه الجملة .

إذا جمعنا المعادلات الى بعضها فاننا نجد :

$$(2) \qquad x + y + z = a \quad \text{ومنه} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$$

إذا اضفنا المعادلات (١) الى بعضها بعد ضربها على الترتيب بـ x, y, z نجد :

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad \text{ومنه} \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

يمكننا استخراج z, y من المعـادلتين (٢ و ٣) بدلالة x ونجـد على التوالي :

$$(4) \qquad y^2 + z^2 = b^2 - x^2 \quad , \quad y + z = a - x$$

$$(y - z)^2 = 2(y^2 + z^2) - (y + z)^2 = 2(b^2 - x^2) - (a - x)^2$$
$$= (2b^2 - a^2) + 2ax - 3x^2$$

$$(5) \qquad y - z = \pm\sqrt{3}\sqrt{c^2 - \left(x - \frac{a}{3}\right)^2}$$

حيث c ثابت إختياري .

ونستنتج من المعادلة الاولى :

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{3}\sqrt{c^2 - \left(x - \frac{a}{3}\right)^2}$$

إذا كاملنا بالطرق المعروفة نجد :

$$x = \frac{a}{3} + c \sin \sqrt{3} \, (t - t_0)$$

وإذا حملنا هذه القيمة في المعادلتين (٤ , ٥) فاننا نجد :

$$y = \frac{a}{3} - \frac{c}{2} \sin \sqrt{3} \, (t - t_0) + \frac{\sqrt{3}\, c}{2} \cos \sqrt{3} \, (t - t_0)$$

$$z = \frac{a}{3} - \frac{c}{2} \sin \sqrt{3} \, (t - t_0) - \frac{\sqrt{3}\, c}{2} \cos \sqrt{3} \, (t - t_0)$$

تعطي المعادلات الثلاثة الاخيرة الحل العام لجملة المعادلات المفروضة .

٤٢٦ – حل جملة المعادلات التفاضلية التالية وعين منحنياتها التكاملية :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = x - y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = x + y$$

الحل : إذا جمعنـــا هاتين المعادلتين الى بعضها، بعد ضرب الاولى بـ x والثانية بـ y ، فاننا نجد :

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{1}{2} u' = u \qquad u = (x^2 + y^2)$$

ومنه $\quad \frac{du}{u} = 2 \quad ، \quad \log \frac{u}{c^2} = 2\, t \quad ، \quad u = x^2 + y^2 = c^2 e^{2t}$

واذا طرحنا الاولى من الثانية بعد ضرب الاولى بـ y والثانية بـ x نجد :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = dt$$

إذا انتقلنا إلى الاحداثيات القطبية فإننا نجد :

$$x = \varrho \cos \Theta \quad ، \quad y = \varrho \sin \Theta \quad ، \quad dx = \cos \Theta \, d\varrho - \varrho \sin \Theta \, d\Theta ,$$
$$dy = \sin \Theta \, d\varrho + \varrho \cos \Theta \, dx$$

$$x\, d\, y - y\, d\, x = \varrho \cos \Theta \sin d \, d\varrho + \varrho^2 \cos^2 \Theta \, d\Theta - \varrho \cos \Theta \sin \Theta \, d\varrho + \varrho^2 \sin^2 \Theta \, d\Theta = \varrho^2 \, d\Theta$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\Theta = dt$$

ومنه
$$\Theta + k = t$$

ونجد :
$$r^2 = x^2 + y^2 = c^2\ e^{2t} = c^2\, e^{2(\Theta + k)}$$

أو
$$r = c\, e^{\Theta + k}$$

إن المنحنيات التكاملية حلزونات لوغارتمية معطاة بالمعادلة القطبية الأخيرة .

٤٢٧ – حل جملة المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = z \quad , \quad \frac{dz}{dt} = x \qquad (1)$$

الحل : إن هذه الجملة خطية وذات امثال ثابتة نفتش عن حلول لها من الشكل :

$$x = \alpha\, e^{rt} \quad , \quad y = \beta\, e^{rt} \quad . \quad z = \gamma\, e^{rt}$$

إذا أخذنا مشتقات هذه التوابع وحملناها في المعادلات (١) فإننا نجد المعادلات الجبرية :

$$\alpha r - \beta = o \quad , \quad \beta r - \gamma = o \quad , \quad \alpha - \gamma r = o$$

بالنسبة للمجاهيل α, β, γ .

إن هذه المعادلات متجانسة وليكون لها حل مخالف للصفر يجب ان يكون معين أمثالها معدوماً أي .

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & -1 & o \\ o & r & -1 \\ 1 & o & -r \end{vmatrix} = o$$

ومنه
$$\Delta = r^3 - 1 = (r - 1)(r^2 + r + 1) = o$$

إن حلول هذه المعادلة المميزة هي : $1 \quad , \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

ويكون بنتيجة ذلك :

$$x = c_1\, e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right)$$

$$y = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 - \frac{1}{2} c_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 + \frac{1}{2} c_3 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

$$z = \frac{d^2x}{dt^2} = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[- \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3 + \frac{1}{2} c_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_2 - \frac{1}{2} c_3 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

تمثل هـــذه التوابع الحل العام لجملة المعادلات المفروضة وهي تتعلق كما نلاحظ بثلاثة ثوابت اختيارية .

٤٢٨ – $y' + 8y + 3z = 5e^{-x}$ ، $5y' + 4y - 2z' - z = e^{-x}$

اذا حملنا قيمة y من المعادلة الأولى الى المعادلة الثانية فاننا نجد :

$$\begin{cases} y' + 8y + 3z = 5e^{-x} \\ z' - 7z + 18y = 12e^{-x} \end{cases} \qquad (1)$$

إن هذه الجملة خطية ذات امثال ثابتة . نفتش عن حلول لهاتين المعادلتين بدون أطراف ثانية من الشكل :

$$y = \alpha e^{rx} \quad , \quad z = \beta e^{rx}$$

إذا حملنا هـــذه القيم في المعادلتين (١) فاننا نحصل بعد الاختصار على المعادلتين الخطيتين المتجانستين الجبريتين بالنسبة لـ α ، β :

$$(r + 8)\alpha - 3\beta = 0$$

$$18\alpha + (r - 7)\beta = 0$$

ليكون لهذه الجملة حل لا يساوي الصفر يجب ان يكون معين امثالهـــا معدوماً :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r + 8 & -3 \\ 18 & r - 7 \end{vmatrix} = r^2 + r - 2 = 0$$

ونجد ان لهذه المعادلة المميزة الجذران : $(2 - , 1)$ ويكون لجملة المعادلات الحلين e^{x} ، e^{-2x}

ونجد مثلاً : $y_1 = A e^{x} + B e^{-2x}$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلة الأولى من المجموعة (١) بعد حذف طرفها الثاني نجد :

$$z_1 = 3 A e^{x} + 2 B e^{-2x}$$

إن z_1 , y_1 هما الحلان العامان لجملة المعادلتين (١) مجردة عن الاطراف الثانية ولايجاد الحل العام للجملة التامة نطبق طريقة لاغرانج أي طريقة تحويل الثوابت الاختيارية فنجد المعادلتين :

$$A' e^{x} + B' e^{-2x} = 5 e^{-x}$$
$$3 A' e^{x} + 2 B' e^{-2x} = 12 e^{-x}$$

بحل هاتين المعادلتين الخطيتين نجد : $A' = 2 e^{-2x}$ ، $B' = 3 e^{x}$

ومنه $A = - e^{-2x} + \lambda \quad , \quad B = 3 e^{x} + \mu$

ويكون الحل العام لجملة المعادلتين المفروضة :

$$y = (- e^{-2x} + \lambda) e^{x} + (3 e^{x} + \mu) e^{-2x} = 2 e^{-x} + \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$$
$$z = 3 (- e^{-2x} + \lambda) e^{x} + 2 (3 e^{x} + \mu) e^{-2x} = 3 e^{-x} + 3 \lambda e^{x} + 2 \mu e^{-x}$$

٤٢٩ – حل جملة المعادلات التالية إذا علمت ان جملة المعادلات بدون أطراف ثانية تقبل حلولاً من الشكل $y_1 = \alpha x^{r} , y_1 = \beta x^{r}$ حيث α, β, r اعداد ثابتة .

$$(1) \qquad x y' + y + 2 z = x^2 \cos x , x z' - 3 y - 4 z = 0$$

الحل : إن هذه الجملة خطية نكتبها بدون طرف ثانٍ :

$$(2) \qquad x y' + y + 2 z = 0 \quad , \quad x z' - 3 y - 4 z = 0$$

وانفتش عن حلول لهذه الجملة من الشكل $y_1 = \alpha x^r ; z_1 = \beta x^r$

إذا ما أخذنا مشتقي هذين التابعين وبدلنا في جملة المعـادلات (٢) ثم اختصرنا فاننا نحصل على جملة المعادلتين الجبريتين الخطيتين :

$$(3) \quad \begin{cases} (r+1)\alpha + 2\beta = 0 \\ -3\alpha + (r-4)\beta = 0 \end{cases}$$

ليكون لهاتين المعادلتين حل مغاير للصفر ، يجب ان يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r+1 & 2 \\ -3 & r-4 \end{vmatrix} = r^2 - 3r + 2 = 0$$

اي ان يكون $r = 1$ أو $r = 2$.

من اجل $r = 1$ تعطي المعادلتان (٣) $\beta = -\alpha$ ونجد الحل الخاص :

$$y = Ax \quad , \quad z = -Ax$$

أما من اجل $r = 2$ فان هذه المعادلات تعطي $\beta = \frac{-3}{2}\alpha$ ونجد الحل الخاص : $y = 2Bx^2 \quad , \quad z = -3Bx^2$

ويكون الحل العام لجملة المعادلتين (2) هو :

$$(4) \quad y = Ax + 2Bx^2 \quad , \quad z = -Ax - 3Bx^2$$

حيث A , B عددان اختياريان .

لاتمام حل جملة المعادلتين المفروضة نفتش عن حلها العام من الشكل (٤) حيث نفرض A , B تابعين مجهولين لـ x ونطبق طريقـــة تحويل الثوابت فنحصل عندها على المعادلتين الخطيتين الجبريتين بالنسبة للمجهولين A' , B' :

$$x(A'x + 2B'x^2) = x^2 \cos x$$
$$x(-A'x - 3B'x^2) = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد : $A' = 3\cos x \quad , \quad B' = -\frac{\cos x}{x}$

ويكون $A = 3 \sin x + \lambda$, $B = -\int \frac{\cos x}{x} dx + \mu$

ويكون الحل العام لجملة المعادلتين :

$$y = \lambda x + 2 \mu x^2 + 3 x \sin x - 2 x^2 \int \frac{\cos x}{x} dx$$

$$z = - \lambda x - 3 \mu x^2 - 3 x \sin x + 3 x^2 \int \frac{\cos x}{x} dx$$

حيث λ ، μ عددان ثابتان اختياريان والتابع $\int \frac{\cos x}{x}$ لا يمكن حسابه بدلالة التوابع العادية المعروفة ، نبقيه في الجواب بشكل تكامل

٤٣٠ – لتكن جملة المعادلات التفاضلية :

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} + (b-c)yz = o \; , \; \frac{dy}{dt} + (c-a) z x = o , \; \frac{dz}{dt} + (a-b) x y = o$$

أوجد تكاملين اوليين لهذه الجملة وأعد حلها الى عملية تكامل ؛ أتمم حل هذه الجملة من أجل الحالة التي ينعدم فيها كل من y , z من أجل $t = o$.

الحل : نجمع المعادلات (١) إلى بعضها بعد ضرب الأولى من اليسار بـ x والثانية بـ y والأخيرة بـ z فنجد :

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = o \qquad \text{ومنه} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$$

إذا ضربنا المعادلة الأولى بـ $\frac{x}{b-c}$ والثانية بـ $\frac{y}{c-a}$

وطرحنا الناتجين من بعضها فاننا نجد :

$$\frac{x}{b-c} \frac{dx}{dt} - \frac{y}{c-a} \frac{dy}{dt} = o \qquad \text{ومنه} \qquad \frac{x^2}{b-c} - \frac{y^2}{c-a} = \gamma$$

يمكننا بعد هذا ان نستخرج قيمتي x ، y من المعادلتين :

$$\frac{x^2}{b-c} - \frac{y^2}{c-a} = \gamma$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 - z^2$$

فنجد $\quad$ (2) $\quad y^2\left(\frac{b-c}{c-a} + 1\right) = \lambda^2 - z^2 - \gamma(b-c)$

$$x^2\left(\frac{c-a}{b-c} + 1\right) = \lambda^2 - z^2 + \gamma(c-a)$$

$$(a-b)\,x\,y = \mp\sqrt{(c-a)(b-c)\cdot[\lambda^2 - z^2 + \gamma(c-a)][\lambda^2 - z^2 - \gamma(b-c)]}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة الاخيرة من المعادلات (١) فاننا نجد :

$$\frac{dz}{\sqrt{[\lambda^2 - z^2 + \gamma(c-a)]\cdot[\lambda^2 - z^2 - \gamma(b-c)]}} = \mp\sqrt{(c-a)(b-c)}\,dt$$

وبذلك نكون قد اعدنا حل الجملة المفروضة الى عملية تكامل .

الحالة الخاصة : لينعدم y , z في وقت واحد مع t يلزم أن يكون $\gamma = 0$ ويأخذ عندها التكامل الأخير الشكل :

$$\frac{dz}{\lambda^2 - z^2} = \pm\sqrt{(c-a)(b-c)}\,dt$$

$$\frac{\lambda + z}{\lambda - z} = e^{\alpha(t-t_0)} \quad ، \quad \frac{1}{2\lambda}\log\frac{\lambda + z}{\lambda - z} = \mp\sqrt{(c-a)(b-c)}\,(t - t_0)$$

حيث فرضنا $\quad \alpha = \pm 2\lambda\sqrt{(c-a)(b-c)}$

ومنه $\quad z = \lambda\,\frac{e^{\alpha(t-t_0)} - 1}{e^{\alpha(t-t_0)} + 1} = \lambda\,th\,\frac{1}{2}e^{\alpha(t-t_0)}$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلتين (٢) فاننا نجد :

$$x = \frac{\pm \lambda \sqrt{\dfrac{b-c}{b-a}}}{\text{ch}\,\frac{1}{2}e^{\alpha(t-t_0)}} \qquad y = \frac{\pm \lambda \sqrt{\dfrac{c-a}{b\quad a}}}{\text{ch}\,\frac{1}{2}e^{\alpha(t-t_0)}}$$

٤٣١ – حل جمل المعادلات التالية :

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y - mx} = \frac{dz}{z} \qquad (1)$$

حيث نعتبر m عدداً ثابتاً :

الحل : الطريقة الاولى – نضرب حدي النسبة الأولى بـ x وحدي النسبة الثانية بـ y ونجمع صورتي النسبتين الناتجتين الى بعضها وكذلك مخرجيها فنحصل على نسبة تساوي النسب الأصلية :

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z}$$

ونجد باستكمال طرفي هذه العلاقة :

$$\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = \log z + \log A$$

ومنه

$$\sqrt{x^2 + y^2} = A z \qquad (2)$$

أما إذا ضربنا حدي النسبة الأولى بـ x وحدي النسبة الثانية بـ y وطرحنا صورة النسبة الثانية الناتجة من صورة النسبة الأولى الناتجة وكذلك المخارج فإننا نجد :

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{m(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة ، بعد تقسيم حدي الطرف الاول على x^2 ، بالشكل :

$$\frac{1}{m}\,\frac{\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{dz}{z}$$

واذا فرضنا $u = \frac{y}{x}$ فان $du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$ ويكون :

$$\frac{1}{m}\,\frac{du}{1+u^2} = \frac{dz}{z}$$

او

$$\frac{1}{m}\,\text{Arc tg}\,\frac{y}{x} + \log B = \log z$$

واذا علمنا ان الزاوية القطبية Θ تحقق العلاقة $\text{Arc tg}\,\frac{y}{x} = \Theta$ فانه يكون :

$$z = B\,e^{\frac{\Theta}{m}} \qquad (3)$$

إن العلاقتين (٢ و ٣) تمثلان تكاملين اولين لجملة المعادلات (١) وبما أن هذه الجملة تحوي تابعين مجهولين (y , z) مثلا، فهي من المرتبة الثانية وتمثل العلاقتان (٢ و ٣) الحل العام لها .

الطريقة الثانية : يمكننا كتابة جملة المعادلات المفروضة بالشكل :

$$\frac{dx}{x - m\,y} = \frac{dy}{y - m\,x} = \frac{dz}{z} = dt \qquad (4)$$

ونستنتج من هذا الشكل جملة المعادلات الخطية التالية حيث نعتبر t المتحول المستقل و (x , y , z) توابع مجهولة :

$$x' = x - m\,y \quad , \quad y' = y + m\,x \quad , \quad z' = z \qquad (5)$$

بحل هذه الجملة بالطرق المعروفة نجد الحلول :

$$x = e^t\,(A\cos m\,t + B\sin m\,t) \,,\; y = e^t\,(A_1\cos m\,t + B_1\sin m\,t)$$

$$z = C\,e^t$$

لايجاد العلاقات بين الثوابت الاختيارية الخمسة الداخلة في هذه الحلول نبدل اولاً في المعادلة الاولى من المجموعة (5) فنجد العلاقتين :

$$B_1 = A \qquad , \qquad A_1 = -B$$

ونجد حل جملة المعادلات بشكل وسيطي :

$$x = e^t (A \cos m t + B \sin m t) \quad , \quad y = e^t (-B \cos m t + A \sin m t)$$

$$z = C e^t$$

ونجد بسهولة تامة :

$$x^2 + y^2 = (A^2 + B^2) e^{2t} = \frac{A^2 + B^2}{C} z^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-B \cos m t + A \sin m t}{A \cos m t + B \sin m t} = \frac{\operatorname{tg} m t - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} m t}$$

حيث فرضنا $\operatorname{tg} \omega = \frac{B}{A}$.

استناداً إلى الدستور :

$$\operatorname{Arc tg} a + \operatorname{Arc tg} b = \operatorname{Arc tg} \frac{a + b}{1 - ab}$$

نجد : $\Theta = \operatorname{Arc tg} \frac{y}{x} = m t - \omega$

ومنه : $t = \frac{\Theta + \omega}{m}$

ونجد اخيراً : $z = C e^{\frac{\omega}{m}} e^{\Theta} = C_1 e^{\Theta}$

وهذا يطابق ما وجدناه بالطريقة الاولى :

٤٣٢ – حل جملة المعادلات :

$$(1) \qquad y' = x'' - 3x - 3y - t - 1 \quad ، \quad y' = x' + 2x - 2y ,$$

$$z' = 2x + 2y - z$$

الحل – **الطريقة الأولى** : يمكننا حل هاتين المعادلتين بتركيبهما مع بعضها بحيث نتوصل إلى معادلة لا تحوي إلا أحد التابعين نحلها بالطرق المعروفة ونستنتج الحل العام للمعادلة إذا جمعنا المعادلتين (١) الأخيرتين من من المجموعة إلى بعضها فاننا نجد :

$$x'' - x' - 5x - y - t - 1 = 0$$

ومنه $y = x'' - x' - 5x - t - 1$ و $y' = x^{(3)} - x'' - 5x' - 1$

إذا حملنا هاتين القيمتين في المعادلة الثانية من المجموعة (١) فاننا نجد :

$$x^{(3)} - x'' - 5x' - 1 = x' + 2x - 2(x'' - x' - 5x - t - 1)$$

ونجد بعد الاصلاح : $x^{(3)} + x'' - 8x' - 12x = 2t + 3$

وهي معادلة خطية من المرتبة الثالثة امثالها ثابتة وحلها العام :

$$x = c_1 e^{3t} + e^{-2t}(c_2 + c_3 t) - \frac{1}{6} t - \frac{5}{36}$$

ومن ثم نتوصل بدون عمليات تكامل لإيجاد قيمتي y , z بحمل قيمة x ومشتقاتها في المعادلتين الأولى والثالثة من الجملة المفروضة .

الطريقة الثانية : يمكننا ان نستنتج من المعادلتين الثانية والثالثة من الجملة (١) جملة مؤلفة من ثلاث معادلات خطية من المرتبة الأولى وذلك بادخال تابع وسيط معرف بالعلاقة $\eta = x'$:

$$y' = x' + 2x - 2y, \quad \eta = x', \quad y' = \eta' - 3x - 3y - t - 1$$

وبعد حل هذه الجملة بالنسبة للمشتقات تأخذ الشكل :

$$x' - \eta = 0, \quad y' - \eta - 2x + 2y = 0, \quad \eta' - \eta - 5x - y = t + 1$$

نحل هذه الجملة بدون أطراف ثانية أي نحل الجملة :

$$(2) \quad x' - \eta = 0, \quad y' - \eta - 2x + 2y = 0, \quad \eta' - \eta - 5x - y = 0$$

ونفتش عن حلول من الشكل : $x = \alpha e^{rt}$ $y = \beta e^{rt}$, $\eta = \gamma e^{rt}$

فنحصل بعد حمل هذه القيم في المعادلات (٢) على جملة المعـادلات الجبرية الخطية بالنسبة لـ (α, β, γ) :

$$-2\alpha + (r+2)\beta - \gamma = 0 \quad , \quad \alpha r - \gamma = 0$$
$$-5\alpha - \beta + (r-1)\gamma = 0$$

ومن المعلوم انه ليكون لهذه الجملة حلول مخالفة للصفر يجب ان يكون معين امثالها معدوماً اي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & 0 & -1 \\ -2 & r+2 & -1 \\ -5 & -1 & r-1 \end{vmatrix} = (r+2)(r^2 - r - 6) = 0$$

إن جذور هذه المعادلة المميزة هي : $r_1 = r_2 = -2$, $r_3 = +3$

ويكون : $x = c_1 e^{3t} + e^{-2t}(c_2 + c_3 t)$

إذا حملنا هذه القيمة في المعادلات (٢) فاننا نجد :

$$\eta = 3c_1 e^{3t} + e^{-2t}(c_3 - 2c_2 - 2c_3 t)$$
$$y = c_1 e^{3t} + e^{-2t}(c_2 - 5c_3 + c_3 t)$$

من اجل ايجاد الحل العام لجملة المعادلات التامة نستعمل طريقة لاغرانج او طريقة تحويل الثوابت الاختيارية فنجد المعادلات الجبرية التالية :

$$c_1' e^{3t} + e^{-2t}(c_2' - 5c_3' + c_3' t) = c_1' e^{3t} + e^{-2t}(c_2' + c_3' t) = 0$$
$$3c_1' e^{3t} + e^{-2t}(c_3' - 2c_2' - 2c_3' t) = t + 1$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$5c_1' = t e^{-3t} + e^{-3t} \quad , \quad c_1 = -\frac{1}{15} t e^{-3t} - \frac{4}{45} e^{-3t} + \lambda$$

$$5c_2' = -t e^{2t} - e^{2t} \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{10} t e^{2t} - \frac{1}{20} e^{2t} + \mu$$

$$c_3' = 0$$

إذا حملنا هذه القيم في إفادة x مثلاً فاننا نجد :

$$x = \lambda e^{3t} + e^{-2t} (\mu + c_3 t) - \frac{t}{6} - \frac{5}{36}$$

وهي تطابق تماماً ماوجدناه اعلاه . وبالطريقة السابقة نجد إفادتي y , z

تمارين للحل

حل مجموعات المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

٤٣٣ - $\frac{dx}{dt} = x - 2y , \frac{dy}{dt} = 5x + 3y$

ج : $x = e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t)$

$$y = \frac{1}{2} e^{2t} [- (A + 2B) \cos 3t + (3A - B] \sin 3t]$$

٤٣٤ - $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{yx}$ ، $y = cx$ ، $cx^2 = z^2 + c_1$

٤٣٥ - $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ ج : $y = c_1 x_1 \quad z = c_2 x$

٤٣٦ - $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}$ ج : $y = c_1 x , z = c_2 x + y$

٤٣٧ - $\frac{dx}{y} = - \frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = \frac{-dq}{p}$

ج : $x^2 + y^2 = c_1^2 , p^2 + q^2 = c_2^2 , py + qx = c_3$

٤٣٨ - $\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}$

ج : $\log r - \operatorname{Arc} tg \frac{y}{x} = c_1 , z = c_2 r , r^2 = x^2 + y^2$

٤٣٩ - $(z - y)^2 dy = zdx , (z - y)^2 dz = ydx$

ج : $(z - y)^2 + 2x = c , z^2 - y^2 = c_1$

٤٤٠ – $dz = 2y^2 z\,dt \,,\; dy = 2y^3\,dt \,,\; dx = (x^3 + 3xy^2)\,dt$

ج : $z = c_1 y \,,\; (x^2 + y^2)\,y = c\,x^2$

٤٤١ – $z\,dy = (z - 1)\,dx \,,\; dx = (y - x)\,dz$

ج : $(y - x)\,z = c \,,\; (y - x)\,e^{\frac{z}{2(y-z)}} = c_1$

٤٤٢ – $$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}$$

ج : $x + y + z = c \;,\quad x^2 + y^2 + z^2 = c_1$

٤٤٣ – $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ج : $y = c_1 x \,,\; z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c_2$

٤٤٤ – $$\frac{dx}{dt} = \frac{x - y}{z - t} \;,\quad \frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{z - t} \;,\quad \frac{dz}{dt} = x - y + 1$$

ج : $x - y = c \,,\; z - t\,(x - y + 1) = c_1 \,,\; y - \log(z - t) = c_2$

٤٤٥ – $$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

ج : $x^2 + y^2 + z^2 = c_1 y \;,\quad z = c_2 y$

٤٤٦ – $$\frac{dx}{y(x + y)} = \frac{-dy}{x(x + y)} = \frac{dz}{(x - y)(2x + 2y + z)}$$

ج : $x^2 + y^2 = c \;,\quad (x + y)(x + y + z) = c_1$

٤٤٧ – $(x=0 \,, y=1 \,, z=4)$ $$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x + y)}$$

ج : $z = c(x - y) \;,\quad y\,(y - 2x)^3 = (x - y)^2$

٤٤٨ – $y' - x + 6y = e^{2t} \;,\quad x' + 5x - 2y = e^t$

ج : $x = 2A\,e^{-4t} + B\,e^{-7t} + \frac{7}{40}\,e^t + \frac{1}{27}\,e^{2t}$

$$y = A e^{-4t} - B e^{-7t} + \frac{1}{40} e^{t} + \frac{7}{54} e^{2t}$$

٤٤٩ - $y' = 3z - y$ ، $z' = z + y + e^{ax}$

ج : $y = A e^{2x} + B e^{-2x} + \frac{3 e^{ax}}{a^2 - 4}$

$$z = A e^{2x} - \frac{1}{3} B e^{-2x} + \frac{(a+1) e^{ax}}{a^2 - 4}$$

٤٥٠ - $x' = 2x + 4y + \cos t$ ، $y' + x + 2y = \sin t$

ج : $y = -At + B + 2\sin t$ ، $x = A(1 + 2t) - 2B - 2\cos t - 3\sin t$

٤٥١ - $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}$ ، $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}$

ج : $y = \frac{c + c_1 - 2x}{2\sqrt{c - 2x}}$ ، $z = \frac{c_1 - c + 2x}{2\sqrt{c - 2x}}$

٤٥٢ - $y'' + y' + z'' - z = e^{x}$ ، $y' + 2y - z' + z = e^{-x}$

ج : $8y = e^{x} + (8 - A + 3B - 2Bx) e^{-x}$

$$8z = (3x + c) e^{x} + (A + Bx) e^{-x}$$

٤٥٣ - $x'' + 2m^2 y = o$ ، $y'' - 2m^2 x = o$

ج : $x = e^{mt}(A\cos mt + B\sin mt) + e^{-mt}(C\cos mt + D\sin mt)$

$$y = e^{mt}(A\sin mt - B\cos mt) + e^{-mt}(D\cos mt - C\sin mt)$$

٤٥٤ - $\frac{d^2x}{dt^2} = 3(y - x - z)$ ، $\frac{d^2y}{dt^2} = x - y$ ، $\frac{d^2z}{dt^2} = -z$

ج : $x + 3y - 3z = Ct + D$ ، $z = A\cos t + B\sin t$

$$x - y + z = E\cos 2t + F\sin 2t$$

٤٥٥ - $\frac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z$ ، $\frac{d^2y}{dt^2} = x - y + z$ ، $\frac{d^2z}{dt^2} = x + y - z$

ج: $x + y + z = A e^{t} + B e^{-t} \quad , \quad x - y = C \cos t\sqrt{2} + D \sin t\sqrt{2}$

$$y - z = E \cos t\sqrt{2} + F \sin t\sqrt{2}$$

٤٥٦ – $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3y + 4z - 3 \quad , \quad \dfrac{d^2z}{dx^2} + y + z - 5 = 0$

ج: $y = -23 - 2(A + C + Dx)e^{x} - 2(B - D - Dx)e^{-x}$

$$z = 18 + (A + Cx)e^{x} + (B + Dx)e^{-x}$$

٤٥٧ – $t x'' + 2x' + t x = 0 \quad , \quad t y' + 2y - t x' = 0$

ج: $t x = A \cos t + B \sin t$

$$t^2 y = c + (A t + 2B)\cos t + (B t - 2A)\sin t$$