الفصل التاسع

المعادلة الخطية من المرتبة الثانية

١ – المعادلة الخطية ذات أمثال ثابتة : إن الطرق التي اوردناها في الفصل السابق من اجل ايجاد حل خاص للمعادلة الخطية بصورة عامة تطبق تماماً على المعادلة الخطية من المرتبة الثانية التي نرمز لها بالشكل :

$$y'' + A y' + B y' = D(x)$$

ولكن من أجل بعض الحالات الخاصة للطرف الثاني يمكننا استعمال طرق اكثر مباشرة وأسهل تطبيقاً من الحالات التالية :

آ – الطرف الثاني كثير حدود : إذا كان $B \neq o$ وكان الطرف الثاني كثير حدود من الدرجة n ، فان للمعادلة المذكورة حلاً خاصاً مؤلفاً من كثير حدود قوته تساوي قوة كثير حدود الطرف الثاني. نعين امثال الحل الخاص بطريقة الأمثال غير المعينة .

اذا كان $B = o$, $A \neq o$ فاننا نفتش عن حل من الشكل $x\,P(x)$ حيث $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n .

واذا كان $B = o$, $A = o$ فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل $x^2 P(x)$.

ب – الطرف الثاني تابع أسي من الشكل αe^{ax}: اذا رمزنا بـ $\varphi(\varrho)$ للمعادلة المميزة:

$$\varphi(\varrho) = \varrho^2 + A\varrho + B$$

فاذا كان $\varphi(a) \neq o$ فان $y = \dfrac{\alpha e^{ax}}{\varphi(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

أما اذا كان $\varphi(a) = o$ و $\varphi'(a) \neq o$ فان $y = \dfrac{\alpha x e^{ax}}{\varphi'(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

اما إذا كان $\varphi(a)=o$ ، $\varphi'(a)=o$ فان $y=\frac{\alpha x^2 e^{ax}}{\varphi''(a)}$ حل خاص للمعادلة المفروضة .

ح ـ الطرف الثاني مؤلف من تركيب مثلثي من الشكل :

$\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x$: فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل :

$y=\lambda \cos \gamma x + \mu \sin \gamma x$.

وذلك اذا لم يكن الطرف الثاني للمعادلة التامة حلاً خاصاً للمعادلة بدون طرف ثان .

أما اذا كان الطرف الثاني $\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x$ حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل : $x(\lambda \cos \gamma x + \mu \sin \gamma x)$

د ـ الطرف الثاني مؤلف من جداء كثير حدود بتابع أسي $G(x)e^{ax}$:

إذا لم يكن a جذراً للعادلة المميزة فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل .

$$y = P(x)e^{ax}$$

حيث $P(x)$ كثير حدود من درجة $G(x)$.

أما اذا كان a جذراً بسيطاً للمعادلة المميزة فاننا نفتش عن حل من الشكل :

$y = x P(x) e^{ax}$

واذا كان a جذراً مضاعفاً لهذا المعادلة فاننا نفتش عن حل من الشكل

$y = x^2 P(x) e^{ax}$.

هـ ـ الطرف الثاني من الشكل : $e^{ay}(\alpha \cos \gamma x + \beta \sin \gamma x)$

يمكن إعادة هذه الحالة الى الحالة (ب) وذلك تطبيقاً لدساتير اولر :

$$\sin \gamma x = \frac{e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}}{2i} \quad \cdot \quad \cos \gamma x = \frac{e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}}{2}$$

و ـ الطرف الثاني تركيب من الشكل : $P(x)\cos \gamma x$ او

$P_1(x)\sin \gamma x$ حيث $P(x)$ كثير حدود: نفتش عن حل خاص للمعادلة المفروضة من الشكل :

$Q(x)\cos \gamma x + Q_1(x)\sin \gamma x$ حيث $Q(x)$ ، $Q_1(x)$ كثيراً حدود من درجة $P(x)$ هذا إذا لم يكن γi جذراً للمعادلة المميزة أما اذا كان جذراً بسيطاً فاننا

نفتش عن حل خاص من الشكل : $x [Q (x) \cos \gamma x + Q_1 (x) \sin \gamma x)]$
ومن الشكل :

$$x^2 [Q (x) \cos \gamma x + Q_1 (x) \sin \gamma x]$$

اذا كان $i\gamma$ جذراً مضاعفاً .

٢ ـ المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الامثال المتحولة :

لايوجد طريقة عامة لحل المعادلة التفاضلية الخطية ذات الامثال المتحولة ولقد أوردنا في الفصلين (٧، ٨) بعض القواعدالتي تطبق على أنواع معينة من المعادلات الخطية وسنورد فيما يلي طرائق لحل بعض الحالات الخاصة من المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التي نرمز لها بـ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x) \frac{dy}{dx} + S(x) y = Q(x) \qquad (1)$$

٣ ـ **تغيير التابع** لنعتبر $y = u v$ حيث كل من u و v تابعان للمتحول x فيكون :

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = u \frac{d^2v}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + v \frac{d^2u}{dx^2}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) فانها تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + R_1(x) \frac{dv}{dx} + S_1(x) v = Q_1(x) \qquad (2)$$

حيث :

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{u} \quad ، \quad S_1(x) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + R(x) \frac{du}{dx} + S(x) . u \right\}$$

$$R_1(x) = \frac{2}{u} \frac{du}{dx} + R(x)$$

آ ـ اذا كان u حلا خاصاً للمعادلة المتجانسة يكون $S_1 = o$ والمعادلة (٢) لاتحوي التابع v فيمكن عندها خفض مرتبتها وحلها .

ب ـ إذا كان $R_1(x) = o$ ومنه

$$\frac{du}{u} = - \frac{1}{2} R(x) dx \quad و \quad u = e^{-\frac{1}{2} \int R(x) dx}$$

واذا كان فوق ذلك $S_1(x) = A$ من اجل قيمة u الذي حسبناها فان المعادلة (٢) تنقلب الى معادلة ذات امثال ثابتة :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + A v = \frac{Q}{u}$$

اما اذا كان $S_1(x) = \frac{A}{x^2}$ فان المعادلة تأخذ شكل معادلة كوشي .

$$x^2 \frac{d^2v}{dx^2} + A v = \frac{Q x^2}{u}$$

٤ ـ **تغيير المتحول** : لنفرض $t = \varphi(x)$ فيكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2}$$

وتأخذ المعادلة (١) الشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2t}{dx^2} + R \frac{dt}{dx}\right) \frac{dy}{dt} + S y = Q \qquad (3)$$

لنختار التابع بحيث يكون $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{\pm S}{a^2}}$ واذا نتج عن ذلك ان :

$$\frac{\frac{d^2t}{dx^2} + R \frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} = A$$

فان المعادلة ٣ تصبح ذات امثال ثابتة يمكن حلها .

تمارين محلولة

حل المعادلات التفاضلية التالية :

٣٧٣ ـ $y'' - 4 y' = 5$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما $(0 , 4)$ فيكون الحل العام

للمعادلةالمتجانسة هو : $y_1 = c_1 + c_2 e^{+4x}$ وبما ان الطرف الثاني كثير حدود من الدرجة صفر والمعادلة لاتحوي الحد $B\,y$ فاننا نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = \alpha x \quad , \quad y_2' = \alpha \quad , \quad y_2'' = o$$

ويكون $-4\alpha = 5$ ، $\alpha = -\frac{5}{4}$ ، $y_2 = -\frac{5}{4} x$

والحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 + c_2 e^{+4x} - \frac{5}{4} x$$

٣٧٤ - $y'' - 6\,y' + 13\,y = o$ (١)

الحل إنها معادلة خطية متجانسة معادلتها المميزة .

$\varrho^2 - 6\varrho + 13 = o$ جذراها $\varrho = 3 \pm 2i$

الحل العام للمعادلة (١) : $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

٣٧٥ - $2\,y'' + 5\,y' + 2\,y = o$

الحل : المعادلة المميزة $2\varrho^2 + 5\varrho + 2 = o$ جذراها $(-2, -\frac{1}{2})$

الحل العام للمعادلة المفروضة $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

٣٧٦ - $y'' + 4\,y = o$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 4 = o$ جذراها $\varrho = \pm 2i$

الحل العام للمعادلة المفروضة $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

٣٧٧ - $y'' - 2y' + 10\,y = o$

الحل : المعادلة المميزة : $\varrho^2 - 2\varrho + 10 = o$ ، جذراها $\varrho = 1 \pm 3i$

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٣٧٨ - $y'' + 2\,y' - 15\,y = o$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 2\varrho - 15 = o$ ، جذراها $(-5, 3)$.

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$

٣٧٩ - $y'' + 6y' + 9y = 0$.

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 6\varrho + 9 = 0$ لها جذر مضاعف (-3)

الحل العام للمعادلة المفروضة : $(c_1 + c_2 x) e^{-3x}$

٣٨٠ - $y'' - 4y' + 13y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 4\varrho + 13 = 0$ جذراها $\varrho = 2 \pm 3i$

الحل العام للمعادلة المفروضة : $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٣٨١ - $y'' + 25y = 0$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 + 25 = 0$ ، جذراها $\varrho = \pm 5i$

حل المعادلة المفروضة : $y = A \cos 5x + B \sin 5x$

٣٨٢ - $y'' - 3y' + 2y = e^x$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 3\varrho + 2 = 0$ ، الجذران $(1, 2)$

الحل العام للمعادلة المتجانسة : $y_1 = c_1 c^x + c_2 e^{2x}$

إن الطرف الثاني من المعادلة المفروضة حل للمعادلة المتجانسة لذا نفتش عن حل خاص من الشكل : $\lambda x e^x$ وهو :

$$\frac{x e^x}{\varphi'(a)}$$

حيث $\varphi(\varrho) = \varrho^2 - 3\varrho + 2$ ، $\varphi'(\varrho) = 2\varrho - 3$

$$\varphi'(a) = \varphi'(1) = -1$$

والحل الخاص هو $y_2 = -x e^x$ ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$$

٣٨٣ - $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

الحل : المعادلة المميزة $\varrho^2 - 3\varrho + 2 = 0$ ، الجذران (1 , 2)

الحل العام للمعادلة المميزة $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

إن الطرف الثاني لا يساوي أحد جذري المعادلة المفروضة لذا نفتش عن حل خاص من الشكل λe^{5x} وهو :

$$y_2 = \frac{e^{5x}}{\varphi(5)} = \frac{1}{12} e^{5x}$$

ويكون الحل العام : $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$

٣٨٤ - $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما (- 1, - 4) ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$$

نفتش عن حل خاص للمعادلة التامة من شكل الطرف الثاني اي كثير حدود من الدرجة الاولى .

$$y'' = 0 \qquad y' = a \qquad y = ax + b$$

نحمل هذه القيم في المعادلة المفروضة فنجد :

$$5a + 4(ax + b) \equiv 3 - 2x$$

$$4ax + 5a + 4b \equiv 3 - 2x$$

ومنه : $4a = -2$ ، $a = -\frac{1}{2}$

$$5a + 4b = 3 \text{ ، } \frac{-5}{2} + 4b = 3 \qquad b = \frac{11}{8}$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة التامة $y_2 = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x$ والحل العام لها هو :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$$

٣٨٥ - $y'' + 9y = x \cos x$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة هما $\pm 3i$ فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_1 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

نكتب الطرف الثاني من المعادلة المفروضة بالشكل

$$x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} x e^{ix} + \frac{1}{2} x e^{-ix}$$

ونفتش من اجل الحد الاول عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = (ax + b) e^{ix}$$

كما نفتش من اجل الحد الثاني عن حل خاص من الشكل :

$$y_3 = (\alpha x + \beta) e^{-ix}$$

ونتابع العمل كما أجريناه سابقاً فنجد بطريقة الأمثال غير المعينة الأعداد (a, b, α, β).

يمكن أن نطرق السؤال مباشرة ونفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = (ax + b)\cos x + (\alpha x + \beta)\sin x$$

$$y'_2 = a\cos x + \alpha \sin x - (ax + b)\sin x + (\alpha x + \beta)\cos x$$

$$y''_2 = -2a\sin x + 2\alpha\cos x - (ax + b)\cos x - (\alpha x + \beta)\sin x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$(8ax + 8b + 2\alpha)\cos x + (8\alpha x + 8\beta - 2a)\sin x \equiv x\cos x$$

إذا طابقنا بين الطرفين وكتبنا إن الحدود المتشابهة في الطرفين أمثالها واحدة نجد :

$\alpha = 0$ ، $b = 0$ ، $a = \frac{1}{8}$ ، $\beta = \frac{1}{32}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو

$$y = \frac{x\cos x}{8} + \frac{\sin x}{32}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة هو :

$$y = \frac{\cdot}{8} x \cos x + \frac{1}{32} \sin x + c_1 \cos 3 x + e_2 \sin x \cdot$$

٣٨٦ - $$y'' + 4 y = 2 \cos x \cos 3 x \qquad (1)$$

الحل : إن الحل العام للمعادلة بلا طرف ثان هو :

$$y_1 = c_1 \cos 2 x + c_2 \sin 2 x$$

قبل ان نفتش عن حل خاص للمعادلة التامة (١) لنضع الطرف الثاني بشكل مجموع تابعين مثلثيين لأنه استناداً إلى دساتير التحويل يمكننا ان نكتب :

$$2 \cos x \cos 3 x = \cos 2 x + \cos 4 x$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$y'' + 4 y = \cos 2 x + \cos 4 x \qquad (2)$$

يتألف الطرف الثاني من مجموع تابعين اولهما $\cos 2 x$ ، حل خاص المعادلة المتجانسة .

لإيجاد حل خاص للمعادلة التامة نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = x (A \cos 2 x + B \sin 2 x)$$

للمعادلة : $$y'' + 4 y = \cos 2 x \qquad (3)$$

ثم نفتش عن حل خاص من الشكل :

$$y_2 = \alpha \cos 4 x + \beta \sin 4 x$$

للمعادلة $$y'' + 4 y = \cos 4 x \qquad (4)$$

ويكون مجموع هذين الحلين $y_4 = y_2 + y_3$ حل خاص للمعادلة التامة :

$$y_2 = x (A \cos 2 x + B \sin 2 x)$$
$$y_2' = A \cos 2 x + B \sin 2 x + x (- 2 A \sin 2 x + 2 B \cos 2 x)$$
$$y_2'' = - 4 A \sin 2 x + 4 B \cos 2 x - x (4 A \cos 2 x + 4 B \sin 2 x)$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٣) فاننا نجد :

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \cos 2x$$

ونجد بالمطابقة بين الحدود المتشابهة في الطرفين ان : $A = 0$ ، $B = \frac{1}{4}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (٣) :

$$y_2 = \frac{1}{4} x \sin 2x$$

ونجد بالطريقة ذاتها $\quad y_3 = \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$

$$y_3' = -4\alpha \sin 4x + 4\beta \cos 4x$$

$$y_3'' = -16\alpha \cos 4x - 16\beta \sin 4x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (٤) فاننا نجد :

$$-12\alpha \cos 4x - 12\beta \sin 4x \equiv \cos 4x$$

ومنه $\quad \beta = 0 \quad \alpha = -\frac{1}{12}$ ويكون الحل الخاص للمعادلة(٤) :

$$y_3 = -\frac{1}{12} \cos 4x$$

والحل الخاص للمعادلة التامة :

$$y_4 = y_2 + y_3 = \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{12} \cos 4x$$

أما الحل العام للمعادلة التامة فهو :

$$y = y_1 + y_4 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{12} \cos 4x$$

٣٨٧- $\quad y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$

الحل : إن جذري المعادلة المميزة لهذه المعادلة هما $(1, -2)$ فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

لايجاد الحل الخاص للمعادلة التامة نفتش عن حل لها من شكل الطرف الثاني أي كثير حدود من الدرجة الثانية :

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_2 = a x^2 + b x + c \\ 1 & y_2' = 2 a x + b \\ 1 & y_2'' = 2 a \end{array}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$-2 a x^2 + (2a - 2b) x + 2a + b - 2c \equiv -2x^2 + 2x + 2$$

ونستنتج بعد المطابقة بين الحدود المشابهة ان :

$$c = o \quad ، \quad 2a + b - 2c = 2 \quad ، \quad b = o \quad ، \quad 2a - 2b = 2 \quad ، \quad a = 1$$

ويكون : $y_2 = x^2$

ويكون الحل العام للمعادلة التامة : $y = y_1 + y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x^2$

٣٨٨ - $y'' - 2y' + y = e^x$

إن للمعادلة المميزة : $\varrho^2 - 2\varrho + 1 = o$ جذر مضاعف : $\varrho = 1$

فيكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_1 = (c_1 + c_2 x) e^x$$

ونلاحظ أن الطرف الثاني هو e^x وان عامل x في اس e^x هو الواحد وهو جذر مضاعف المعادلة المميزة لذا نفتش عن حل من الشكل :

$$y = \alpha x^2 e^x$$

فيكون : $y'' = \alpha (x^2 + 4x + 2) e^x \,,\, y' = \alpha (x^2 + 2x) e^x$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$e^x [\alpha - 2\alpha + \alpha) x^2 + (4\alpha - 4\alpha) x + 2\alpha] = e^x$$

او $2\alpha = 1$ ومنه $\alpha = \frac{1}{2}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة التامة : $y_2 = \frac{1}{2} x^2 e^x$

والحل العام لها هو : $y = (c_1 + c_2 x) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

$$y'' - 4\,y = \mathrm{sh}\,2\,x$$ **-٣٨٩**

الحل : إن جذري المعادلة المميزة وهي (2 + , 2 -) والحل العـــام للمعادلة المتجانسة هو : $y_1 = c_1\,e^{2x} + e_2\,c^{-2x}$.

يمكن كتابة المعادلة المفروضة بالشكل $y'' - 4\,y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

إن الطرف الثاني من هذه المعادلة يتألف من مجموع حدين كل منهما حل للمعادلة بلا طرف ثانٍ ، نفتش إذن عن حل خاص المعادلة التامة من الشكل :

$$y_2 = \alpha\,x\,e^{2x} + \beta\,x\,e^{-2x}$$

ويكون : $y'_2 = \alpha\,e^{2x} + \beta\,e^{-2x} + (2\,\alpha\,e^{2x} - 2\beta\,e^{-2x})\,x$

$$y'' = 4\,\alpha\,e^{2x} - 4\,\beta\,e^{-2x} + (4\,\alpha\,e^{2x} + 4\,\beta\,e^{-2x})\,x$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة المفروضة فاننا نجد :

$$4\,\alpha\,e^{2x} - 4\,\beta\,e^{-2x} \equiv \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

ونجد بنتيجة المطابقة بين طرفي هذه العلاقة أن : $\alpha = \frac{1}{8}$ ، $\beta = \frac{1}{8}$

ويكون الحل الخاص للمعادلة المفروضة: $y_2 = \frac{x}{8}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{x}{4}\,\mathrm{ch}\,2\,x$

والحل العام للمعادلة التامة :

$$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-2x} + \frac{x}{4}\,\mathrm{ch}\,2\,x$$

ويمكن كتابة هذا الحل بالشكل :

$$y = \left(A + \frac{x}{4}\right)\mathrm{ch}\,2\,x + B\,\mathrm{sh}\,2\,x$$

$$y'' - \frac{3\,y'}{x} + \frac{3\,y}{x^2} = 2\,x - 1$$ **-٣٩٠**

الحل : إن هذه المعادلة خطية ذات امثال متحولة ولو اعتبرناها متجانسة

بالنسبة للتابع ومشتقاته واجرينا التحويل $z = \frac{y'}{y}$ لانقلبت الى معادلة من المرتبة الاولى ومن نوع ريكاتي لا يمكن حلها إذا لم نعلم حلاً خاصاً لها .

نطبق على هذه المعادلة القواعد التي اوردناها في مطلع هذا الفصل ونجد أن x حل خاص لهذه المعادلة بدون طرف ثان .فاذا فرضنا $u = x$ وغيرنا التابع بالشكل $y = x\,v$ فاننا نحصل على المعادلة :

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{x}\,\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{1}{x}$$

وهي معادلة لا تحوي التابع v يمكن حلها بفرض $p = \frac{dv}{dx}$ ونجد المعادلة الخطية من المرتبة الاولى :

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}\,p = 2 - \frac{1}{x}$$

حلها العام : $$p = \frac{dv}{dx} = 2\,x \log x + 1 + c\,x$$

ومنه :

$$v = \frac{y}{x} = \int (2\,x \log x + 1 + c\,x)\,dx = x^2 \log x + x + c_1\,x^2 + c_2$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة المفروضة بالشكل :

$$y = c_1\,x^3 + c_2\,x + x^3 \log x + x^2$$

٣٩١ – حل المعادلة التفاضلية :

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = x\,e^x$$

الحل : يلاحظ أن : $$(2)\qquad R = -\frac{2}{x},\; S = 1 + \frac{2}{x^2}$$

وإذا فرضنا : $$(3)\qquad \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\,R\,dx \quad \text{أو} \quad \frac{2}{u}\,\frac{du}{dx} + R = o$$

نجد : $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{2}R\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}u\frac{dR}{dx}$

وينتج عن ذلك : $S_1 = S + \frac{R}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = S + \frac{R}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx}$

أو
$$S_1 = S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} \qquad (4)$$

بعد أن بدلنا $\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$ بـ $-\frac{1}{2}R$.

إذا ادخلنا القيم (١) في العلاقة (٤) نجد :

$$S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^2} = 1$$

وتستخرج من العلاقة (٣) $\log u = -\frac{1}{2}\int R\,dx = \int \frac{dx}{x}$ أو $u = x$

لنجري الآن تغيير التابع المعرف بالعلاقة $y = xz$ فيكون :

$$y' = xz' + z \quad , \quad y'' = xz'' + 2z'$$

وتأخذ عندها المعادلة المفروضة (١) الشكل الخطي ذا الامثال الثابتة :

$$z'' + z = e^x$$

إن الحل العام لهذه المعادلة هو .

$$z = \frac{y}{x} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$$

ومنه
$$y = x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2}xe^x$$

٣٩٢ - حل المعادلة التفاضلية : $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x - 1 \qquad (1)$

لنحسب قيمة التركيب :

$$S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4x^2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{-3}{4x^2}$$

ثم لنحسب u من العلاقة : $\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} R\, d x$ فنجد

$$\log u = -\frac{1}{2} \times -3 \int \frac{dx}{x} = \frac{3}{2} \log x , \qquad u = x^{\frac{3}{2}}$$

لنجري بعد ذلك تغيير التابع المعرف بالعلاقة $y = z x^{\frac{3}{2}}$ فنجد :

$$y' = z' x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} z x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad y'' - z'' x^{\frac{3}{2}} + 3 z' x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} z x^{-\frac{1}{2}}$$

إذا حملنا هذه القيم في المعادلة (١) فاننا نجد :

$$x^{\frac{3}{2}} z'' - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} z = 2 x - 1$$

وإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بـ $x^{\frac{1}{2}}$ فاننا نحصل على معادلة كوشي :

$$x^2 z'' - \frac{3}{4} z = (2 x - 1) \sqrt{x} \qquad (2)$$

لحل هذه المعادلة نغير المتحول حسب العلاقة $x = e^t$ فنجد :

$$\frac{c z}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dz}{dt} \quad , \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right)$$

وتأخذ المعادلة (٢) ، بعد أن نضع فيها هذه القيم ، الشكل :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - \frac{3}{4} z = (2 x - 1) \sqrt{x}$$

إن الحل العام للمعادلة بدون طرف ثان هو :

$$z_1 = c_1 e^{-\frac{1}{2} t} + c_2 e^{-\frac{3}{2} t}$$

ونجد بطريقة تحويل الثوابت الحل الخاص للمعادلة التامة :

$$z_2 = t e^{\frac{3}{2} t} + e^{\frac{1}{2} t}$$

ويكون اخيراً الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + x^3 \log x + x^2$$

٣٩٣ - $y'' - (1 + 4e^x) y' + 3e^{2x} y = e^{2(x+e^x)}$

لحل هذه المعادلة نتبـع الطرق التالية :

الطريقة الاولى : نحل المعادلة بدون طرف ثان على أنها متجانسة بالنسبة للتابـع y ومشتقاته ونفرض :

$$y' = zy \quad , \quad y'' = z'y + zy' = y(z' + z^2)$$

فنأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$z' + z^2 - (1 + 4e^x) z + 3e^{2x} = 0$$

وهي معادلة من نوع ريكاتي تقبل الحل الخاص e^x . لحلهـا نبدل التابـع حسب العلاقة $z = t + e^x$

فتأخذ المعادلة المفروضة الشكل التالي :

$$t' + t^2 - t(1 + 2e^x) = 0$$

وهي معادلة من نوع بيرنوئي يمكن كتابتها بالشكل :

$$-\frac{t'}{t^2} + \frac{1 + 2e^x}{t} = 1$$

واذا فرضنا $\eta = \frac{1}{t}$ فانها تأخذ الشكل الخطي :

$$\eta' + (1 + 2e^x)\eta = 1$$

حلها العام

$$\eta = \frac{1}{2} e^{-x} + \lambda e^{-x - 2e^x}$$

$$z = t + e^x = \frac{1}{\eta} + e^x = \frac{2e^x}{1 + 2\lambda e^{-2x}} + e^x$$

ومنه :

$$\frac{y'}{y} = \frac{3 + 2\lambda e^{-2e^x}}{1 + 2\lambda e^{-2e^x}} e^x$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{-4\lambda e^{-2e^x}e^x dx}{1+2\lambda e^{-2e^x}}+\frac{3+6\lambda e^{-2e^x}}{1+2\lambda e^{-2e^x}}e^x dx$$

$$\log y=\log(1+2\lambda e^{-2e^x})+3e^x+\log\mu$$

ومنه $y=\mu e^{3e^x}(1+2\lambda e^{-2e^x})=\mu e^{3e^x}+2\mu\lambda e^{e^x}$

إذا فرضنا $c_1=2\mu\lambda$ ، $c_2=\mu$ يكون :

$$y=c_1 e^{e^x}+c_2 e^{3e^x}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة المفروضة بدون طرف ثان ولايجاد الحل العام نطبق طريقة تحويل الثوابت الاختياريةفنحصل على المعادلتين الجبريتين الخطيتين بالنسبة لـ c_1' ، c_2' :

$$c_1'+c_2' e^{2e^x}=0$$

$$c_1'+3c_2' e^{2e^x}=e^x\cdot e^{2e^x}$$

ومنه $c_2=\frac{1}{2}\int e^x\cdot e^{-e^x}dx=\frac{-1}{2}e^{-e^x}+\lambda_2$

$$c_1=\frac{-1}{2}\int e^x e^{e^x}dx=\frac{-1}{2}e^{-e^x}+\lambda_1$$

ويكون الحل العام للمعادلة المفروضة .

$$y=e^{e^x}\left(-\frac{1}{2}e^{e^x}+\lambda_1\right)+e^{3e^x}\left(\frac{-1}{2}e^{-e^x}+\lambda_2\right)$$

$$y=\lambda_1 e^{e^x}+\lambda_2 e^{3e^x}-e^{3e^x}$$

الطريقة الثانية : نلاحظ أن $R=(1+4e^x)$ ، $S=3e^{2x}$

إذا شكلنا التركيب $S-\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}$ فان قيمة هذا التركيب لن تكون مساوية لعدد ثابت أو لحد من الشكل A/x^2 لذا نفرض :

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{S}{a^2}} = \sqrt{\frac{3e^{2x}}{3}} = e^x$$

حيث أعتبرنا $3 = a^2$ ثم نحسب التركيب

$$\frac{\frac{d^2t}{dx^2} + R\frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} = \frac{e^x - (1 + 4e^x)}{e^{2x}} = -4 = A$$

بما أن هذا التركيب يساوي مقداراً ثابتاً فانه لو اتخذنا متحولاً جديداً t معرفاً بالعلاقة $t = e^x$ فان المعادلة المفروضة ستصبح ذات امثال ثابتة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{2x} + \frac{dy}{dt}e^x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}e^{2x} + \frac{dy}{dt}e^x - (1 + 4e^x)\frac{dy}{dt}e^x + 3e^{2x}y = e^{2(x+e^x)}$$

وبعد الاختصار على e^{2x} تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{2t}$$

وهي معادلة خطية ذات امثال ثابتة .

الحل العام للمعادلة بلا طرف ثان هو :

$$y_1 = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

ويبرهن بسهولة ان للمعادلة التامة الحل الخاص e^{2t} – ونجد من جديد الحل العام للمعادلة المفروضة :

$$y = c_1 e^{e^x} + c_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}$$

تمارين للحل

حل المعادلات التفاضلية التالية وتأكد من الاجوبة المرافقة :

٣٩٤ – $z'' - 13z' + 12z = 36$ ج : $z = 3 + A e^{x} + B e^{12x}$

٣٩٥ – $y'' + 4y = -10 \sin 3x$

ج : $y = 2 \sin 3x + A \cos 2x + B \sin 2x$

٣٩٦ – $z'' + 13z' + 42z = 112 e^{x}$

ج : $z = 2e^{x} + c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-7x}$

٣٩٧ – $\dfrac{d^2 s}{dt^2} + 9s = 60 e^{-t}$

ج : $s = 6 e^{-t} + c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$

٣٩٨ – $\dfrac{d^2 \varrho}{d\Theta^2} + \varrho = 12 \sin 2\Theta$

ج : $\varrho = -4 \sin 2\Theta + c_1 \cos \Theta + c_2 \sin \Theta$

٣٩٩ – $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{4\,dz}{dt} + 3z = 8 \cos t - 6 \sin t$

ج : $z = 2 \cos t + \sin t + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

٤٠٠ – $y'' + 5y' + 6y = 12$ ج : $y = 2 + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

٤٠١ – $z'' + 2z' + 5z = 80 e^{3x}$

ج : $z = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 4 e^{3x}$

٤٠٢ – $z'' + 2z' + 37z = 30 e^{7x}$

ج : $z = 0{,}3 e^{7x} + e^{-x} (c_1 \cos 6x + c_2 \sin 6x)$

٤٠٣ – $z'' + 9z = 40 \sin 5x$

ج : $z = -\dfrac{5}{2} \sin 5x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

٤٠٤ — $y'' - 8y' - 9y = 40 \sin 5x$

ج : $y = \frac{25}{29} \cos 5x - \frac{10}{29} \sin 5x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{9x}$

٤٠٥ — $z'' + 8z' + 25z = 50$

ج : $z = 2 + e^{-4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

٤٠٦ — $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

ج : $y = \frac{1}{2} e^{3x}(x^2 - 2x + 2) + c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

٤٠٧ — $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + x e^{-x}$

ج : $y = -e^{-x} \cos x + \frac{1}{6} x^3 e^{-x} + e^{-x}(c_1 + c_2 x)$

٤٠٨ — $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

ج : $y = \frac{1}{74}(5 \sin x + 7 \cos x) + c_1 e^{x} + e_2 e^{6x}$

٤٠٩ — $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x} + e^{x}$

ج : $y = \frac{1}{2} x^2 e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + e^{x}(c_1 + c_2 x)$

٤١٠ — $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$

ج : $y = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x + A \cos x + B \sin x$

٤١١ — $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + x e^{-x}$

ج : $y = \frac{1}{2} x e^{-x} \sin x + x e^{-x} + e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$

٤١٢ — $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = (x^2 + 2x + 1)e^{2x}$

ج : $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x}(x+1)^2 + x e^{2x}$

٤١٣ — $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 10y = 0$ ج : $y = \frac{c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}{\cos x}$

حل المعادلات التفاضلية التالية بعد تغيير أحد المتحولين :

٤١٤ — $y'' - 4xy' + 4x^2 y = x e^{x^2}$

ج : $y = e^{x^2}\left(c_1 \cos \sqrt{2}\,x + c_2 \sin \sqrt{2}\,x \right) + \frac{1}{2} x e^{x^2}$

٤١٥ – $y'' - y' \operatorname{cotg} x - y \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$

ج : $y = c_1 e^{-\cos x} + c_2 e^{\cos x} - \cos x$

٤١٦ – $y'' + \left(4x - \frac{1}{x} \right) y' + 4x^2 y = 3x e^{-x^2}$

ج : $y = c_1 e^{-x^2} + c_2 x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}$

٤١٧ – $x^2 y'' - x(2x + 3) y' + (x^2 + 3x + 3) y = (6 - x^2) e^x$

ج : $y = c_1 x^3 e^x + c_2 x e^x + e^x (x^2 + 2)$

٤١٨ – $4x^2 y'' + 4x^3 y' + (x^2 + 1)^2 y = 0$

ج : $y = \sqrt{x}\, e^{-\frac{1}{4}x^2} (c_1 + c_2 \log x)$

٤١٩ – $x^2 y'' + (x - 4x^2) y' + (1 - 2x + 4x^2) y = (x^2 - x + 1) e^x$

ج : $y = e^{2x} (c_1 \cos \log x + c_2 \sin \log x) + e^x$

٤٢٠ – $x y'' - y' + 4x^3 y = 0$ ج : $y = c_1 \sin x^2 + c^2 \cos x^2$

٤٢١ – $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = \frac{1 + x}{x}$

ج : $y = c_1 \cos \frac{1}{x} + c_2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1 + x}{x}$

٤٢٢ – $x^8 y'' + 4x^7 y' + y = \frac{1}{x3}$

ج : $y = c_1 \cos \frac{1}{3x^3} + c_2 \sin \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}$