الفصل الرابع
علم الهندسة عند الهنود

دور الهنود في علم الهندسة محدود للغاية إذا ما قورن بإنتاج علماء اليونان . ولكن هورد ايفز حاول أن يجمع أعمالهم في هذا المجال في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» وذكر الآتي :

١ - استخدم الهنود نظرية مثلث قائم الزاوية ، وذلك في إيجاد مربع يساوي مساحته مربعين آخرين ، أي أن الهنود القدماء استطاعوا إنشاء مربع مساحته = س^{٢} + ص^{٢} ، وآخر س^{٢} - ص^{٢} ، حيث إن س ، ص طولا ضلعين لمربعين معلومين .

٢ - استطاعوا أيضاً إنشاء مربع يكافئ مستطيلاً معلوماً .

٣ - عرفوا حلولاً لمسألة تربيع الدائرة : فأخذوا $م = \frac{(\sqrt{٢} + ٢)}{٣}$ ن ، والعلاقة $ن = \frac{١٣م}{١٥}$ ، حيث إن «م» طول قطر الدائرة ، «ن» طول ضلع المربع المطلوب .

٤ - قدروا قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد «٢» .

$$\text{إذن } \sqrt{٢} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{(٣)(٤)} - \frac{١}{(٣)(٤)(٣٤)}$$

٥ - ولم يكتف كل من براهما قوبتا (القرن السابع الميلادي) وماهافيرا (أواخر القرن التاسع الميلادي) بالقانون الذي عرفه هيرون الإسكندري في إيجاد مساحة مثلث بدلالة طول أضلاعه الثلاثة ، بل طوروا قانوناً لإيجاد

مساحة الشكل الرباعي الدائري الذي طول أضلاعه أ ، ب ، جـ ، د .
وكذلك ح = نصف المحيط .

إذن م^{٢} = (ح − أ) (ح − ب) (ح − جـ) (ح − د) .

٦ – وقدم كل من براهما قوبتا وماهافيرا قانوناً لإيجاد مساحة أي شكل رباعي وهو :

م^{٢} = (ح − أ) (ح − ب) (ح − جـ) (ح − د) − أ ب جـ د جتا^{٢} $\left(\frac{\hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}}}{٢}\right)$

حيث إن أ ، ب ، جـ ، د أضلاع الشكل الرباعي ، ح نصف محيطه ، $\hat{\text{س}}$ ، $\hat{\text{ص}}$ زاويتا الرأس المتقابلتان في الشكل الرباعي .

٧ – نظرية براهما قوبتا الخاصة في إيجاد قطري الشكل الرباعي الدائري بدلالة أطوال أضلاعه أ ، ب ، جـ ، د :

$$\text{ق}_{١}^{٢} = \frac{(\text{أ ب} + \text{جـ د})(\text{أ جـ} + \text{ب د})}{\text{أ د} + \text{ب جـ}} \quad ، \quad \text{ق}_{٢}^{٢} = \frac{(\text{أ جـ} + \text{ب د})(\text{أ د} + \text{ب جـ})}{\text{أ ب} + \text{جـ د}} \quad ،$$

حيث كل من ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ أطوال القطرين .

٨ – لاحظ براهما قوبتا أنه إذا كان أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢} ، ن^{٢} + ل^{٢} = ع^{٢} ، حيث إن أ ، ب ، جـ ، ن ، ل ، ع أعداد صحيحة موجبة . إذن يكون الشكل الدائري الذي أضلاعه أ ع ، جـ ل ، ب ع ، جـ أ له مساحة حقيقية ، وذا قطرين متعامدين .

٩ – قدر الهنود قيمة النسبة التقريبية ط = ٣ ، ط = $\sqrt{١٠}$

١٠– عرفوا حجم الهرم = $\frac{١}{٢}$ مساحة القاعدة × الارتفاع .

١١– وقدروا حجم الكرة = $(\text{ط})^{\frac{٣}{٢}}$ نق^{٣} ، حيث نق = نصف القطر .

الفصل الخامس
علم الهندسة عند العرب والمسلمين

كان أكثر علماء المسلمين الرياضيين يعتبرون الهندسة هي العلم الوحيد الذي أوصلهم إلى معرفة الفضاء وحقائقه . ويقول الكاتب وليم ديفيد ريف في كتابه «الطريقة التربوية لتدريس علم الهندسة» : «إن علم الهندسة هو ذلك الفرع من فروع الرياضيات الذي يتعامل مع النقطة والخط والسطح والفضاء ، ولو أردنا أن نعطي لعلم الهندسة تعريفاً مختصراً لقلنا : إنه العلم الذي يؤدي إلى دراسة الأشكال من حيث الحجم والمساحة . وهذا سبق وإن قاله وطبقه الأوائل بوضوح متناهٍ .

وحين عَرَّف عبد الرحمن بن خلدون علم الهندسة في كتابه «المقدمة في التاريخ» قال : « . . . النظر في المقادير ، إما المتصلة كالخط والسطح والجسم ، وإما المنفصلة كالأعداد ، وفيما يعرض لها من العوارض الذاتية ، مثل إن كان مثلث من زواياه مثل قائمتين ، ومثل أن كل خطين متوازيين لا يلتقيان في جهة ولو خرجا إلى غير نهاية ، ومثل أن كل خطين متقاطعين فالزاويتان المتقابلتان منهما متساويتان ، ومثل أن أربعة مقادير المتناسبة ضرب الأول في الثالث كضرب الثاني في الرابع» .

وقد اهتم علماء المسلمين بالهندسة اهتماماً كبيراً ، على حين أهملتها معظم الشعوب الأخرى . والخطوة الأولى التي اتخذها علماء المسلمين هي ترجمة كتاب إقليدس في علم الهندسة الذي يسمى باليونانية (Stoicheia) وبالإنجليزية (Elements) وبالعربية كتاب «أصول الهندسة» أو كتاب

«الأركان الهندسية» ، ويحتوي كتاب إقليدس على خمس عشرة مقالة ، منها أربع مقالات في السطوح الهندسية ، ومقالة في المقادير المتناسبة ، وأخرى في نسب السطوح بعضها إلى بعض ، وثلاث مقالات في العدد والتمثيل الهندسي ، ومقالة في المنطق ، وخمس مقالات في المجسمات .

نُقِلَ كتاب إقليدس لأول مرة إلى اللغة العربية في عهد الخليفة العباسي أبي جعفر المنصور ، الذي دامت ولايته ما بين عامي (١٣٦-١٥٧هـ = ٧٥٤-٧٧٥م) . وكان من أشهر المترجمين في العصور الإسلامية لكتاب إقليدس حنين بن إسحاق ، الذي عاش فيما بين (١٩٤-٢٥٩هـ = ٨٠٩-٨٧٣م) وتوفي في بغداد ، وقد ترجم حنين وحده ما يقرب من مائة رسالة من رسائل جالينوس وأرخميدس إلى اللغة السريانية ، وتسعاً وثلاثين رسالة لإقليدس وبطليموس إلى اللغة العربية . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن علماء العرب أولعوا في زمن الخلفاء العباسيين بترجمة الكتب الإغريقية ومن جملتها الهندسة ، فقد أخذوا كتاب إقليدس في الهندسة وترجموه إلى العربية وزادوا على نظرياته . وقد ترجم حنين بن إسحاق هذا الكتاب مع التعديلات الضرورية التي أضافها ، ثم ترجمه كل من ثابت بن قـرة ويوسف بن الحجـاج ، وقد اختصره بعض المؤلفين وشرحه آخرون ، وألف العرب كتباً على نسقه ، وطبقوا المعلومات الهندسية في بناء الجوامع والقصور التي لا زالت آثارها منتشرة في البلدان العربية والبلدان التي حكموها ، والتي تشهد بنبوغهم وعبقريتهم .

يقول جوزيف هفمان في كتابه «تاريخ الرياضيات حتى ١٨٠٠م» : «إن حنين بن إسحاق درس وعلق على جميع مؤلفات إقليدس وأرخميدس كما شرح

المجسطي[1] شرحاً كافياً» ، وكان من المترجمين الكبار كذلك ثابت بن قرة الحراني الذي عاش فيما بين (٢٢١-٢٨٨هـ = ٨٣٥-٩٠٠م) ، وقد ولد بحران بين دجلة والفرات ، وتعرف على الخوارزمي ، وعمل في بغداد في بيت الحكمة ، وكان يحسن اللغات السريانية والعبرية واليونانية ، وقد ترجم منها إلى العربية العديد من الكتب في الهندسة والفلك والطب والمنطق . وقد وضع ثابت كتاباً بحث فيه العلاقة بين الجبر والهندسة ، فخطا بذلك خطوة كبيرة نحو الهندسة التحليلية ، كما أنه حل الكثير من المعادلات التكعيبية بطرق هندسية ، كذلك نهج نهجه ابنه سنان بن ثابت بن قرة الذي توفي سنة (٣٣٢هـ = ٩٤٣م) والذي اشتهر كأبيه في علمي الهندسة والفلك ، وقد قام سنان بترجمة العديد من مؤلفات إقليدس وأرخميدس .

كذلك قام الحجاج بن يوسف بن مطر الذي عاش بين عامي (١٧٠ و٢٢٠هـ = ٧٨٦-٨٣٥م) بالترجمة والتعليق على كتاب «الأصول في الهندسة» لإقليدس مرتين ، الأولى سماه بـ«النقل الهاروني» ، والثانية عرفها بـ«النقل المأموني» . كما ترجم «المجسطي» لبطليموس وعلق عليه وانتقده . ويقول توماس أرنولد ، وألفريد قويلم في كتابهما «التراث الإسلامي» : «إن المسلم المشهور الحجاج بن يوسف ترجم إلى اللغة العربية كتباً يونانية عديدة ، من

---

(١) كلمة «المجسطي» هي الشكل المعرب للكلمة اللاتينية الصورة (Almagest) اليونانية الأصل . يقول حاجي خليفة في كتابه «كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون» : «المجسطي بكسر الميم والجيم وتخفيف الياء كلمة يونانية معناها الترتيب ، أصله ماجستوس لفظ يوناني مذكر معناه «البناء الأكبر» ومؤنثه «ماجستي» ، وفي موضع آخر من الكتاب نفسه يقول حاجي خليفة : وأما المجسطي فمعناه الأعظم في لغتهم . . .» . من هذا نخلص إلى أن لفظ «المجسطي» الذي أطلقه العرب على الكتاب الذي وضعه بطليموس في علم الفلك في (حوالى القرن الثاني للميلاد) هو تسمية معربة للكلمة الإغريقية (Sigma) وتنطق (Megiste) التي تعني العظمى .

بينها الكتب الستة في علم الهندسة لإقليدس وبعض مؤلفات اليونان في الفلك، كما تطرق علماء المسلمين إلى قضايا وبحوث جديدة لم يتناولها إقليدس. وبقيت أوروبا تستعمل في جامعاتها هندسة إقليدس المترجمة عن اللغة العربية حتى القرن العاشر الهجري (السادس عشر الميلادي).

كتب الخوارزمي (١٦٤-٢٣٦هـ = ٧٨٠-٨٥٠م) كتاباً في «الجبر والمقابلة»، وكتاباً في حساب اليد، وآخر في الحساب الهندي، وله أيضاً جداول فلكية، وقد استطاع الخوارزمي استعمال بعض الأفكار الهندسية في الجبر، حيث برهن على الكثير من نظرياته بالطريقة الهندسية والتحليلية، ولكنه أعطى أهمية كبيرة للطريقة الهندسية. ولقد قال المؤرخ فلورين كاجوري في كتابه «تاريخ الرياضيات»: «إن الخوارزمي عالم هندسي، وابتكاره لعلم الجبر ساعد على تطوير علم الهندسة، ولقد حسب مساحة المثلث ومتوازي الأضلاع والدائرة، وله باب خاص في علم الجبر سماه «باب المساحات». كما ذكر الخوارزمي في كتابه «الجبر والمقابلة» كيفية إيجاد نسبة محيط الدائرة إلى قطرها وأعطى لها ثلاث قيم هي:

$$\frac{٢٢}{٧}\text{،}\ \sqrt{١٠}\text{،}\ \frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$$

ويمكن المقارنة بين هذه القيم والقيمة الصحيحة للنسبة التقريبية على الوجه التالي:

القيمة الصحيحة «ط»	= ٣,١٤١٥٩٢٧
القيمة ٢٢/٧	= ٣,١٤٢٨٥٧١
القيمة $\sqrt{١٠}$	= ٣,١٦٢٢٧٧٧
القيمة $\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$	= ٣,١٤١٦

دراسة مقارنة لقيم النسبة التقريبية (ط أو π) كما حصل عليها الإغريق والهنود والمسلمون .

(القيمة الصحيحة ط أو π = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣)

	المصـدر والتاريـخ	قيمة النسبة التقريبية ط أو π	ملاحظـات
الإغريق	أرخميدس Archimeds (٢٢٥ قبل الميلاد)	$٣\frac{١}{٧}$ $٣\frac{١٠}{٧١}$	حصل عليها من مضلع منتظم ذى ٩٦ ضلعاً
الهنود	أريابهاتا Aryabhata (٥١٠ ميلادية)	٣,١٤١٦	من كتاب «أريابهاتا» «Aryabhatiya»
الهنود	براهما جبتا Brahmagupat (٦٢٨ ميلادية)	$\sqrt{١٠}$ = (٣,١٦٢٣)	من كتاب : – «Brahma – Sphuta– Siddhanta»
المسلمون	محمد بن موسى الخوارزمي (٨٣٠ ميلادية)	$٣\frac{١}{٧}$ = (٣,١٤١٩) $\sqrt{١٠}$ = (٣,١٦٢٣)	من كتاب «الجبر والمقابلة»
المسلمون		$\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$ = (٣,١٤١٦)	القيمة التي يستخدمها علماء الهيئة
المسلمون	أبو الريحان البيروني (٩٧٣ – ١٠٥١م)	٣,١٤١٧٤٦٦٠	من كتاب «القانون المسعودي» الفصل الخامس من المقالة الثالثة .
المسلمون	غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي (المتوفى عام ١٤٣٦م)	٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٨٧٣٢ (من «الرسالة المحيطة» للكاشي)	

ومن الواضح أن القيمة الأخيرة هي أقرب القيم ، وهي صحيحة إلى رابع خانة عشرية ، هذا ويبين الجدول السابق دراسة مقارنة لقيم النسبة التقريبية كما حصل عليها الإغريق والهنود والمسلمون .

أما أبو علي الحسين بن عبد الله بن سينا الملقب بالشيخ الرئيس ، والذي عاش فيما بين عامي (٣٧١-٤٢٨هـ = ٩٨٠-١٠٣٦م) ، وقد حرف الأوروبيون اسمه إلى (Avicenna) ، فقد اشتهر بصفة رئيسية بأبحاثه في علم الفلسفة والطب ، وقليل من يعرف أنه اهتم كذلك بالمنطق والرياضيات والفلك ، فقد ترجم ابن سينا كتب إقليدس في الهندسة وعلق عليها ، وبلغت مؤلفات الشيخ الرئيس مائتين وستة وسبعين مؤلفاً من أهمها كتاب «الشفاء» ويقع في ثمانية وعشرين مجلداً ، وعن ابن سينا يقول جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «إن ابن سينا ظاهرة فكرية عظيمة ، وربما لا تجد من يساويه في ذكائه أو في وفرة إنتاجه الفكري» .

ومن الذين ساهموا في هذا المجال أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني الذي عاش فيما بين عامي (٣٦٢-٤٤٠هـ = ٩٧٣-١٠٥١م) . وللبيروني عدة كتب يصل عددها إلى حوالى ٣٠٠ مؤلف ، بين كتاب ورسالة ، وللأسف فإن معظم هذه الكتب الثمينة قد فقدت ، ولم يبق من مؤلفات البيروني سوى ٣٠ كتاباً احتوت على قدر كبير من أبحاثه في علم الهندسة ، نذكر منها على سبيل المثال :

١ - «القانون المسعودي في الهيئة والنجوم» ، وهو كتاب في الفلك طبق فيه كثيراً من النظريات الهندسية .

٢ - «التفهيم لأوائل صناعة التنجيم» ، وهو كتاب يتعلق بالفلك أيضاً .

٣ - «تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن» .

٤ - «استخراج الأوتار في الدائرة بخواص الخط المنحني فيها» .

كذلك ألف الحسن بن الهيثم كتاباً جمع فيه بين هندسة إقليدس وأبولونيوس ، وطبق على هذا الكتاب علم المنطق ، فصار لهذا الكتاب دور عظيم خلال العصور كلها . ويذكر سيديو في كتابه «تاريخ العرب العام» : «أن ابن الهيثم وضع كتاباً فاخراً جمع فيه بين القواعد المفروضة والبراهين الاستقرائية لإقليدس ، والمحال المستوية السطوح لأبولونيوس» .

يقول جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» : «إن ابن سينا أعظم علماء الإسلام ، أما ابن الهيثم فقد سخر الهندسة بنوعيها المستوية والمجسمة في بحوثه العلمية» ويقول جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية - نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة» : «سخر العرب ولا سيما ابن الهيثم الهندسة بنوعيها المستوية والمجسمة في بحوث الضوء وتعيين نقطة الانعكاس في أحوال المرايا الكروية والأسطوانية والمخروطية ، المحدبة منها والمقعرة . وابتكروا لذلك الحلول العامة وبلغوا فيها الذروة» .

عاش أبو علي الحسن بن الهيثم - الذي حرف اسمه الأوروبيون إلى (Al-Hazen) - فيما بين عامي (٣٥٤ و٤٣٠هـ = ٩٦٥-١٠٣٩م) . وقد ولد ابن الهيثم في البصرة ونشأ فيها ودرس العلوم المعروفة في عصره مثل الفلسفة والرياضيات والطب والفيزياء ، ثم هاجر إلى مصر في عهد الخليفة الفاطمي الحاكم بأمر الله ، ومن أشهر كتب ابن الهيثم كتاب في البصريات[(١)] حيث استعمل الهندسة في العديد من المسائل التي عالجها مثل تعيين نقطة الانعكاس في المرايا الكروية والأسطوانية والمخروطية المحدبة منها والمقعرة . كما ألف كتاباً مشهوراً في الهندسة بعنوان «القواعد المفروضة والبراهين الاستقرائية لإقليدس» ، وآخر في المحالات المستوية السطوح لأبولونيوس ، كذلك أدخل ابن الهيثم المنطق على علم الهندسة ، وذلك في

(١) هو كتاب «المناظر» .

كتاب جمع فيه الأصول الهندسية والعددية من كتاب إقليدس وأبولونيوس . وقد علق ابن الهيثم على الكثير من النظريات ، وبرهن على معظمها ببراهين مختلفة عن براهين إقليدس وأبولونيوس .

يصف ابن القفطي الحسن بن الهيثم في كتابه «إخبار العلماء بأخبار الحكماء» . فيقول : «إن ابن الهيثم صاحب التصانيف والتآليف في علم الهندسة . وكان عالماً بهذا الشأن ، متقناً له ، متفنناً فيه ، قيماً بغوامضه ومعانيه ، مشاركاً في علوم الأوائل ، أخذ عنه الناس واستفادوا» .

وقد اشتهر أبو محمد موفق الدين البغدادي في بغداد الذي عاش فيما بين عامي (٥٥٧-٦١٩هـ = ١١٦٢-١٢٢٣م) بتضلعه في اللغة العربية والفقه ، وأيضاً بدراسته مؤلفات أرسطو ، وتفوقه الملحوظ في علم الطب ، وقد ألف رسالة موضوعها تقسيم أي مستقيم إلى أقسام متساوية ومتناسبة مع أعداد مفروضة ، وهي اثنتان وعشرون قضية ، سبع في المثلث ، وتسع في المربع ، وست في المخمس .

وعاش صاحب الشهرة العلمية نصير الدين الطوسي فيما بين عامي (٥٩٧-٦٧٢هـ = ١٢٠١-١٢٧٣م) ، وكان رياضياً فلكياً ، أشرف على بناء مرصد مراغة الذي اشتهر بآلاته الدقيقة . وأشهر كتب الطوسي في الرياضيات كتاب «شكل القطاع» ، وكتاب في «المثلثات المستوية والكروية» ، وكتاب «تحرير أصول إقليدس» ، وقد حاول الطوسي أن يبرهن على البديهية الخامسة من بديهيات إقليدس (الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس) والتي لم يستطع إقليدس نفسه أن يبرهنها ويعرضها على هيئة نظرية . وبالرغم من أن محاولة الطوسي لا تقبل اليوم كبرهان للبديهية الخامسة (فرضية التوازي) إلا أن ذلك كان حافزاً كبيراً أو بالأصح مفتاحاً لدى بعض الرياضيين الأوروبيين

في العصر الحديث لوضع الهندسة غير الإقليدية . وبهذا نرى أن علم الهندسة بناء شامخ بنى أساسه وطبقاته السفلى علماء المسلمين وزاد عليه علماء الغرب والمعاصرون . ولذلك فأعمال الخوارزمي وابن قرة وابن الهيثم والبيروني والطوسي هي أساس العلوم الهندسية الحديثة التي ندرسها اليوم في جامعات العالم .

وجدير بالذكر أن علماء المسلمين قد قسموا الهندسة إلى قسمين بقيا يتداولان عبر التاريخ وهما :

١ - هندسة عقلية ، وهي التي تعرف وتفهم - أو التي تسمى الهندسة النظرية .

٢ - الهندسة الحسية ، وهي التي ترى بالعين ، وتدرك باللمس ، أي : الهندسة التطبيقية .

والجدير بالذكر أن علماء اليونان اهتموا بالنوع الأول اهتماماً كبيراً ، فلم يزد عليه علماء المسلمين إلا القليل ، ولكنهم حفظوه وعلقوا عليه وطوروه . ولقد تعلم الرهبان مثل أديلارد المنتمي إلى باث (Adelard of Bath) في مدارس المسلمين بغرناطة وقرطبة وإشبيلية ، وبهذا تلقى الأوروبيون الهندسة اليونانية على أيدي المسلمين ، لا عن أهلهم اليونان ، ثم نقلوها إلى لغاتهم المختلفة ، وبقيت تدرس في جامعاتهم حتى مطلع القرن العاشر الهجري (السادس عشر الميلادي) . ويقول أنور الرفاعي في كتابه «الإسلام في حضارته ونظمه» : «لقد أطلق العرب على الهندسة العملية اسم «الهندسة الحسية» ، وأطلقوا على الهندسة النظرية اسم «الهندسة العقلية» ، وطبقوا النظريات الهندسية في الحياة العملية ، ولم يقف العرب عند دراسة هندسة إقليدس ، بل إنهم ألفوا فيها تآليف جديدة أدهشت العقول» .

وذكر ياسين خليل في كتابه «التراث العلمي العربي» عند الحديث عن الأسباب التي دفعت علماء العرب إلى التوسع والبحث في علم الهندسة ، ما يلي :

١ – شدهم على المستوى النظري ما وجدوه من تلازم منطقي ، وتتابع محكم بين القضايا الهندسية ، فمن بديهيات ومصادرات يستنتج المرء قضايا هندسية جديرة بالاستدلال ، فيصل وثوقه بالقضايا إلى درجة اليقين استناداً إلى افتراضه صدق البديهيات والمصادرات التي من شروطها الوضوح والصدق .

٢ – وجد علماء العرب أن معظم العلوم الطبيعية تفتقر إلى الهندسة ، فعلم المناظر (البصريات) يعتمد على الخواص الهندسية لتحليل الشعاعات وانعطافها وانكسارها وانعكاسها عن المرايا المستوية والمقعرة والمحدبة والأسطوانية وغيرها . كما استخدم علماء العرب الهندسة على نطاق واسع في علم الفلك وفي علم الحيل (الوسائل الميكانيكية) .

٣ – على صعيد علاقة الهندسة بالحياة اليومية نجد اهتمام العلماء العرب منصباً على بحث مساحات السطوح والحجوم المختلفة ، وطرق استخراجها ، بغية استخدامها في مجالات الصناعة والعمران والفنون والبناء .

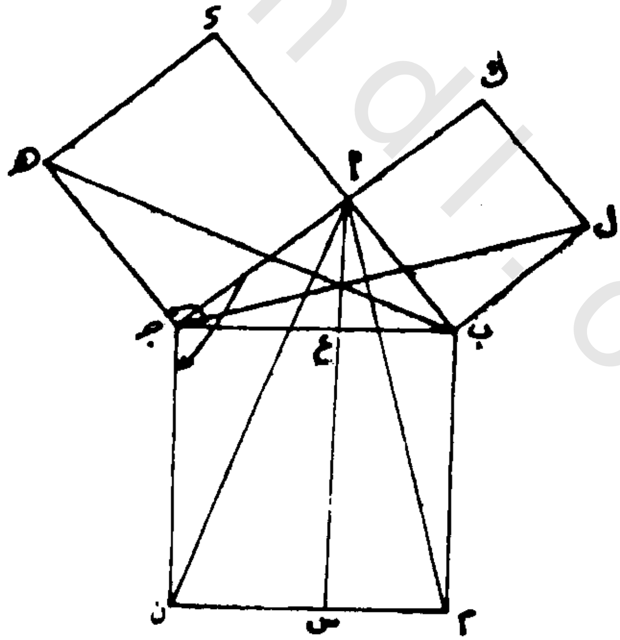
٤ – للهندسة علة وثيقة بعلم الجبر (الذي يعتبر ذا ارتباط قوي بالحضارة العربية) وقد استخدم علماء الجبر الأشكال الهندسية في الحلول الجبرية ، واستخراج المجاهيل ، وعرض المسائل الجبرية هندسياً وبالعكس .

وقد ركز علماء المسلمين على الهندسة الحية أو التطبيقية ، ويتجلى هذا بوضوح في بعض مؤلفات ابن الهيثم ، كمقالته «في استخراج سمت القبلة» ، ومقالته «فيما تدعو إليه حاجة الأمور الشرعية من الأمور الهندسية» ، ومقالته «في استخراج ما بين البلدين في البعد بجهة الأمور الهندسية» ، وكتاب «طابق فيه بين الأبنية والحفور بجميع الأشكال الهندسية» .

ويمكن القول : إن علماء المسلمين لهم مؤلفات عديدة في المساحات ، وتحليل المسائل الهندسية واستخراج المسائل الحسابية بطريقة التحليل الهندسي وتقدير العدد . ومما يلفت النظر في إنتاج علماء المسلمين أنه كان يسود بعض النظريات الهندسية والجبرية مسحة علمية واتجاه لتطبيق النظريات الهندسية والجبرية والحسابية على الأغراض العلمية كما تقدم ذكره . ومن المتفق عليه بين علماء الرياضيات المعاصرين أن علماء المسلمين وضعوا التمارين وحلوا المسائل العويصة في علم الهندسة ، وفهموا فهماً جيداً ما كتبه اليونان في جميع فروع الهندسة .

تعميم نظرية مثلث قائم لأي مثلث :

قام ثابت بن قرة (عام ٢٧٦هـ = ٨٩٠م) بتنقيح برهان فيثاغورث (٥٨٤-٤٩٥ قبل الميلاد) بأن أدخل عليه بعض التعديلات كالآتي :



البرهان :

وصل ب هـ ، أ ن ، رسم أ ع س // ب م ويقطع ب جـ في نقطة ع

Δ هـ جـ ب يطابق Δ أ جـ ن حيث إن :

هـ جـ^ ب = أ جـ^ ن

ب جـ = جـ ن } (١)

جـ هـ = جـ أ

وبما أن مساحة المستطيل ع س ن جـ = ٢ مساحة Δ أ جـ ن حيث إن

القاعدة للمثلث والمستطيل جـ ن ، جـ ن // أ س } (٢)

كذلك مساحة المربع د أ جـ هـ = ٢ مساحة Δ هـ جـ ب

حيث إن القاعدة المشتركة للمثلث والمربع هي جـ هـ ، هـ جـ // د ب } (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) مساحة المستطيل ع س ن جـ = مساحة المربع

د أ جـ هـ أي أن $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = ب جـ × ع جـ (٤)

وبالمثل Δ جـ ل ب يطابق Δ م أ ب حيث إن :

ل ب^ جـ = أ ب^ م

ل ب = أ ب } (٥)

ب جـ = ب م

وبما أن مساحة Δ أ ب م = $\frac{١}{٢}$ مساحة المستطيل ب م س ع

حيث إن القاعدة المشتركة م ب ، أ س // ب م } (٦)

وكذلك مساحة Δ جـ ل ب = $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع ك ل ب أ

حيث إن القاعدة المشتركة ل ب ، ك جـ // ل ب (٧)

من (٥) ، (٦) ، (٧) مساحة المربع ك ل ب أ = مساحة المستطيل ب م س ع أي أن $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ = ب جـ × ب ع (٨)

لذا من (٤) ، (٨) مساحة المربع ك ل ب أ + مساحة المربع د أ جـ هـ = مساحة المستطيل ع س ن جـ + مساحة المستطيل ب م س ع .

أي أن $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ = ب جـ × ع جـ + ب جـ × ع ب $\Longleftarrow$

$\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ = $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$

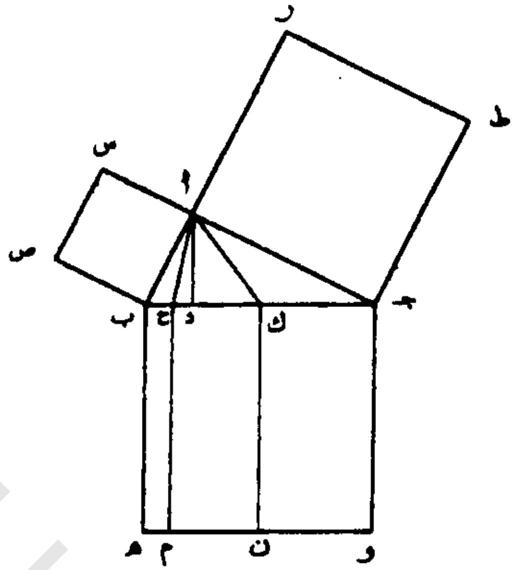
إذن مساحة المربع ب م ن جـ = مجموع مساحة المربعين ك ل ب أ + د أ جـ هـ .

ولم يقف ثابت عند هذا الحد بل ابتكر ما نسميه نظرية جديدة ، وهي لأي مثلث مختلف الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = ب جـ (ب جـ + ك ح) وقد وردت هذه النظرية في مخطوط رقم ٥ الموجود في مكتبة أيا صوفيا في تركيا والتي حققها أ . سهيلي ، وذكرها كل من كارل بوير في كتابه «تاريخ الرياضيات» وهورد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» : «إن ثابت ابن قرة عمم نظرية فيثاغورث لأي مثلث أ ب جـ شرط أن نقطتي ك ، ح تقعان على الضلع ب جـ ، وكذلك أ $\hat{\text{ح}}$ ب = أ $\hat{\text{ك}}$ جـ = $\hat{\text{أ}}$ ثم من ذلك استنتج أن :

(١) $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ − ب جـ × ك ح الزاوية منفرجة ($\hat{\text{أ}}$) .

(٢) $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ + ب جـ × ك ح زاوية $\hat{\text{أ}}$ حادة .

(٣) $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ زاوية $\hat{\text{أ}}$ قائمة .



البرهان :

رسم من رأس المثلث المستقيمات أ ح ، أ ك ، أ د ، حيث إن :

أ $\hat{ح}$ ب = أ $\hat{ك}$ جـ = أ .

اعتبر ثلاث حالات :

الحالة الأولى :

إذا كانت $\hat{أ}$ منفرجة .

ملحوظ أن مساحة المربع أ ب ص س = مساحة المستطيل ح م هـ ب .

أي أن $\overline{أب}^{2}$ = ب هـ × ب ح

وأيضاً مساحة المربع أ جـ ط ر = مساحة المستطيل ك ن و جـ .

أي أن $\overline{أجـ}^{2}$ = و جـ × ك جـ

وحيث إن ب هـ = و جـ = و هـ = جـ ب = ك ن

إذن $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = ب هـ × ب ح + و جـ × ك جـ

= ب جـ × ب ح + ب جـ × ك جـ

= ب جـ (ب ح + ك جـ) = ب جـ {ب جـ − (جـ ك + ك ح) + ك جـ}

= ب جـ (ب جـ − جـ ك − ك ح + ك حـ) = $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ − ب جـ × ك ح

لذلك مساحة المربع أ جـ ط ر + مساحة المربع أ ب ص س = مساحة المربع جـ ب هـ و − مساحة المستطيل ك ن م ح .

الحالة الثانية :

إذا كانت $\hat{\text{أ}}$ حادة .

اعكس مكان نقطتي ك ، ح واعتبر أن أ د عمودي على ب جـ .

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{\text{أ ب}}^{٢} = \text{ب جـ × ب ك} \\ \overline{\text{أ جـ}}^{٢} = \text{ب جـ × جـ ح}\end{array}\right. \Longleftarrow \overline{\text{أ ب}}^{٢} + \overline{\text{أ جـ}}^{٢} = \text{ب جـ (ب ك + جـ ح)}$$

= ب جـ (ب ح + ح ك + جـ ك + ك ح)

= ب جـ [(ب ح + ح ك + ك جـ) + ك ح]

= ب جـ (ب جـ + ك ح)

= $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ + ب جـ × ك ح

∴ $\overline{\text{أ ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{أ جـ}}^{٢}$ = $\overline{\text{ب جـ}}^{٢}$ + مساحة المستطيل ك ن م ح .

الحالة الثالثة :

إذا كانت زاوية $\hat{\text{أ}}$ قائمة .

ملحوظ أن نقطتي ك ، ح تنطبقان على نقطة د .

لذا Δ ب أ جـ يشابه Δ ب د أ $\Lleftarrow$ $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

$\therefore\ \overline{\text{أ ب}}^{\,٢} = \text{ب د} \times \text{جـ ب}$ (١)

وبالمثل Δ جـ أ ب يشابه Δ جـ د أ

$$\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$\overline{\text{أ جـ}}^{\,٢} = \text{ب جـ} \times \text{جـ د}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن $\overline{\text{أ ب}}^{\,٢} + \overline{\text{أ جـ}}^{\,٢} = \text{جـ ب} \times \text{ب د} + \text{جـ ب} \times \text{جـ د}$.

$$\overline{\text{أ ب}}^{\,٢} + \overline{\text{أ جـ}}^{\,٢} = \text{جـ ب}\ (\text{ب د} + \text{جـ د})$$

$$\overline{\text{أ ب}}^{\,٢} + \overline{\text{أ جـ}}^{\,٢} = \overline{\text{جـ ب}}^{\,٢}$$

قانون الكرخي لمساحة الشكل الرباعي :

من المعروف أن هيرون الإسكندري الذي عاش في القرن الأول للميلاد قد توصل إلى تعيين مساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه على الوجه التالي :

$$\text{المساحة} = \sqrt{\text{ح}\ (\text{ح} - \text{أ})\ (\text{ح} - \text{ب})\ (\text{ح} - \text{جـ})}$$

حيث ح = نصف محيط المثلث ، أ ، ب ، جـ أطوال أضلاع المثلث .

وقد أدخل أبو بكر محمد بن الحسين الكرخي (المتوفى عام ٤٢١هـ) تعديلاً على هذا القانون بحيث صار ينطبق على أي شكل رباعي ، حيث يتخذ قانون الكرخي الشكل التالي :

مساحة أي شكل رباعي

$$= \sqrt{(ح - أ)\ (ح - ب)\ (ح - جـ)\ (ح - د)}$$

حيث ح تمثل نصف محيط الشكل الرباعي ، ويرمز لأطوال الأضلاع بالحروف أ ، ب ، جـ ، د .

المسلمة الخامسة (المصادرة الخامسة) من مسلمات إقليدس :

وهذه المسلمة تعرف بفرضية التوازي أدت دوراً عظيماً عبر التاريخ ، لأن العلماء الأوائل الذين أتوا بعد إقليدس لم يرتاحوا لعمله ، حيث لم يستخدم هذه المسلمة ، بل برهن معظم النظريات الهندسية التي وردت في كتابه «أصول الهندسة» دون الرجوع إليها . لذا نجد أن العلماء الأوائل والمتأخرين حاولوا أن يبرهنوا على صحتها وحتى يومنا هذا والمحاولات مستمرة . وهذه بعض المحاولات التي ذكرها رولد وولف في كتابه «المدخل إلى الهندسة غير الإقليدية» :

١ - لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه .

٢ - إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

٣ - البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت لا يتغير .

٤ - مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين .

٥ - المستقيم العمود على منصف زاوية من نقطة مفروضة عليه يقطع ضلعيها .

٦ - يوجد زوج من المثلثات المتشابهة .

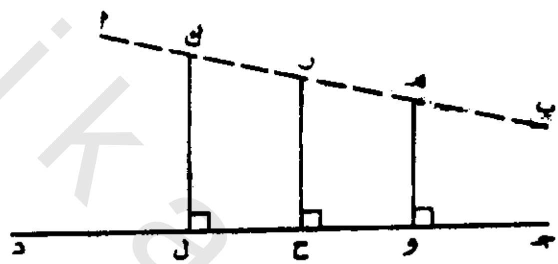
٧ - المستقيمات الموازية لنفس المستقيم تكون متوازية فيما بينها .

٨ - من الممكن إمرار دائرة بثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة .

٩ - إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فإن زاويته الرابعة تكون قائمة .

١٠- من نقطة داخل زاوية أقل من ثلثي القائمة يمكن رسم مستقيم يقطع ضلعي تلك الزاوية .

١١- إذا رسم مستقيمان أ ب ، د جـ بحيث كانت الأعمدة هـ و ، رح ، ك ل . . . إلخ المرسومة من أ ب إلى د جـ تعمل مع أ ب زوايا حادة من جهة ب وزوايا منفرجة من جهة أ فإن المستقيمين أ ب ، د جـ يتباعدان في جهة أ ، د ويتقاربان في جهة ب ، جـ وبذلك تقصر الأعمدة في جهة الزوايا الحادة وتطول في جهة الزوايا المنفرجة ، والعكس صحيح .



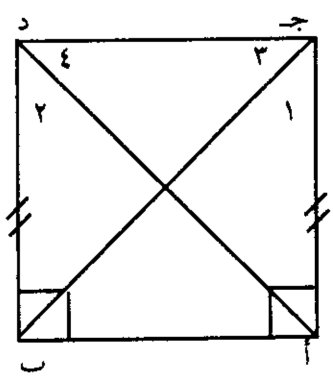
حاول علماء العرب والمسلمين أن يبرهنوا المصادرة الخامسة لإقليدس ومنهم الحسن بن الهيثم (٣٥٤-٤٣٠هـ) أولاً ، ثم عمر الخيام (٤٣٦-٥١٧هـ) ، ثم نصير الدين الطوسي في القرن السابع الهجري (الثالث عشر الميلادي) ثم أثير الدين الأبهري[1] ، ومع أن محاولاتهم لإيجاد برهان لهذه المصادرة لم تبلغ ذروتها المطلوبة ، إلا أن هذه البراهين كانت حافزاً قوياً ومفتاحاً واضحاً لبعض علماء الرياضيات في أوروبا في العصور الحديثة ، لوضع هندسات أخرى «غير إقليدية» مثل هندسة «برنهارد ريمان»

(١) أثير الدين الأبهري والمعروف باسم الفضل بن عمر الأبهري إيراني الأصل توفي سنة (٦٦١هـ ، الموافق ١٢٦٣م) وله مصنفات كثيرة منها كتاب «هداية الحكمة» وكتاب «زبدة الأسرار» . وقد تتلمذ على أبي الفتح موسى بن يونس بن منعه الموصلي . وكانت محاولته مبنية على أن المستقيم العمود على منصف زاوية من نقطة مفروضة عليه يقطع ضلعيها ، وهذه تعد من أحسن المحاولات لبرهان المسلمة الخامسة لإقليدس .

(Bernhard Riemann) (١٨٢٦-١٨٦٦م) ، و«هندسة نيكولاي لوباشيفسكي» (Nikolai Lobachevsky) الذي عاش في القرن التاسع عشر أيضاً .

يعتبر عمر الخيام أن علم الهندسة من المواضيع الأساسية اللازمة لدراسة أي حقل من حقول الرياضيات ، لذلك فإنه قد ركز على دراسة هندسة إقليدس المشروحة والمعلق عليها من طرف علماء الرياضيات المسلمين . كما أنه أولى عناية خاصة لتفهم ما قدمه الحسن بن الهيثم في برهانه للمصادرة (للموضوعة) الخامسة من مسلمات أو مصادرات أو موضوعات إقليدس ، ثم أتى ببرهان جديد من ذلك المنطلق ، وكان برهان ابن الهيثم مبنياً على أن البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت لا يتغير . ويذكر المؤلف أورثر جتليمن في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن عمر الخيام حاول جهده أن يبرهن الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس التي استعصت على من سبقه من علماء المسلمين . ولم تبرهن برهاناً صحيحاً إلى يومنا هذا» .

ويجدر بنا أن نذكر أن ديفيد يوجين سمث نشر مقالة في مجلة (سكريبتا ماثماتيكا) عن محاولة عمر الخيام لبرهنة هذه الموضوعة الخامسة ، والتي جاءت في رسالته «شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس» ، وكان برهان عمر الخيام كالآتي :



شكل (١)

المعطيات :

كل من أ جـ ، ب د ⊥ أ ب ، أ جـ = ب د

المطلوب : إثبات أن :

١ - د $\hat{\text{جـ}}$ أ = جـ $\hat{\text{د}}$ ب

٢ - العمود المقام من ن منتصف أ ب ينصف جـ د في ع ويكون عمودي عليه

٣ - أ ب // جـ د

٤ - أ $\hat{\text{جـ}}$ ع = ن $\hat{\text{ع}}$ جـ = زاوية قائمة .

العمل :

نصل نقطتي ب ، جـ وكذلك نصل نقطتي أ ، د .

Δ جـ أ ب ، Δ أ ب د فيهما

أ جـ = ب د

أ ب مشترك

جـ $\hat{\text{أ}}$ ب = أ $\hat{\text{ب}}$ د = زاوية قائمة .

إذن Δ جـ أ ب يطابق Δ أ ب د ومن ذلك ينتج أن :

أ د = ب جـ ، $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ (١)

Δ أ جـ د ، Δ ب د جـ فيهما :

أ د = ب جـ

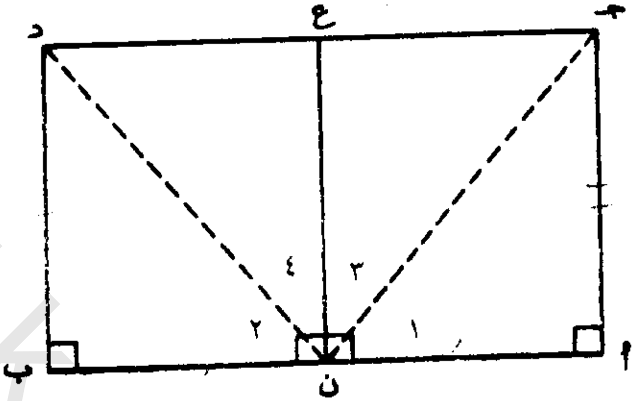
أ جـ = ب د معطى

جـ د مشترك

إذن Δ أ جـ د يطابق Δ ب د جـ ومن ذلك ينتج أن : ٣̂ = ٤̂ (٢)

من (١) ، (٢) ١̂ + ٣̂ = ٢̂ + ٤̂

∴ أ جـ̂ د = جـ د̂ ب (وهو المطلوب أولاً) .



الشكل (٢)

من الشكل (٢)

Δ جـ أ ن ، Δ د ب ن فيهما :

جـ أ̂ ب = د ب̂ أ = قائمة

أ ن = ن ب
أ جـ = ب د } معطى

إذن Δ جـ أ ن يطابق Δ د ب ن

لذا ن جـ = ن د

أ ن̂١ جـ = د ن̂٢ ب ⟸ جـ ن̂٣ ع = ع ن̂٤ د

Δ جـ ع ن ، Δ د ع ن فيهما :

ن جـ = ن د مثبت

جـ ن̂٣ ع = ع ن̂٤ د

ع ن مشترك

إذن Δ جـ ع ن يطابق Δ د ع ن

لذا جـ ع̂ ن = ن ع̂ د ولكن جـ ع̂ ن + ن ع̂ د = ١٨٠° لأن جـ د خط مستقيم

إذن ن ع ⊥ جـ د

وكذلك جـ ع = ع د من تطابق المثلثين جـ ع ن ، د ع ن .

ن ع ينصف جـ د ويكون عمودياً عليه (المطلوب ثانياً) .

بما أن جـ ع̂ ن = ٩٠° (٣)

ع ن̂ ب = ٩٠°

جـ ع̂ ن = ع ن̂ ب متبادلتان

لذا جـ د // أ ب (المطلوب ثالثاً) .

افرض أن :

أ جـ أكبر من ن ع ⟸ أ جـ̂ ع زاوية حادة ، ن ع̂ جـ زاوية منفرجة ، وهذا يناقض المعروف من (٣) لأن ن ع̂ جـ = ٩٠° .

أ جـ أصغر من ن ع ⟸ أ جـ̂ ع زاوية منفرجة ، ن ع̂ جـ زاوية حادة ، وهذا يناقض المعروف من (٣) لأن ن ع̂ جـ = ٩٠° .

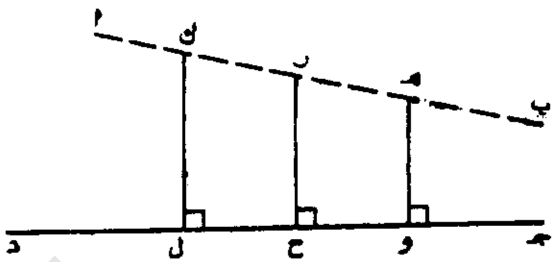
إذن أ جـ̂ ع = ن ع̂ جـ = ٩٠° . من ذلك استنتج أن مجموع زوايا أي شكل رباعي = ٣٦٠° وأن مجموع زوايا أي مثلث يساوي ١٨٠° . (المطلوب رابعاً) .

هذا وقد أبدع نصير الدين الطوسي في دراسة العلاقة بين المنطق والرياضيات ، لدرجة أن معظم علماء العالم يقولون عند عقد مقارنة بين ابن سينا والطوسي بأن ابن سينا طبيب ناجح ، بينما الطوسي رياضي بارع ، فأطلق

عليه اسم «المحقق» . والجدير بالذكر أن الطوسي نال شهرة مرموقة في علم الهندسة ، مما جعل العالم الألماني فيدمان يقول عنه : «إن نصير الدين الطوسي نبغ في شتى فروع المعرفة ، وبالأخص في علم البصريات ، إذ أتى ببرهان جديد لتساوي زاويتي السقوط والانعكاس ، يدل على خصب قريحته وقوة منطقه» . وقد حاول نصير الدين الطوسي أن يبرهن فرضية إقليدس الخامسة في كتابه «الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية» ، فكانت محاولة ناجحة حيث فتحت باب النقاش وعدم التسليم بما كتبه إقليدس وأمثاله من عمالقة اليونان في علم الهندسة . ويقول جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «إن الطوسي أظهر براعة فائقة النظير وخارقة للعادة في معالجة قضية المتوازيات في الهندسة ، وجرب أن يبرهنها ، وبنى برهانه على فروض تدل على عبقريته ، ومن المسائل التي برهنها هذه المسألة : «دائرة تمس أخرى من الداخل ، قطرها ضعف الأولى ، تتحركان بانتظام في اتجاهين متضادين ، بحيث تكونان دائماً متماستين ، وتكون سرعة الدائرة الصغيرة ضعف سرعة الدائرة الكبيرة» . برهن نصير الدين أن نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى ، وجدير بالذكر أن هذه النظرية هي أساس تصميم جهاز الأسطرلاب البالغ الأهمية» .

أولى الطوسي اهتماماً ملموساً بالهندسة غير الإقليدية التي بنيت على أسس منطقية تناقض هندسة إقليدس ، التي كان يعتقد بأنها ليست قابلة للتغيير والانتقاد عبر العصور ، كما ذكر دريك سترويك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «أن نصير الدين الطوسي حاول بكل جدارة أن يبرهن على الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس فكانت محاولته بدء عصر جديد في علم الرياضيات الحديثة ، لهذا انصبت عقليته العظيمة على برهانها ، وهو

(أن مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين)» وقبل أن يبدأ نصير الدين في برهانه للموضوعة الخامسة لإقليدس حاول أن يعطي مقدمة عن التقارب والتباعد ، فمثلاً لو أخذ المرء مستقيمين أ ب ، د جـ كما في الشكل :



وأسقط الأعمدة هـ و ، ر ح ، ك ل ، . . . إلخ على د جـ من النقاط هـ ، ر ، ك ، . . . والواقعة على المستقيم أ ب كما بالشكل ، بحيث يتحقق الآتي :

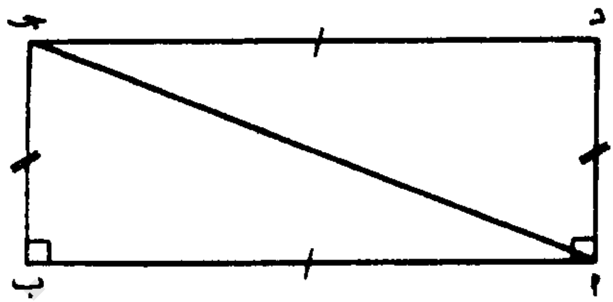
* ب هـ̂ و ≠ و هـ̂ ر

* هـ ر̂ ح ≠ ح ر̂ ك

لهذا يتضح أن الزاويتين المتجاورتين على المستقيم أ ب غير متساويتين . فلتكن الزوايا التي باتجاه ب زوايا حادة ، والزوايا التي باتجاه أ زوايا منفرجة ولتكن الأعمدة أطول كلما كانت باتجاه أ ، د وأصغر إن كانت باتجاه ب ، جـ ، أي أن المسافة بين المستقيمين أ ب ، د جـ تصغر كلما توغلنا في الاتجاه ب ، جـ والعكس صحيح ، أي أنه : لو كانت الزوايا الحادة باتجاه النقطتين أ ، د ، فإن التقارب سيكون باتجاه النقطتين أ ، د والتباعد باتجاه النقطتين ب ، جـ .

بعد هذه المقدمة بدأ نصير الدين الطوسي في برهانه الذي صار متداولاً في كتب الهندسة التي تدرس في جامعات العالم ، ونادراً بل يكاد يكون

مستحيلاً أن يحصل على كتاب بعنوان الهندسة غير الإقليدية دون التعرض لإسهام نصير الدين الطوسي في هذا المضمار . بدأ الطوسي برهانه بالشكل الآتي :



* رسم عمودين د أ ، جـ ب على المستقيم أ ب من النقطتين أ ، ب بحيث إن المستقيمين د أ ، جـ ب يكونان متساويين ، ويقعان على نفس الجهة من المستقيم أ ب .
* أوصل النقطتين د ، جـ .
* حاول الطوسي أن يبرهن أن الزاويتين جـ د̂ أ ، ب جـ̂ د قائمتان .
* بفرض أن جـ د̂ أ ليست زاوية قائمة فهي إما أن تكون :
  (أ) زاوية حادة .
  أو (ب) زاوية منفرجة .
* إذا كانت زاوية جـ د̂ أ زاوية حادة ، فالزاوية د جـ̂ ب ستكون زاوية منفرجة ، وهذا بالطبع يؤدي إلى أن يصير المستقيم أ د أطول من المستقيم ب جـ ، ولكن هذا يناقض ما افترضه ، فالزاوية جـ د̂ أ ليست زاوية حادة .
* إذا كانت الزاوية جـ د̂ أ زاوية منفرجة ، فالزاوية د جـ̂ ب ستكون زاوية حادة ، فينتج أن المستقيم أ د يكون أقصر من المستقيم جـ ب ، وهذا أيضاً يناقض ما افترضه ، فالزاوية جـ د̂ أ ليست زاوية منفرجة .

من ذلك استخلص نصير الدين الطوسي أن الزاوية جـ د̂ أ يجب أن تكون زاوية قائمة .

ومن ذلك يكون لدينا د أ̂ ب = أ ب̂ جـ = أ د̂ جـ = ٩٠° .

∴ ب جـ̂ د = ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠° .

أو كما أنه من الممكن تكرار نفس العملية المذكورة أعلاه بالنسبة للزاوية د جـ̂ ب وحيث إن نصير الدين الطوسي قد افترض أن الزاوية د جـ̂ ب ليست زاوية قائمة فهي إما أن تكون :

(أ) زاوية حادة .

أو (ب) زاوية منفرجة .

* إذا كانت الزاوية د جـ̂ ب زاوية حادة ، فالزاوية جـ د̂ أ ستكون زاوية منفرجة ، وهذا بالطبع يؤدي إلى أن يصير المستقيم ب جـ أطول من المستقيم أ د ولكن هذا يناقض ما افترضه ، فالزاوية د جـ̂ ب ليست زاوية حادة .

* إذا كانت د جـ̂ ب زاوية منفرجة ، فالزاوية جـ د̂ أ ستكون زاوية حادة ، فينتج من ذلك أن المستقيم أ د يكون أطول من المستقيم جـ ب ، وهذا أيضاً يناقض ما افترضه .

فالزاوية د جـ̂ ب ليست زاوية منفرجة ، أي أنها يجب أن تكون زاوية قائمة .

مما سبق استطاع الطوسي أن يصل إلى أن الزوايا الأربع للشكل الرباعي المذكور أ ب جـ د جميعها زوايا قائمة ، وبالتالي فإن مجموع زوايا المثلث أ د جـ

تساوي زاويتين قائمتين ، وأن Δ أ ب جـ = Δ أ د جـ متطابقان . كما استنتج الطوسي أن مجموع زوايا المثلث = $\frac{١}{٢}$ مجموع زوايا الشكل الرباعي أ ب جـ د .

بهذا البرهان استطاع نصير الدين الطوسي أن يثبت أن : «مجموع زوايا أي مثلث مساوية لزاويتين قائمتين» . وهذا بالضبط ما يكافئ الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس . إن محاولة الطوسي لبرهان الموضوعة الخامسة لإقليدس لها طابع أصيل ، فلم يسبق لأحد قبله أن ساق محاولته . وقد ادعى جرولا سكيرى الإيطالي (ت ١٧٣٣م) هذا الشكل الرباعي لنفسه ، والحق أن هذا المربع يجب أن ينسب أولاً لعمر الخيام ، الذي اكتشفه قبل سكيرى بأكثر من خمسمائة عام . والجدير بالذكر أن هذا المربع قد أدى دوراً هاماً في الهندسة الغير إقليدية ، لذا يجب أن نعتبر أن عمر الخيام ونصير الدين الطوسي هما اللذان وضعا حجر الأساس للهندسة الغير إقليدية (الهندسة الهذلولية) .

يذكر عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الإسلامية» : «أنه يمكن القول بأن الطوسي امتاز على غيره في بحوثه في الهندسة لإحاطته بالقضايا الأساسية التي تقوم عليها الهندسة المستوية فيما يتعلق بالمتوازيات ، وقد ألم بها ، كما جرب أن يبرهن قضية المتوازيات الهندسية وقد وفق في ذلك . ومعظم براهينه على المسائل الهندسية مغايرة لمحاولات الذين سبقوه ، فصاغ كل ذلك في شكل مبتكر لم يسبق إليه ، وهو يعتبر من هذه الوجهة متفوقاً على معاصريه» .

ويضيف جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية – نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة» : «أن الطوسي تنبه لنقص هندسة

إقليدس ، فعلق وبرهن على كثير من النظريات في كتاب «تحرير أصول إقليدس» ، وفي الرسالة الشافية للطوسي أثر في تقدم بعض النظريات الهندسية . وقد نشرت هذه البحوث باللاتينية في سنة ١٦٥١م على يد العالم الرياضي الإنجليزي - صاحب الشهرة العظيمة في الغرب - جان واليس (١٦١٦-١٧٠٣م) ، الذي درس بكل تمعن برهان نصير الدين للموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس ، واعترف في دراسته بأن نصير الدين الطوسي عالم رياضي له فضل كبير في بدء الهندسة غير الإقليدية ، وظهور فجر الرياضيات الحديثة .

كما استفاد جان واليس (J. Wallis) من محاولة نصير الدين الطوسي ، لذا قدم للمسلمة الخامسة لإقليدس بديلاً وذلك «يوجد زوج من المثلثات المتشابهة» .

ويذكر هوارد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» : «إن جرولا سكيري الإيطالي (١٦٦٧-١٧٣٣م) كان أستاذاً في علم الفلسفة والرياضيات في جامعة بافيا في إيطاليا ، وقد سمي بأبي الهندسة الغير إقليدية ، ومما لا يقبل الشك أنه اعتمد اعتماداً كلياً على عمل نصير الدين الطوسي في هذا المجال» . أما أ . م .ليجندر (Legendre) العالم الفرنسي الشهير الذي عاش فيما بين (١٧٥٢-١٨٣٣م) ، فقد حاول أن يثبت أن البديل «من نقطة داخل زاوية أقل من ثلثي القائمة يمكن رسم مستقيم يقطع ضعلي تلك الزاوية» . ثم جاء العالم الأسكتلندي جان بليفير (J. Playfair) الذي عاش فيما بين (١٧٤٨-١٨١٩م) وقدم أيضاً بديلاً للمسلمة الخامسة لإقليدس «لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه» .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن المشكلة استمرت مدة طويلة ولكن كل من العالمين بولياي الهنغاري (١٨٠٢-١٨٦٠م) ولوباشيفسكي الروسي (١٧٩٣-١٨٥٦م) وكل واحد على حدة قام ببناء صرح هندسة جديدة تستند إلى نقيض المسلمة الخامسة لإقليدس (مع بقاء بقية مسلمات إقليدس سارية) سميت الهندسة غير الإقليدية وذلك عام ١٨٢٩م . وهذه الهندسة غير الإقليدية تتكون من قسمين باعتبار وجود نقيضين للمسلمة الخامسة (أو مكافئتها : لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه) فالنقيض الأول يعني وجود أكثر من مواز واحد ، وهذا الافتراض يؤلف الهندسة الهذلولية (Hyperbolic Geometry) والتي فيها يكون مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين . والنقيض الثاني يعني عدم وجود تواز ، أي أن جميع المستقيمات تتقاطع ، وهذه الفرضية تؤلف الهندسة الإهليليجية (Elliptic Geometry) والتي فيها يكون مجموع زوايا المثلث أكثر من قائمتين ، ويمكن تحقيقها على سطح الكرة باعبار المستقيمات أقواس عظمى .

ومع الأسف فإن علماء الرياضيات في العصر الحديث عندما يتكلمون عن الهندسة غير الإقليدية ، فإنهم يقرنون اسمها بأسماء بعض علماء الرياضيات الغربيين ذوي الشهرة الكبيرة في حقل الرياضيات ، مثل نيكولاي لوبا شيفسكي (Lobachewsky) الروسي وكارل جاوس (Gauss) الألماني الذي عاش ما بين عامي ١٧٧٧-١٨٥٥م ، ولفقان بولياي (Bolyai) المجري (الهنغاري) ، ونسوا أولئك العلماء الذين سبقوهم بقرون عدة ، أولئك العلماء الذين كان لهم دور مرموق في هذا الحقل من أمثال الحسن بن الهيثم ، وعمر

الخيام ، ونصير الدين الطوسي ، والفضل بن الأبهري ، حيث كانت مؤلفاتهم تدرس في مدارس وجامعات الغرب والشرق حتى القرن الثاني عشر الهجري (الثامن عشر الميلادي) . ويجب أن لا يخفى على القارئ أن الهندسة غير الإقليدية تؤدي في وقتنا الحاضر دوراً عظيماً في دراسة الفضاء الطبيعي وتفسيرات النظرية النسبية .

بعض جهود الخوارزمي في حساب المساحة :

عرف الخوارزمي الوحدة المستعملة في المساحات ، واستخدم «التكسير» ويقصد بذلك المساحة ، سواء كانت سطحية أو مجسمة ، كما تطرق إلى إيجاد مساحات بعض السطوح المستقيمة الأضلاع ، والأجسام ، والدائرة ، والقطعة ، والهرم الثلاثي والرباعي ، والمخروط والكرة . كما استعمل النسبة التقريبية وقيمتها ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ، أو $\sqrt{١٠}$ أو $\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$ ، ولقد أثرى علم الجبر باستعماله بعض الأفكار الجبرية لمعرفة المساحة ، واختار مثالاً يوضح به مدى استخدام النظريات الجبرية ، وهو : «فإن قيل أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعاً في جوفها أرض مربعة كم كل جانب من المربعة ، فقياس ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة في مثله فسيكون ستة وثلاثين فأنقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروباً في مثله ، وهو مائة ، يبقى أربعة وستون ، فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون ذراعاً وهو ضربك العمود في نصف القاعدة وهو ستة فحصلنا أحد جوانب المربعة شيئاً وضربناه في مثله فصار مالاً فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقي لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها ، فأما المثلثتان اللتان على جنبتي المربعة فهما متساويتان ، وعموداهما واحد ،

وهما على زاوية قائمة ، فتكسيرها أن تضرب شيئاً في ستة إلا نصف شيء فيكون ستة أشياء إلا نصف مال ، وهو تكسير المثلثتين جميعاً اللتين هما على جنبتي المربعة . فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية إلا شيء وهو العمود ، في نصف شيء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال ، فهذا هو تكسير المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين ، هو تكسير المثلثة العظمى ، فالشيء الواحد من ذلك . أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع ، وهو كل جانب من المربعة وهذه صورتها» .

في المثال السابق استخدم الخوارزمي مساحة المثلث ومساحة المربع ونظرية مثلث قائم الزاوية لإيجاد المطلوب ، فلو حاولنا أن نضع طريقة حله في لغة العصر هذا ، لقلنا : المطلوب إيجاد طول المربع المرسوم داخل المثلث المتساوي الساقين والذي قاعدته = ١٢ وطول كل من ضلعيه الآخرين ١٠ .

* نرسم المثلث أ ب جـ ، قاعدته ب جـ = ١٢ ، ضلعه أ جـ = أ ب = ١٠ .
* نرسم المربع ك ن م و داخل المثلث أ ب جـ .
* نرسم الارتفاع أ هـ .
* $\overline{\text{أهـ}}^{2} + \overline{\text{جـهـ}}^{2} = \overline{\text{أجـ}}^{2}$ نظرية مثلث قائم الزاوية .

ولكن جـ هـ = ٦ لأن Δ أ ب جـ متساوي الساقين أ هـ $\perp$ القاعدة ب جـ .

$\therefore$ أ هـ = $\sqrt{\overline{\text{أجـ}}^{2} - \overline{\text{جـهـ}}^{2}} = \sqrt{(١٠)^{2} - (٦)^{2}}$

$= \sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$.

* بما أن Δ أ ب جـ متساوي الساقين ، أ هـ عمودي على القاعدة ب جـ

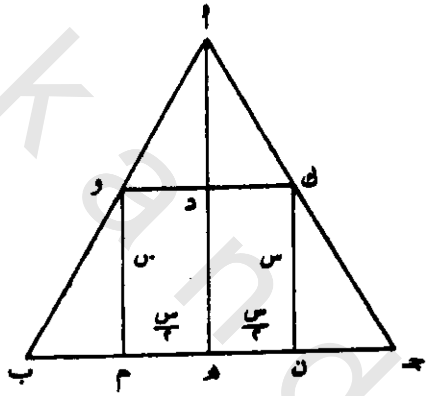
$\therefore$ هـ جـ = هـ ب = ٦ .

* افرض أن طول ضلع المربع ك ن م و = س .

$\therefore$ هـ م = $\frac{\text{س}}{٢}$ ، م ب = ٦ − $\frac{\text{س}}{٢}$ ، أ د = ٨ − س .

* مساحة   أ ب جـ = مساحة Δ جـ ك ن + مساحة Δ ب و م + مساحة Δ أ ك و + مساحة المربع ك ن م و .

$$\therefore \frac{١}{٢}(١٢ \times ٨) = \frac{١}{٢}\text{س}\left(٦ - \frac{\text{س}}{٢}\right) + \frac{١}{٢}\text{س}\left(٦ - \frac{\text{س}}{٢}\right) + \frac{١}{٢}\text{س}(٨ - \text{س}) + \text{س}^{٢} .$$



$$٤٨ = \text{س}\left(٦ - \frac{\text{س}}{٢}\right) + \frac{١}{٢}\text{س}(٨ - \text{س}) + \text{س}^{٢} .$$

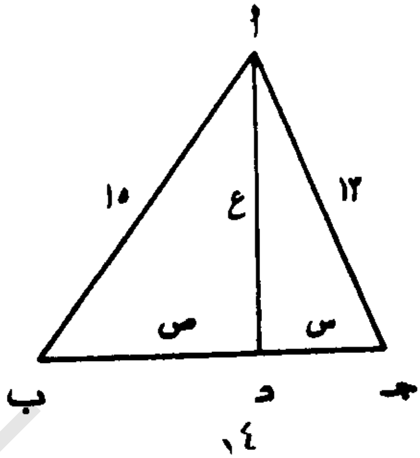
$$= ٦\,\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٤\,\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}^{٢}$$

$$٤٨ = ١٠\,\text{س} .$$

$\therefore$ س = ٤ $\frac{٤}{٥}$ = طول ضلع المربع

كما أورد الخوارزمي مثالاً آخر يبرز فيه الاستفادة من علم الجبر ، عندما نحاول أن نعرف مساحة المثلث ، لذا اختار إيجاد مساحة المثلث إذا عرفت طول أضلاعه الثلاثة . فعلى سبيل المثال :

افرض أن هناك مثلثاً طول أضلاعه (١٣ ، ١٤ ، ١٥) كما في الشكل المطلوب إيجاد مساحته .



البرهان :

بتطبيق نظرية المثلث القائم الزاوية :

من Δ أ جـ د نجد أن ١٣^{٢} = س^{٢} + ع^{٢} $\Longleftarrow$ ع^{٢} = ١٣^{٢} − س^{٢} (١)

من أ د ب نجد أن ١٥^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢} $\Longleftarrow$ ع^{٢} = ١٥^{٢} − ص^{٢} (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن ١٣^{٢} − س^{٢} = ١٥^{٢} − ص^{٢} (٣)

ولكن ص = ١٤ − س (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن ١٣^{٢} − س^{٢} = ١٥^{٢} − (١٤ − س)^{٢}

١٦٩ − س^{٢} = ٢٢٥ − (١٩٦ − ٢٨س + س٢) .

١٦٩ − س٢ = ٢٢٥ − ١٩٦ + ٢٨س − س^{٢} .

$\therefore$ ١٤٠ = ٢٨س $\Longleftarrow$ س = ٥ (٥)

من (١) ، (٥) ينتج أن ع^{٢} = ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤

$\therefore$ ع = ١٢

وأخيراً مساحة أ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ (١٤) (١٢) = ٨٤ .

ابن الهيثم وخواص التناسب :

أولى ابن الهيثم اهتماماً كبيراً لبعض خواص التناسب وعرفها بأن :

«التناسب هو التساوي بين نسبتين» :

$$\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \text{ ،}$$

وسمى (ب ، هـ) طرفي التناسب ، و (جـ ، د) وسطي التناسب .

$$(١) \quad \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \text{ب هـ} = \text{جـ د}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{هـ}}{\text{د}}$$

$$(٣) \quad \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ}}{\text{هـ}}$$

$$(٤) \quad \frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د} + \text{هـ}}{\text{هـ}}$$

أو $\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د} - \text{هـ}}{\text{هـ}}$ ، حيث إن ب > جـ ، د > هـ

$$(٥) \quad \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{جـ} + \text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$$

حيث إن $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} \Longrightarrow \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ}}{\text{هـ}}$ من (٣)

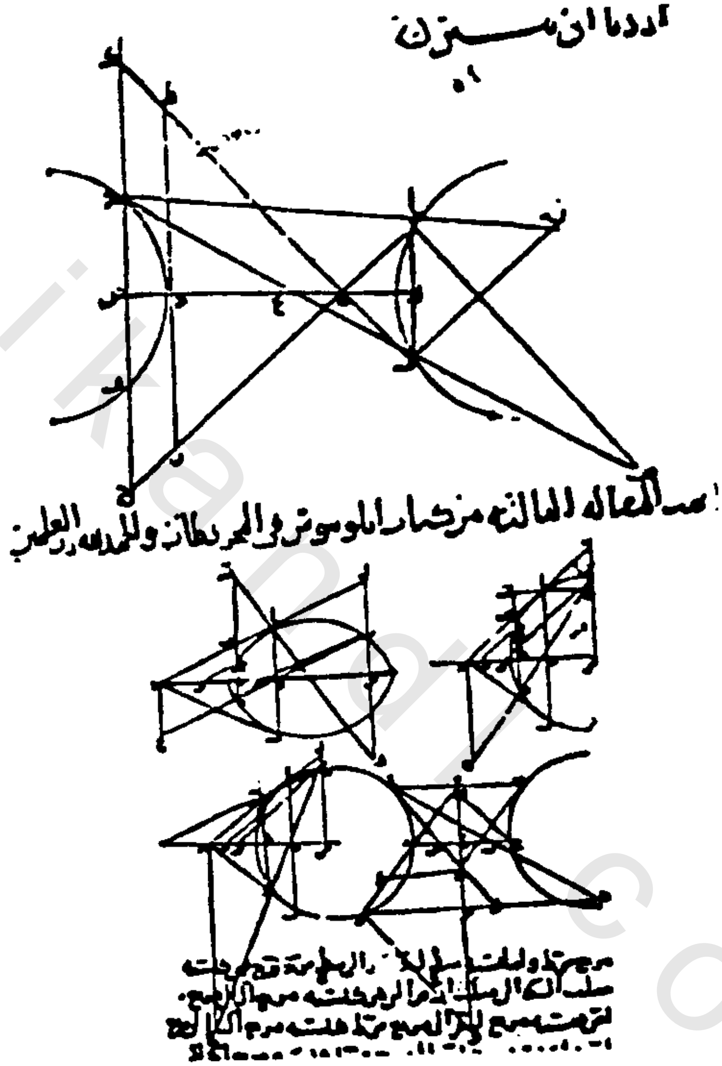
لهذا فإن $\frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ} + \text{هـ}}{\text{هـ}}$ من (٤)

إذن $\frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{جـ} + \text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ من (٣)

ولكن $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

لذلك فإن $\frac{\text{ب + د}}{\text{جـ + هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} \Longrightarrow \frac{\text{١ + ٣}}{\text{٢ + ٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$



رسمان هندسيان مأخوذان من مخطوطة الحسن بن الهيثم في علم البصريات ، بعنوان «المناظر» .

أوضح ابن الهيثم طريقة التوسط باقتراحه أن المعادلة المطلوب إيجاد جذرها الحقيقي التقريبي د(س) = صفراً ، وأن جذريها الحقيقيين التقريبيين هما $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، فاتبع الطريقة الآتية :

* افترض أن $س_{١} < س_{٣} < س_{٢}$

$$* \quad \frac{س_{١}}{١} < \frac{س_{٢}}{١} \Longrightarrow س_{١} < \frac{س_{١} + س_{٢}}{١ + ١} < س_{٢}$$

$$\text{لهذا } س_{١} < \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} < س_{٢} \Longrightarrow س_{٣} = \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$$

وبتكرار هذه الطريقة مرة ثانية نجد أن الجذر الحقيقي التقريبي الثاني يقع بين $(س_{١})$ ، $(س_{٣})$.

$$س_{١} < \frac{س_{١} + س_{٣}}{٢} < س_{٣}$$

مثال : احسب قيمة الجذر الحقيقي التقريبي الواقع بين ١ ، ٢ للمعادلة د (س) = صفراً .

الحل : بما أن $س_{١} < \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} < س_{٢}$ ،

وحيث إن $س_{١} = ١$ ، $س_{٢} = ٢$

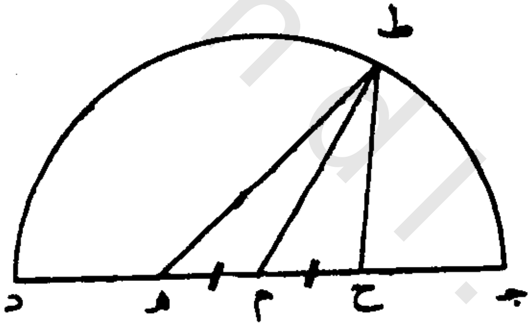
لذا $\frac{١}{١} < \frac{١ + ٢}{٢} < \frac{٢}{١} \Longrightarrow ١ < ١,٥ < ٢$ ،

$س_{٣} = ١,٥$ الجذر الحقيقي التقريبي .

ولو أريد إيجاد الجذر الحقيقي التقريبي الثاني لاعتبر ($س_١$ ، $س_٣$) الجذرين الحقيقيين التقريبيين المعروفين . حيث إن $س_١ = ١$ ، $س_٣ = ٣/٢$.

$$١,٢٥٠٠٠ = س_٤ \text{ ، } \frac{٣}{٢} > \frac{٥}{٤} > ١ \Longleftarrow \frac{٣}{٢} > \frac{١ + \frac{٣}{٢}}{٢} > \frac{١}{١}$$

هذا وقد قدم سيد حسين نصر في كتابه «العلوم والحضارة في الإسلام» وكذا عمر فروخ في كتابه «تاريخ العلوم عند العرب» فكرة عن بعض المسائل التي برهنها ابن الهيثم ، مثال ذلك ما يلي : إذا فرضنا على قطر دائرة نقطتين بعداهما عن مركز الدائرة متساويين ، فإن مجموع مربعي كل خطين يخرجان من النقطتين ويلتقيان في نقطة على المحيط يساوي مجموع مربعي نصف القطر مع مربعي الخط الواصل بين إحدى النقطتين وبين مركز الدائرة .



العمل : اعتبر نصف دائرة مركزها م ، وقطرها جـ د ، ونقطتي ح ، هـ على القطر بحيث سكون م ح = م هـ ، وكذلك نقطة ط على المحيط .

المطلوب : إثبات أن :

$$(\overline{م هـ}^{٢} + \overline{م ط}^{٢}) ٢ = \overline{ط هـ}^{٢} + \overline{ط ح}^{٢}$$

البرهان : في Δ م ط هـ نجد أن :

$$\overline{\text{ط هـ}}^{٢} = \overline{\text{م ط}}^{٢} + \overline{\text{م هـ}}^{٢} + ٢\ \text{م ط} \times \text{م هـ}\ \text{جتا ط م ح} \qquad (١)$$

في Δ م ط ح نجد أن :

$$\overline{\text{ط ح}}^{٢} = \overline{\text{م ط}}^{٢} + \overline{\text{م ح}}^{٢} - ٢\ \text{م ط} \times \text{م ح}\ \text{جتا ط م ح}$$

ولكن م ح = م هـ معطى

إذن $$\overline{\text{ط ح}}^{٢} = \overline{\text{م ط}}^{٢} + \overline{\text{م هـ}}^{٢} - ٢\ \text{م ط} \times \text{م هـ}\ \text{جتا ط م ح} \qquad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن $\overline{\text{ط هـ}}^{٢} + \overline{\text{ط ح}}^{٢} = (\overline{\text{م ط}}^{٢} + \overline{\text{م هـ}}^{٢})$

ثابت بن قرة :

أبو الحسن ثابت بن قرة بن عرفان الحراني ، وطنه الأصلي حران الواقعة بين النهرين ، عاش ثابت بن قرة بين (٢٢١-٢٨٨هـ = ٨٢٦-٩٠١م) . وكان له أبناء وأحفاد علماء منهم : سنان بن ثابت ، وإبراهيم بن سنان ، ومن أكبر أحفاده محمد بن جابر بن سنان ، الملقب بالبتاني ، والذي كان من كبار علماء الفلك . وقد اشتهر ثابت بن قرة بعلوم مختلفة مثل الرياضيات ، والطب ، والفلك ، والفلسفة ، وكان يجيد مع اللغة العربية عدداً كبيراً من اللغات الأخرى منها : السريانية واليونانية والعبرية ، وهو أول من ترجم مؤلفات بطليموس : «المجسطي» ، وكتاب «جغرافية المعمورة» ويذكر عمر فروخ في كتابه «تاريخ الفكر العربي إلى أيام ابن خلدون» : «أن ثابت بن قرة نال حظوة المعتضد ، لذا فإنه قد سعى في حياته إلى أن يرفع شأن طائفته (الصابئة) ، فعلت منزلتها ثم أصبح هو رئيساً عليها» . يقول جورج سارتون في

كتابه المعروف «المدخل في تاريخ العلوم» : «إن ثابت بن قرة يعد من أعظم المترجمين وأعظم من عرف في مدرسة حران في العالم الغربي ، وقد ترجم كتباً كثيرة من علوم الأقدمين في الرياضيات والمنطق والتنجيم والطب ، وذلك بسبب مقدرته على إجادة مختلف اللغات الأجنبية» .

ومدح المؤلف لين ثورنديك ثابت بن قرة في كتابه «ملخص تاريخ الحضارة» قائلاً : «إن ثابت بن قرة كان رياضياً ولغوياً بارعاً ، وله مخطوطة مهمة جداً في علم الجبر وفيها حل المعادلة ذات الدرجة الثالثة س^{٣} + أ ب^{٢} = جـ س^{٢}» . وأضاف فرانسيس كارمودي في كتابه «أعمال ثابت بن قرة الفلكية» : «أن ثابت بن قرة طور وترجم معظم الإنتاج العلمي لإقليدس ، وأرخميدس وأبولونيوس ، ويطليموس ، حتى صارت مؤلفاتهم كتباً مدرسية معتمدة في جميع الدول الإسلامية . ويقول أحمد سعيدان في الكتاب الذي حققه لثابت بن قرة وهو بعنوان كتاب «الأعداد المتحابة» : «كان أبو الحسن ثابت بن قرة من أقدر العلماء الإسلاميين في عصر الترجمة ، الذي بدأ في أيام المنصور ، وامتد إلى أواخر القرن الثالث الهجري ، فلقد ترجم وأصلح كثيراً من الكتب المترجمة في الطب والفلسفة والرياضيات ، كما كتب في العربية وفي السريانية كتباً عدة» .

كان الخليفة العباسي المعتضد بالله يكثر مجالسة العلماء وأصحاب المواهب والكفاءات ، والمشاركة الفعلية في مشكلاتهم ، وكان يسهر طوال الليالي مستمعاً لمناقشتهم لبعض الابتكارات التي يقومون بها ، وكان يقدم لهم الكثير من الهدايا والمنح . فكان المعتضد بالله يحترم ثابت بن قرة فيكنيه بـ«أبي الحسن» ، مع العلم أن ليس له من الأبناء من اسمه حسن ، بل له ولدان

اسمهما سنان وإبراهيم ، وبقي ثابت في القرن الثالث الهجري (التاسع الميلادي) يكنى بـ«أبي الحسن» ويجدر بنا أن نذكر هنا قصة عن المعتضد بالله تروي كيفية احترامه لأهل العلم : «كان المعتضد بالله ذات مرة وبصحبته العلامة ثابت بن قرة في حديقة تابعة لبيت الخليفة ، فسها الخليفة واتكأ على يد ثابت بن قرة ، ولكنه سرعان ما سحب يده بشدة ، معتذراً إليه قائلاً : «يا أبا الحسن سهوت ووضعت يدي على كتفك واستندت عليها ، وليس هكذا يجب أن يكون ، فإن العلماء يعلون ولا يعلون» .

يتفق اليوم علماء الرياضيات في المشرق والمغرب على أن ثابت بن قرة مهد تمهيداً علمياً لحساب التكامل ، وذلك بإيجاد حجم الجسم المتولد عن دوران المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ومحوره خط عمودي على المحور . ويذكر توفيق الطويل في كتابه «العرب والعلم في عصر الإسلام الذهبي ودراسات علمية أخرى» : «أن للعالم العربي ثابت بن قرة الفضل في ابتداع علم التكامل ، وأسهم معه في هذا الفضل المفكر العربي أبو الوفاء محمد البوزجاني ، وقد كان لهذا العلم تأثيره الملحوظ في تقدم الرياضة والطبيعة في عصرنا الحاضر» . ولقد قال ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «كما هي العادة في أحوال كهذه يتعسر أن نحدد بتأكيد إلى من يرجع الفضل في العصور الحديثة ، في عمل أول شيء جدير بالاعتبار في حساب التفاضل والتكامل ، ولكن في استطاعتنا أن نقول : إن ستيفن يستحق أن يحل محلاً مهماً من الاعتبار . أما مآثره فتظهر خصوصاً في تناول موضوع إيجاد مركز الثقل لأشكال هندسية مختلفة ، اهتدى بنورها عدة كتّاب أتوا بعده . ويوجد آخرون حتى القرون الوسطى قد حلوا مسائل في إيجاد المساحات والحجوم بطرق يتبين منها تأثير نظرية إفناء الفرق اليونانية ، وهذه

الطريقة تطفو نوعاً ما في حساب التكامل المتبع في الوقت الحاضر ، من هؤلاء يجدر بنا أن نذكر العالم العربي ثابت بن قرة الذي أوجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره» .

وكرر ديفيد يوجين سمث الفكرة نفسها في أماكن مختلفة ، فقد قال في كلمة ألقاها في جامعة كولومبيا في نيويورك عام ١٩٢٠م : «أن ثابت بن قرة صاحب الفضل في اكتشاف علم التكامل ، حيث أوجد حجم الجسم المكافئ ، وذلك في عام ٨٧٠م ، وحساب التكامل أعان إعانة تامة على حل عدد كبير من المسائل العويصة والعمليات الملتوية» . وأضاف أنور الرفاعي في كتابه «الحضارة في الوطن العربي الكبير» : «أوجد ثابت بن قرة حجم الجسم المكافئ الناتج عن دوران قطع مكافئ حول محوره ، ثم زاد ابن الهيثم فأوجد حجمه إذا دار حول أي قطر أو أي رأس وأوضح الكوهي[١] كيفية إنشاء قطعة كروية تكافئ قطعة كروية أخرى معلومة ، وتكون مساحة سطحها الجانبي مساوية لمساحة السطح الجانبي لقطعة كروية ثانية معلومة .

كان ثابت بن قرة حجة في جميع فروع المعرفة ، فأعطى اهتماماً خاصاً لدراسة الشمس وحركتها ، فكتب المؤلف المعروف سيدني فيش في كتابه

---

(١) هو أبو سهل الكوهي من الكوه من جبال طبرستان عاش في أواخر القرن التاسع وأول القرن العاشر الميلادي ، نبغ في الفلك والرياضيات . واشتهر في مسألته القائلة : «لإنشاء قطعة من كرة حجمها يساوي حجم قطعة من كرة أخرى ومساحة سطحها الجانبية يساوي مساحة السطح الجانبي لقطعة كروية أخرى» ويقول البارون كارادي فو : «توصل إلى حل هذه المسألة بكل براعة مستعيناً بمخروطين هما القطع الزائد والقطع المنتظم ، ثم ناقش الحدود بعدئذ» . ومن مؤلفاته كتاب «صنعة الأسطرلاب» وكتاب «مراكز الأكر» ، وكتاب «الأصول على تحريكات إقليدس» و«رسالة في المضلع المسبع في الدائرة» ، وكتاب «إخراج الخطين على نسبة» و«رسالة البركار التام» .

«الشرق الأوسط» : «أن ثابت بن قرة درس حركة الشمس وحسب طول السنة الشمسية ٣٦٥ يوماً و٦ ساعات و٩ دقائق و١٠ ثوان ، بالضبط أكثر من الحقيقة بأقل من نصف ثانية . كما حسب ميل دائرة البرج ٢٣ درجة و٣٣ دقيقة و٣٠ ثانية . ويذكر ج . ف . كارمودي في كتابه «أعمال ثابت بن قرة الفلكية» : «أن ثابت بن قرة برز في أرصاده ، وخاصة التي تتعلق بالشمس والقمر ، والتي تتجلى فيها البراهين والحجج التجريبية لا مجرد المنطق أو الفكرة وحدها ، كما صحح الكثير من أعمال بطليموس . وأضاف عمر فروخ في كتابه «عبقرية العرب في العلم والفلسفة» : «أن ثابت بن قرة الحراني استخرج حركة الشمس وحسب طول السنة فكان ما وصل إليه يزيد على طول السنة الحقيقي بمقدار أقل من نصف ثانية» .

وكذلك لمع بين علماء عصره في مقدرة فائقة النظير بإدخاله علم الجبر على علم الهندسة . لهذا يعتبر ابن قرة من الممهدين للهندسة التحليلية . ويقول المؤلف المشهور كارل فنك في كتابه «المختصر في تاريخ الرياضيات» : «إن ثابت بن قرة من مواليد ما بين النهرين دجلة والفرات ، وهو يعتبر أعظم عالم هندسي في القرون الوسطى ، ولقد ترجم وعلق على ثمانية كتب من القطاعات لأبولونيوس وأرخميدس وبطليموس ، التي بقيت مدة طويلة مرجعاً أساسياً في مكتبات العالم» . وأضاف جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية - نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة» : «أن ثابت بن قرة ازدهر في بغداد ، ويعتبر بحق أعظم المهندسين والرياضيين العرب . كان ثابت فيلسوفاً وفلكياً ورياضياً وكيماوياً وطبيباً . وفوق هذا كله كان مترجماً بارزاً . ومن أهم ترجماته أنه صحح الترجمة العربية لكتاب «المجسطي» لبطليموس فأصبح هذا الكتاب سهلاً وسلس التناول» .

اشتهر ثابت بن قرة بين علماء العصور الوسطى بعلم الهندسة ، فكانوا يصفونه بسرعة البديهة ، وبأصالة التفكير ، ولقد مدحه المؤلف الكبير ول ديورانت في كتابه «قصة الحضارة» قائلاً : «إن ثابت بن قرة أعظم علماء عصره في علم الهندسة ، فكان لامعاً بين إخوانه العرب» . وأضاف روبرت ماركس في كتابه «تطورات الرياضيات من علم الحساب إلى علم التفاضل والتكامل» : «أن أعمال أرخميدس الأصيلة عن خواص مسبع الشكل فقدت ، ولكن لحسن الحظ أن مخطوطة لثابت بن قرة في هذا الموضوع باللغة العربية حصل عليها الأستاذ كارل سكوي في مكتبة جامعة القاهرة ، وترجمها إلى اللغة الألمانية عام ١٩٢٩م» .

ومن المفهوم أن الكثير من علماء العلوم في العصور الوسطى كانوا ملمين إلماماً تاماً بمعظم العلوم ، ولكن لم تكن ابتكارات أحدهم إلا في موضوعات محدودة ، ولها علاقة كاملة ببعضها . فأبدع ثابت بن قرة في الهندسة ، والجبر والأعداد المتحابة ، والمربع السحري . وعلق كارل فنك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «أن ثابت بن قرة أعظم عالم عربي في علم الهندسة ، وقد حاول بكل جدارة أن يبرهن الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس التي لم تبرهن حتى الآن ، فكان برهانه يدل على عبقريته لما فيه من العمق وخصب القريحة . وهذه الموضوعة تقول : (إذا قطع قاطع مستقيمين فكانت الزاويتان المحصورتان بينه وبين المستقيمين في إحدى جهتيه أقل من قائمتين فالمستقيمان يلتقيان في تلك الجهة من القاطع إذا مدا إلى غير حد) . وأضاف فلورين كاجوري في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن المسلمين قد بدؤوا دراستهم في علم الهندسة من هندسة إقليدس ، ولهذا فإن ثابت بن قرة لم يترك شيئاً من مؤلفات إقليدس إلا وترجمه وأضاف إليه معلومات جديدة» .

الأعداد المتحابة :

من المعروف لدى علماء الرياضيات أن فيثاغورث ابتكر زوجاً متحاباً من الأعداد (٢٢٠ و٢٨٤) ويروى أنه سئل ذات مرة ما هو الصديق؟ فأجاب أنه «نفس ثانية» فمن هذا المفهوم أطلق على تلك الأعداد «الأعداد المتحابة» ، من هذا المنطلق عرف العددين المتحابين (إذا كان مجموع قواسم أي منهما مساوياً للعدد الآخر) والمراد بكلمة «عدد» هنا هو العدد الطبيعي الموجب ، فمثلاً العددان ٢٢٠ و٢٨٤ عددان متحابان لأن قواسم كل منهما هي :

٢٨٤ : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢ ومجموع قواسم ٢٨٤ = ١ + ٢ + ٢^{٢} + ٧١ + ٢ (٧١) = ٢٢٠ .

٢٢٠ : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١١ ، ٢٢ ، ٤٤ ، ٥٥ ، ١١٠ ، ومجموع قواسم ٢٢٠ = ١ + ٢ + ٢^{٢} + ٥ + ٢ (٥) + ٢^{٢} (٥) + ١١ + ٢ (١١) + ٢^{٢} (١١) + ٥٥ + ٢ (٥٥) = ٢٨٤ .

وهذان العددان عرفا أنهما عددان متحابان عبر التاريخ ، والكثير من علماء الرياضيات اهتموا بالأعداد المتحابة اهتماماً كبيراً . فالعالم الرياضي الفرنسي فيرمات الذي عاش فيما بين (١٦٠١-١٦٦٥م) وكان له شهرة في نظريات الاحتمالات ونظريات الأعداد واستمرار الدالة وحساب التفاضل الذي كان فوق هذا كله مستشاراً لملك فرنسا لمدة ١٧ عاماً ، اكتشف عددين متحابين في عام ١٦٣٦م وهما ١٧٢٩٦ = ٢^{٤} (٢٣) (٤٧) ، ١٨٤١٦ = ٢^{٤} (١١٥١) .

ثم جاء عالم فرنسي آخر ريني ديكارت الذي عاش ما بين (١٥٩٦-١٦٥٠م) وقد اشتهر ديكارت بعلم الهندسة التحليلية وله أعمال أخرى كالمخروطات الهندسية وقانون ديكارت المشهور في علم الجبر ، وقضى

ديكارت عشرين سنة من عمره في دراسة فلسفة الرياضيات والعلوم . أبدع في حقل الهندسة التحليلية ، ولذا يعتبر من الذين طوروها . وابتكر عددين متحابين في عام ١٦٣٨م وهما ٩٣٦٣٥٨٤ = $٢^{٧}$ (١٩١) (٣٨٣) ، ٩٤٣٧٠٥٦ = $٢^{٧}$ (٧٣٧٢٧) . ثم أتى العالم الرياضي النمساوي المشهور ليونارد أويلر وقد عاش فيما بين (١٧٠٧-١٧٨٣م) واشتهر بأعماله في دالَّتي بيتا وغاما ، والمتغيرات المركبة ، ونظريات المعادلات الجبرية والميكانيكا السماوية ، والخط المعروف في علم الهندسة باسمه ، وقد ابتدع أويلر في عام ١٧٥٠م تسعة وخمسين زوجاً من الأعداد المتحابة . ولم يقف اهتمام علماء الرياضيات عند هذا الحد ، بل إن العالم الأمريكي المشهور ليونارد يوجين دكسن الذي عاش فيما بين (١٨٧٤-١٩٥٤م) ونال شهرته العظيمة في الجبر الخطي قد اكتشف عددين متحابين جديدين في عام ١٩١١م .

ولذا نستنتج أن علماء الرياضيات في البلاد الغربية نسوا أن الأعداد المتحابة أدت دوراً عظيماً في الحضارة الإسلامية وتوجد بكثرة في الكتابات الإسلامية الرياضية . ويقول أستاذ الرياضة المشهور أوستين أور في كتابه «نظريات الأعداد وتاريخها» : «إن الأعداد المتحابة عند المسلمين أدت دوراً عظيماً في السحر والتنجيم والتنبؤ بخريطة البروج حتى في الشعوذة والطلاسم» ، وهناك ناس يعتقدون أنها تأتي بالنجاح ، وقد ذكر عبد الرحمن ابن خلدون (المولود بتونس عام ١٣٣٢م) في مقدمته : «أن الأعداد المتحابة كانت إحدى هواياته ، وقال : إن الأشخاص المنشغلين بالطلاسم يؤكدون أن العددين المحابين ٢٢٠ و٢٨٤ لهما تأثير في الربط أو إيجاد صداقة حميمة بين شخصين» .

ويقول س . ب بوير في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «إن القرن التاسع الميلادي كان قرناً مجيداً في الرياضيات الإسلامية لأنه لم ينبغ الخوارزمي في النصف الأول منه فحسب ، بل ولد فيه أيضاً ونبغ واشتهر أبو الحسن ثابت بن قرة الذي عاش فيما بين ٨٢٦-٩٠١م في النصف الثاني منه . وإذا كان الخوارزمي شبيهاً بإقليدس في كونه منشئاً ، فإن ثابت بن قرة عند العرب يشبه بابوس عند الإغريق في كونه معلقاً على الرياضيات العالمية» . ولقد كان ثابت بن قرة أول كاتب يحوز على الشهرة في نقله أعمال إقليدس وأرخميدس وأبولونيوس وبطليموس وأتوشوص من الإغريقية إلى العربية ، ولولا جهود ثابت بن قرة لكان عدد الأعمال الإغريقية الرياضية أقل مما هو معروف الآن ، فمثلاً كنا نعرف الكتب الأربعة فقط عوضاً عن السبعة من مؤلف أبولونيوس والمسمى «المخروطات» .

ولقد استوعب ثابت محتويات مؤلفات الإغريق استيعاباً كاملاً ، حتى إنه اقترح تحويرات وتعميمات عليها . كما أن الفضل العظيم يعود إليه في إيجاد معادلة الأعداد المتحابة التي أعطاها علماء الغرب الأهمية الملحوظة عبر التاريخ ، وقد ذكرنا ذلك آنفاً .

والمعادلة التي ابتكرها ثابت هي كما يلي :

إذا كان كل من س ، ص ، ع أعداداً أولية و ن عدد طبيعي فإن :

$$\text{س} = (3 \times 2^{\text{ن}}) - 1$$

$$\text{ص} = (3 \times 2^{\text{ن} - 1}) - 1$$

$$\text{ع} = (9 \times 2^{2\text{ن} - 1}) - 1$$

إذن س ، ص ، ع أعداد فردية مختلفة و $٢^{\text{ن}}$ س ص ، $٢^{\text{ن}}$ع زوج من الأعداد المتحابة فمثلاً إذا كانت ن = ٢ .

حيث إن، س = $(٣ \times ٢^{\text{ن}}) - ١$

إذن س = $(٣ \times ٢^{٢}) - ١ = (٣ \times ٤) -١ = ١١$

وبما أن ص = $(٣ \times ٢^{\text{ن} - ١}) - ١$

إذن ص = $(٣ \times ٢^{٢ - ١}) - ١ = ٣ \times ٢ -١ = ٥$

وبما أن ع = $(٩ \times ٢^{٢\text{ن} - ١}) - ١$

إذن ع = $(٩ \times ٢^{٤ - ١}) - ١ = (٩ \times ٢^{٣}) - ١ = (٩ \times ٨) - ١ - ٧١$

وبما أن الزوج من الأعداد المتحابة ك = $٢^{\text{ن}}$س ص ، م = $٢^{\text{ن}}$ع .

إذن $٢^{٢}$ (١١) (٥) = ٢٢٠ ، $٢^{٢}$(٧١) = ٢٨٤ وهما عددان متحابان .

أما إذا كانت ن = ٣

س = $(٣ \times ٢^{٣}) - ١ = (٣ \times ٨) - ١ = ٢٣$

ص = $(٣ \times ٢^{٣ - ١}) - ١ = (٣ \times ٤) - ١ = ١١$

ع = $(٩ \times ٢^{٦ - ١}) - ١ = (٩ \times ٢^{٥}) - ١ = (٩ \times ٣٢) - ١ = ٢٨٨ - ١ = ٢٨٧$

وبما أن الزوج من الأعداد المتحابة $٢^{\text{ن}}$ س ص ، $٢^{\text{ن}}$ع

لذا $٢^{\text{ن}}$ س ص = $٢^{٣}$ (٢٣) (١١) = ٢٠٢٤

$٢^{\text{ن}}$ع = $٢^{٣}$ (٢٨٧) = ٨ (٢٨٧) = ٢٢٩٦

* ومن الواجب ملاحظة أن ٢٨٧ = ٧ × ٤١ وهذا يعطي أن ٢٨٧ ليس أولياً .

إذن ٢٠٢٤ ، ٢٢٩٦ هما عددان غير متحابين .

ولثابت بن قرة عدة مخطوطات في مكتبات العالم توجد فيها كل التفاصيل عن الأعداد المتحابة ، ومن المعلومات التي توصلنا إليها من مخطوطة لأحد أصدقائنا ، استطعنا أن نستنبط منها البرهان التالي :

* اعتبر ن = ٤

* س = ٣ × $٢^{٤}$ – ١ = ٣ × ١٦ – ١ = ٤٨ – ١ = ٤٧

* ص = ٣ × $٢^{٤ - ١}$ – ١ = ٣ × $٢^{٣}$ – ١ = ٣ × ٨ – ١ = ٢٣

* ع = ٩ × $٢^{٨ - ١}$ – ١ = ٩ × $٢^{٧}$ – ١ = ٩ × ١٢٨ – ١ = ١١٥١

* ك = $٢^{ن}$ س ص = $٢^{٤}$ (٤٧) (٢٣) = ١٧٢٩٦

* م = $٢^{ن}$ ع = $٢^{٤}$ (١١٥١) = ١٨٤١٦

لاحظ ثابت بن قرة أن كلاً من ٤٧ ، ٢٣ ، ١١٥١ عدد أولي فردي .

وأن مجموع قواسم ١٧٢٩٦ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦+ ٢٣ + ٤٦ + ٩٢ + ١٨٤ + ٣٦٨ + ٤٧ + ٩٤ + ١٨٨ + ٣٧٦ + ٧٥٢ + ١٠٨١ + ٢١٦٢ + ٤٣٢٤ + ٨٦٤٨ = ١٨٤١٦

مجموع قواسم ١٨٤١٦ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ١١٥١ + ٢٣٠٢ + ٤٦٠٤ + ٩٢٠٨ = ١٧٢٩٦

* إذن ١٨٤١٦ و ١٧٢٩٦ عددان متحابان .

ولم يكتف بهذا بل إنه أراد أن يبرهن على صحة معادلته باستخدام المتواليات الهندسية ففحص قواسم العدد ١٧٢٩٦ وجدها عبارة عن ١ ، ٢ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{٤}$ ، ٢٣ ، $٢^{٢}$ (٢٣) ، $٢^{٣}$ (٢٣) ، $٢^{٤}$ (٢٣) ، ٤٧ ، $٢^{٢}$ (٤٧) ،

$٢^{٣}$ (٤٧)، $٢^{٤}$ (٤٧)، ٢٣ (٤٧)، ٢ (٢٣) (٤٧)، $٢^{٢}$ (٢٣) (٤٧)،
$٢^{٣}$ (٢٣) (٤٧) ثم عمم قواسم أي عدد ك كالآتي: ١، ٢، $٢^{٢}$، ....$٢^{ن}$،
س، ٢س، $٢^{٢}$ س ....$٢^{ن}$ س، ص، ٢ص، ....$٢^{ن}$ ص، س ص،
٢س ص، ....$٢^{ن-١}$ س ص. بحيث كل عدد يختلف عن الآخر.

وكذلك قواسم العدد ١٨٤١٦ هي: ١، ٢، $٢^{٢}$، $٢^{٣}$، $٢^{٤}$، ١١٥١، ٢ (١١٥١)، ٢ (١١٥١)، $٢^{٢}$ (١١٥١)، $٢^{٣}$ (١١٥١). وعمم قواسم أي عدد م بطريقة مشابهة للعدد ك وهي: ١، ٢، $٢^{٢}$، ......$٢^{ن}$، ع، ٢ع، $٢^{٢}$ع، ....$٢^{ن-١}$ع بحيث كل عدد يختلف عن الآخر.

من هذا المنطلق استطاع ثابت بن قرة العالم العربي العظيم أن يثبت أن:

ك = $٢^{ن}$س ص، م = $٢^{ن}$ع عددان متحابان كالآتي:

أولاً: برهن أن مجموع قواسم ك = م.

بما أن مجموع قواسم ك = ($٢^{ن+١}$ − ١) + س ($٢^{ن+١}$ − ١) + ص ($٢^{ن+١}$ − ١) + س ص ($٢^{ن}$ − ١) = $٢^{ن}$ (٢ + ٢س + ٢ص + س ص) − (١ + س + ص + س ص).

لذا فإن ١ + س + ص + س ص = ١ + (٣ × $٢^{ن}$−١) + (٣ × $٢^{ن-١}$ − ١) + (٣ × $٢^{ن}$−١) (٣ × $٢^{ن-١}$ − ١)

= ١ + (٣ × $٢^{ن}$ −١) + (٣ × $٢^{ن-١}$ − ١)

+ ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ٣ × $٢^{ن}$ − ٣ × $٢^{ن-١}$ +١

= ٩ × $٢^{٢ن-١}$ = $٢^{ن}$ (٩ × $٢^{ن-١}$)

إذن مجموع قواسم ك = $٢^{ن}$ (٢ + ٢س + ٢ص + س ص − ٩ × $٢^{ن-١}$)

من هذا يكون ٢ + ٢س + ٢ص + س ص − ٩ × $٢^{ن-١}$ = ٢ + (٣ × $٢^{ن+١}$ − ٢)

+ (٣ × $٢^{ن}$ − ٢) + (٣ × $٢^{ن}$ − ١) (٣ × $٢^{ن-١}$ − ١) − ٩ × $٢^{ن-١}$

= ٢ + (٣ × $٢^{ن+١}$ −٢) + (٣ × $٢^{ن}$ − ٢) + ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ٣ × $٢^{ن}$

− ٣ × $٢^{ن-١}$ + ١ − ٩ × $٢^{ن-١}$ = ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ١ = ع

إذن ك = $٢^{ن}$ ع ، ولكن م = $٢^{ن}$ ع مجموع قواسم ك = م

برهن أن مجموع قواسم م = ك

حيث إن مجموع قواسم م = ($٢^{ن+١}$ − ١) + ع ($٢^{ن}$ − ١)

= ($٢^{ن}$ × ٢ − ١) + $٢^{ن}$ ع − ع

= $٢^{ن}$ (٢ + ع) − (١ + ع)

= $٢^{ن}$ (٢ + ٩ + $٢^{٢ن-١}$ −١) − (١ + ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ١)

= $٢^{ن}$ (١ + ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ٩ × $٢^{ن-١}$)

= $٢^{ن}$ (٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ٣ × $٢^{ن-١}$ − ٣ × $٢^{ن}$ + ١)

= $٢^{ن}$ (٣ × $٢^{ن-١}$ − ١) (٣ × $٢^{ن}$ − ١)

= $٢^{ن}$ ص س ، ولكن ك = $٢^{ن}$ س ص

إذن مجموع قواسم م = ك

ولقد أصبح من الممكن جداً بعد اختراع الآلة الحاسبة حساب عدد كبير من أزواج الأعداد المتحابة ، ولذلك بإعطاء الآلة الحاسبة التعليمات الخاصة بمعادلة ثابت بن قرة ، ولقد عرف بالضبط من الأعداد المتحابة لما تحت المليون ١٠٠٠٠٠٠ بواسطة الآلة الحاسبة كما هو معروف من مصادر مختلفة . ويجدر بنا أن نوضح ذلك في الجدول الآتي :

عدد حقيقي موجب	عدد حقيقي موجب	أزواج من الأعداد المتحابة
٢٢٠ = ٢^{٢} (٥) (١١)	٢٨٤ = ٢^{٢} (٧١)	٢٢٠ ، ٢٨٤
١١٨٤ = ٢^{٥} (٣٧)	١٢١٠ = ٢ (٥) (١١)^{٥}	١١٨٤ ، ١٢١٠
٢٦٢٠ = ٢^{٢} (٥) (١٣١)	٢٩٢٤ = ٢^{٢} (١٧) (٤٣)	٢٦٢٠ ، ٢٩٢٤
٥٠٢٠ = ٢^{٣} (٥) (٢٥١)	٥٥٦٤ = ٢^{٢} (١٣) (١٠٧)	٥٠٢٠ ، ٥٥٦٤
٦٢٣٢ = ٢^{٣} (١٩) (٤١)	٦٣٦٨ = ٢^{٥} (١٩٩)	٦٢٣٢ ، ٦٣٦٨
١٠٧٤٤ = ٢^{٣} (١٧) (٧٩)	١٠٨٥٦ = ٢^{٣} (٢٣) (٥٩)	١٠٧٤٤ ، ١٠٨٥٦
١٢٢٨٥ = ٣^{٣} (٥) (٧) (١٣)	١٤٥٩٥ = ٣ (٥) (٧) (١٣٩)	١٢٢٨٥ ، ١٤٥٩٥
١٧٢٩٦ = ٢^{٤} (٢٣) (٤٧)	١٨٤١٦ = ٢^{٤} (١١٥١)	١٧٢٩٦ ، ١٨٤١٦
٦٣٠٢٠ = ٢^{٢} (٥) (٢٣) (١٣٧)	٧٦٠٨٤ = ٢^{٢} (٢٣) (٨٢٧)	٦٣٠٢٠ ، ٧٦٠٨٤
٦٦٩٢٨ = ٢^{٤} (٤٧) (٨٩)	٦٦٩٩٢ = ٢^{٤} (٥٣) (٧٩)	٦٦٩٢٨ ، ٦٦٩٩٢
٦٧٠٩٥ = ٣^{٢} (٥) (٧) (٧١)	٧١١٤٥ = ٣^{٢} (٥) (١٧) (٣١)	٦٧٠٩٥ ، ٧١١٤٥
٦٩٦١٥ = ٣^{٢} (٥) (٧) (١٣) (١٧)	٨٧٦٣٣ = ٣^{٢} (٧) (١٣) (١٠٧)	٦٩٦١٥ ، ٨٧٦٣٣
٧٩٧٥٠ = ٢ (٥)^{٣} (١١) (٢٩)	٨٨٧٣٠ = ٢ (٥) (١٩) (٤٩٧)	٧٩٧٥٠ ، ٨٨٧٣٠

المربع السحري :

إذا جمعت الأرقام في المربع السحري عمودياً ، أو أفقياً أو قطرياً يكون مجموعها متساوياً وأشهر هذه المربعات المربع الثلاثي في الشكل الآتي :

٦	٧	٢
١	٥	٩
٨	٣	٤

يتكون هذا المربع من تسعة أرقام في تسعة خانات ، ومجموع هذه الأرقام ٤٥ وإذا وزعت في ثلاثة صفوف أو عمود بمجموع ١٥ ، ويجب أن يكون مجموع كل من القطرين ١٥ أيضاً .

ومن خواص هذا المربع السحري الثلاثي :

١ - أن مجموع الثلاثة أرقام التي يحتوي عليها الصف أو العمود ، أو القطر عدد فردي ، لهذا يجب أن تكون الأرقام التي يحتوي عليها الصف أو العمود أو القطر إما جميعها فردية أو يكون منها رقمان زوجيان .

٢ - لتكوين هذا المربع الثلاثي ضع ٥ في الخانة الوسطى ، ثم ضع ٢ في إحدى الزوايا وضع ٨ في الزاوية المقابلة لها على القطر ، ثم ضع ٤ في الزاوية التي بين ٢ ، ٨ وضع ٦ في الزاوية المقابلة لها على القطر ، ثم وزع الأعداد الباقية في الخانات على شرط أن يكون مجموع كل ثلاثة أعداد في خط مستقيم يساوي ١٥ كما في الشكل .

٣ - احتلت الأرقام الزوجية ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ الأركان فسماها العرب بدوح ، وتوسطت الأرقام الفردية المربع خمسة أرقام فسماها العرب خمسة وخمسية .

دور بعض العلماء الذين اهتموا بالمربع السحري :

اهتم الكثير من علماء الرياضيات اهتماماً بالغاً بالمربع السحري ، ففي اليابان كتب العالم الرياضي المشهور مورا ماتسوكود يوموسي عام ١٦٦٣م عدة كتب في علم الحساب والهندسة ، أعطى الكثير من وقته فيها للمربع السحري . أما في بلاد الغرب فقد صرف علماء العلوم جزءاً من وقتهم فيما يعتبرونه وسيلة للتسلية ، مثل لغز الكلمات المتقاطعة التي تحظى الآن بعناية عظيمة في الجرائد والمجلات كوسيلة للتسلية والترفيه . وقد برع العالم المشهور أورثر كيلي (١٨٢١-١٨٩٥م) في الرياضة البحتة وله نتاج مرموق في المربعات السحرية والمجموعة الجبرية المهمة والدالة الزائدة والمحدودة ، والمصفوفات والمجموعة المهمة المنتهية ، والهندسة غير الإقليدية ، ونظرية الثبوت الجبري ، وقد أدت هذه النظرية إلى إعطاء كيلي الشهرة العظيمة عند علماء الرياضة والانتقاد الحاد من بعض الفيزيائيين منهم تايت الذي قال : «مع الأسف أن كيلي الموهوب يقضي وقته في مثل نظريات المربع السحري» ، والجدير بالذكر أن الفيزيائيين هم الذين يستخدمون هذه النظرية ويطورون العديد من المربعات السحرية وقد نشر لكيلي ما يقارب من ألف مقالة ومعظم أعماله الرياضية موجودة في جامعة كمبريدج وهي (١٣) مجلداً . وبرع في الولايات المتحدة بنجامين فرانكلين (١٧٠٩-١٧٩٠م) في علم الفيزياء فكون عدداً كبيراً من المربعات السحرية ، ولمع بين معاصريه في جميع فروع الرياضة النمساوي ليونهارد أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣م) الذي ذكرناه آنفاً .

وقد طور المسلمون المربعات السحرية حتى إنهم استعملوا في بعض الحالات الحروف الأبجدية بدلاً من الأرقام مثل «أبجد هوز حطي كلمن» فلو اعتبرنا المربع السحري الثلاثي :

أ	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

نصل إلى ما يلي :

ب ٢	ز ٧	و ٦
ط ٩	هـ ٥	أ ١
د ٤	جـ ٣	ح ٨

معادلة المربع السحري :

أولى ثابت بن قرة المربعات السحرية عناية كبيرة فطور معادلة المربع السحري كالآتي :

* ترتيب الأعداد الصحيحة من ١ إلى $ن^{٢}$

* مجموع الأرقام في أي عمود ، أو صف ، أو قطر يساوي جـ

* يوجد ن عموداً

* مجموع الأرقام في أي مربع سحري يساوي جـ ن (١)

* $١ + ٢ + ٣ + \ldots\ldots + ن^{٢} = \frac{ن^{٢}\,(١ + ن^{٢})}{٢}$ (٢)

* من (١) و(٢) نجد أن ن جـ = $\frac{\text{ن}^{٢}\,(١+\text{ن}^{٢})}{٢}$ ملحوظ أن

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن}\,(١+\text{ن}^{٢})}{٢}$$

مثال : المربع الرباعي :

المكون من ١ + ٢ + ٣ + ... + ٤^{٢} = ١ + ٢ + ٣ + ... + ١٦

حيث إن ن = ٤

مجموع كل صف أو عمود أو قطر = جـ = $\frac{\text{ن}\,(١+\text{ن}^{٢})}{٢} = \frac{٤\,(١+٤^{٢})}{٢}$

لذلك جـ = ٢ (١٧) = ٣٤

٤	١٤	١٥	١
٩	٧	٦	١٢
٥	١١	١٠	٨
١٦	٢	٣	١٣

للمربع السحري الآن دور كبير في الهند والصين والجزر المجاورة لهما حيث إن بعضهم يعتقد أن المربع السحري حام لهم من المصائب ، لذلك يوجد في كأس الدواء وطاسة البخت والعقود الذهبية المعلقة بالعنق . كما أن البعض يعتبرون المربع السحري أيضاً يحمي الخائف من البلية .

مؤلفاته :

خلف ثابت بن قرة مؤلفات كثيرة في الرياضيات ، والطب ، والفلك ، والفلسفة كادت تكون مكتبة متكاملة في جميع فروع المعرفة . وسنكتفي بذكر بعض كتبه ورسائله ومقالاته العديدة منها :

١ - كتاب العمل بالكرة .

٢ - كتاب ترجمة واختصار المجسطي لبطليموس .

٣ - كتاب ترجم فيه كتاب جغرافية المعمورة لبطليموس .

٤ - كتاب علق على كتاب الكرة والأسطوانة لأرخميدس .

٥ - كتاب شرح فيه كتاب المعطيات في الهندسة لإقليدس .

٦ - كتاب في قطع الأسطوانة .

٧ - كتاب في المخروط المكافئ .

٨ - كتاب في مساحة الأشكال .

٩ - كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها .

١٠- رسالة في أن الخطين المستقيمين إذا خرجا على أقل من زاويتين قائمتين التقيا في جهة خروجهما .

١١- كتاب في المسائل الهندسية .

١٢- رسالة في المربع وقطره .

١٣- رسالة في الأعداد المتحابة .

١٤- كتاب في إبطاء الحركة في فلك البروج .

١٥- كتاب في أشكال إقليدس .

١٦- رسالة في عمل شكل مجسم ذي أربع عشرة قاعدة تحيط به كرة معلقة .

١٧- رسالة عن مسيرة القمر .

١٨- كتاب حساب الهيئة .

١٩- كتاب في تركيب الأفلاك .

٢٠- رسالة في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية .

٢١- كتاب ترجم فيه كتاب المخروطات في أحوال الخطوط المنحنية لأبولونيوس .

٢٢- كتاب المختصر في الهندسة .

٢٣- كتاب شرح وعلق فيه على كتاب أصول الهندسة لمنالاوس .

٢٤- كتاب في تسهيل المجسطي .

٢٥- كتاب المدخل إلى المجسطي .

٢٦- كتاب في علة الكسوف .

٢٧- رسالة بحث عن الحالة «إذا وقع خط مستقيم على خطين» .

٢٨- رسالة في المثلث القائم الزاوية .

٢٩- رسالة في حركة الفلك .

٣٠- رسالة في رؤية الأهلة بالجنوب .

٣١- رسالة في رؤية الأهلة من الجداول .

٣٢- كتاب في أشكال المجسطي .

٣٣- رسالة فيما يظهر من القمر من آثار الكسوف وعلاماته .

٣٤- كتاب المدخل على المنطق .

٣٥- كتاب المدخل إلى إقليدس .

٣٦- كتاب في طبائع الكواكب وتأثيراتها .

٣٧- رسالة في استواء الوزن .

٣٨- رسالة فيما ترك «ثانون» في حساب الكسوف للشمس والخسوف للقمر .

٣٩- كتاب مختصر في علم النجوم .

٤٠- كتاب المدخل إلى الأعداد .

٤١- رسالتان في أعمال أرخميدس بالهندسة .

٤٢- رسالة في الدوائر المتماسة .

٤٣- رسالة في الجبر وفيها بيّن علاقة الجبر بالهندسة وكيفية التفاعل بينهما .

٤٤- رسالة في حساب خسوف الشمس والقمر .

٤٥- رسالة في المخروط المسمى المكافئ .

٤٦- رسالة عن أصول الهندسة لإقليدس .

٤٧- رسالة في كتاب المناظر لإقليدس .

٤٨- رسالة في المخروط لثيودسيوس .

٤٩- ثمان رسائل عن المخروط معتمدة على مؤلفات أبولونيوس .

٥٠- مقالة علق فيها على الكرة المتحركة لأبولونيوس .

٥١- رسالة مشهورة فيها أوجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره ، لهذا اعتبر ثابت بن قرة الممهد لحساب التكامل .

٥٢- كتاب عن الحسابات الفلكية فيها حسب مدة السنة النجمية .

٥٣- كتاب عن الأشكال الهندسية .

٥٤- كتاب في مساحة الأشكال المجسمة .

٥٥- كتاب الأهلة .

٥٦- رسالة في السنة الشمسية .

٥٧- رسالة في علم الأعداد .

٥٨- مقالة في شكل القطاع .

٥٩- رسالة في الحجة المنسوبة إلى سقراط .

٦٠- مقالة في الحصى المتولد في المثانة .

٦١- مقالة عن وجع المفاصل والنقرس .

٦٢- رسالة في السبب الذي من أجله جعلت مياه البحر مالحة .

٦٣- رسالة في البياض الذي يظهر في البلدان .

٦٤- كتاب جوامع الأدوية المفردة لجالنيوس .

٦٥- كتاب في الجدري والحصبة .

٦٦- كتاب سبب كون الجبال .

٦٧- كتاب في النبض .

٦٨- كتاب اختصار كتاب ما بعد الطبيعة لأرسطو .

٦٩- كتاب مختصر في الأصول من علم الأخلاق .

٧٠- كتاب في الطريق إلى اكتساب الفضيلة .

٧١- كتاب في تشريح بعض أعضاء الطيور .

كان ثابت بن قرة متجهاً في أول أمره إلى التجارة إذ كان صرافاً في حران ، ولكنه عدل عن هذا ، ووفق في دراسته لعلمي الرياضيات والفلسفة ، فبرع في الرياضيات بجميع فروعها ، وأضاف إليها إضافات عظيمة أثارت إعجاب علماء الغرب ودهشتهم ، وقد ذاع صيت ثابت بن قرة بين معاصريه من علماء العرب والمسلمين حتى لقب بـ«مهندس العرب» ، كما اشتهر إلى جانب ذلك بالطب والصيدلة فصنف كتاباً في أوجاع الكلى والمثانة ، وآخر في العقاقير ، مما يدل على اتساع معرفته وشموليتها .

وقد عمم نظرية مثلث قائم الزاوية ، وابتكار قانونين أحدهما لإيجاد الأعداد المتحابة والآخر للمربعات السحرية ، لا يرجع لأي عالم غربي ، بل يعود لعالمنا العربي العظيم ثابت بن قرة ، ولكن علماء الرياضيات في أوروبا وأمريكا الذين صارت لهم السيطرة التامة على العلوم بعد القرن السابع الهجري (الثالث عشر الميلادي) تجاهلوا الخدمة التي قدمها ثابت بن قرة للحضارة الإنسانية ، بل إن من بين هؤلاء من يؤمن إيماناً كاملاً بأن عقلاً عربياً لا يمكن أن يكون هو أساس نظريات جليليو ، وقاوس ، ونيوتن ، وأويلر ، وفرادي ، وغيرهم ، ولا يرجع هذا إلى مجرد صدفة ، بل يعود إلى أمرين مهمين : أحدهما : تحامل وإجحاف الغربيين على التراث العربي الإسلامي ، وثانيهما : إهمال العرب لتراثهم مما ساعد الغربيين على هذا الاعتقاد .

ثابت بن قرة من رواد العلماء العرب الذين تلقوا العلم للعلم ، وانكبوا عليه بغية الاستزادة منه . ولقد خلف ثابت بن قرة أحفاداً من كبار الشخصيات في تاريخ العلوم ، منهم على سبيل المثال محمد بن جابر بن سنان الذي يلقب بالبتاني ، واضع الجداول الفلكية ، التي كانت على مستوى كبير من الإتقان والدقة .

*** ابن الهيثم :**

هو أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم والذي حرف اسمه الأوروبيون إلى «Al-Hazen» ولد في البصرة عام (٣٥٤هـ = ٩٦٥م) ونشأ وتعلم فيها وعمل كاتباً هناك ، وزار بغداد عدة مرات للتعرف على علمائها . لقد بدأ ابن الهيثم حياته العلمية في الفترة الذهبية للحضارة العربية والإسلامية ، في حين اكتمل نقل كتب الفلسفة والهندسة والرياضيات والطب وغيرها من اللغة اليونانية إلى

اللغة العربية ، وبدأت فترة الإبداع والابتكار ، حيث ظهر قبل هذه الحقبة أعلام أجلاء أمثال الكندي والفارابي في الفلسفة والرازي في الطب والخوارزمي وثابت بن قرة في الرياضيات وجابر بن حيان في الكيمياء وأبو الوفاء البوزجاني والبلخي في الفلك وغيرهم كثيرون . وتوفي ابن الهيثم في مصر عام (٤٣٠هـ = ١٠٣٩م) حيث ذهب إلى القاهرة وعاش فيها في عهد الخليفة الحاكم بأمر الله الفاطمي وحصل على تقدير كبير في بلاطه ، قال عنه ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «إن ابن الهيثم لم يترك علماً من العلوم إلا وكتب فيه ، وأشهرها علم الهندسة وعلم الفلك وعلم الجبر وفن المزاول (أي الساعات الشمسية) وأخذ الشهرة العظيمة في علم البصريات . وأضاف عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الإسلامية» قائلاً : «طبق العرب الهندسة على المنطق ، فألف ابن الهيثم كتاباً في ذلك ، جمع فيه الأصول الهندسية والعددية من كتاب إقليدس وأبولونيوس ، ونوعت فيه الأصول وقسمت وبرهن عليها براهين نظمت من الأمور التعليمية والحسية والمنطقية حتى انتظم ذلك مع انتقاض تواليف إقليدس وأبولونيوس . كما وضع ابن الهيثم كتاباً طابق فيه بين الأبنية والحفور على الأشكال الهندسية» .

كان ابن الهيثم أعظم علماء العصور الوسطى في علم الطبيعة ، وأحد عظماء علماء الطبيعة في القرن العشرين . يذكر ابن أبي أصيبعة في كتابه «عيون الأنباء في طبقات الأطباء» : «أن ابن الهيثم كان متفنناً بالعلوم ، عنده ذكاء خارق للعادة لم يماثله أحد من أهل زمانه ، لخص وعلق على كتب أرسطو طاليس وجالينوس . كان ملماً بأصول مهنة الطب وقوانينها ولكنه لم

يمارسها . وأضاف سينجر في كتابه «ملخص تاريخ العلوم» : «أن كتاب ابن الهيثم «المناظر» بعيد جداً من أن يكون له مثيل بين مصنفات اليونان وغيرهم من الحضارات السابقة» . أما مصطفى نظيف فيقول في كتابه «الحسن بن الهيثم بحوثه وكشوفه البصرية» : «شهد ابن الهيثم عصراً صاخباً بجدية الحركة الفكرية المتدفقة ، مزدهراً بشتى الآراء ، لا في أمور الاعتقادات والمذاهب الشرعية ، ولا في أمور اللغة والأدب فحسب ، بل في الأمور الفلسفية والعقلية والعلوم التعليمية أيضاً . فقضى في صبر ومثابرة مرحلة طويلة من حياته كانت بغيته الإلمام بنواحي النشاط الفكري السائد في ذلك العصر . وأخذ يدرس كل ما وقعت عليه يداه مما كان متوافراً عن كتب المتقدمين» . أما توفيق الطويل فيقول في كتابه «العرب والعلم في عصر الإسلام الذهبي ودراسات علمية أخرى» : «أما ابن الهيثم فقد كان عالماً طبيعياً رياضياً ، وقدر له أن يكون منشئ علم الضوء غير منازع ، إذ ميزت دراساته دقة أوصافه للعين وإدراك الرؤية وتفسير ظاهرة الانكسار الجوي والرؤية المزدوجة» .

ويروي هورد ايفز في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن ابن الهيثم قال : لو كنت في مصر لعملت في نيلها عملاً يعود بالنفع الكثير على سكانها والعالم أجمع ، وذلك بالسيطرة على فيضان مياه النيل ، فوصل هذا الكلام إلى الحاكم بأمر الله الفاطمي الذي تولى الحكم في مصر عام (٣٨١هـ = ٩٩٦م) ، فطلب ابن الهيثم وقدم له كل تكريم وحفاوة وعهد إليه بتنفيذ ما كان يقول ، فأجرى ابن الهيثم اللازم لدراسة مجرى النيل حتى وصل إلى «أسوان» فوجد أن المصريين قد قاموا بإنشاءات كبيرة هناك لم يتح المجال إضافة شيء ما إليها

في ظل الإمكانات التي كانت متوفرة آنذاك ، فاعتذر للحاكم عن خطئه وقبل الحاكم عذره ، ثم استمر اهتمامه وعنايته بابن الهيثم غير أن ابن الهيثم خشي أن يغير الحاكم فكرته حيث إنه كان معروفاً بالتقلب والإقدام على سفك الدماء فعمد ابن الهيثم إلى الاختفاء في مكان بعيد عن الأنظار خشية من بطش الحاكم به ، وفي هذه الحقبة من الزمن بقي يبحث ويؤلف في مخبئة حتى إن الكثير من علماء العلوم يعتقدون أن هذه الفترة كانت أكثر إنتاجاً بالنسبة لفترات حياته الأخرى» .

واعتبر كل من أرسطو طاليس وابن خلدون علم البصريات جزءاً لا يتجزأ من علم الهندسة ، ولهذا السبب نظر إلى ابن الهيثم كعالم رياضي في علم الهندسة منذ زمن بعيد ، وقد درس ابن الهيثم وترجم مؤلفات «إقليدس» و«أبولونيوس» وركز على دراسة (الإدراك الحسي) الذي يشرح أن الأجسام كبيرة إذا كانت قريبة ، وصغيرة إذا كانت المسافة بعيدة ، كما أوضح أيضاً التعليل العلمي لكون الأشياء تظهر كبيرة تحت الماء وخلف الأجسام الشفافة ، وناقش ظواهر طبيعية كثيرة وبرهن صحتها هندسياً . ولقد أعطى معلومات كثيرة عن القمر وتحركاته حول مداره وأثبت بطرق عديدة خسوفه .

لقد اعترف علماء المشرق والمغرب بالدور العظيم الذي قام به ابن الهيثم لخدمة الحضارة الإنسانية ، ويمكن تلخيص ذلك بقول عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الإسلامية» : «كان ابن الهيثم من أعظم علماء العرب في علم الطبيعة ، بل أعظم علماء الطبيعة في القرون الوسطى ، ومن علماء البصريات القليلين المشهورين في العالم كله ، فكانت مؤلفاته ومباحثه المرجع المعتمد عند أهل أوروبا حتى القرن السادس عشر للميلاد ،

فلقد بقيت كتبه منهلاً عاماً ينهل منه أكثر علماء القرون الوسطى كروجر وباكن وكبلر وليونارد فنشي وبرتيلو وغيرهم ، وكتبه هذه وما تحويه من بحوث مبتكرة في الضوء هي التي جعلت ماكس مايرهوف يقول بصراحة : إن عظمة الابتكار الإسلامي يتجلى في البصريات» . ولا نبالغ إذا حسبنا ابن الهيثم واضعاً لعلم الفيزياء والبصريات على أسسها العلمية الصحيحة ، فهو الذي أنكر نظرية «إقليدس» و«بطليموس» في علم البصريات التي تقول : «إن العين ترسل أشعتها على الأشياء» فابن الهيثم صحح هذه النظرية في كتابه «علم البصريات» وأثبت أن عكس نظرية «إقليدس» و«بطليموس» هو الصحيح . وفي هذا الكتاب تظهر نظرية ابن الهيثم المشهورة التي تقول : «إن الشعاع لا يصدر عن العين إلى الأجسام ، ولكن الأجسام هي التي ترسل أشعتها إلى العين» .

كما أنه بحث في العيـــن وتكوينها وشرح وظائف جميـــع أجزائها ويذكـــر مصطفى نظيف في كتابه «البصريات الهندسية والطبيعية» : «أن ابن الهيثم وصف عـين الإنسان بقوله : عين الإنسان تكاد تكون كرية الشكل يحيط بها من الخلف حول ما يقرب من خمسة أسداس سطحها غلاف صلب معتم يسمى الصلبة (Sclerotic) يخترقه من الخلف العصب البصري (Optical nerve) وتكسو سدها الأمامي غطاء شفاف محدب يسمى القرنية (Cornea) وهو بمثابة الجزء الأمامي من الصلبة ، ومن خلف القرنية حاجز معتم يسمى الحدقة أو القزحية (Iris) يختلف لونه باختلاف الأشخاص ، وبالحدقة فتحة مستديرة قابلة للاتساع والضيق تسمى إنسان العين (Pupil) ومن خلف الحدقة عدسة محدبة الوجهين وجهها الخلفي أكثر تحدباً من وجهها الأمامي تسمى العدسة الجليدية أو البلورية (Crystalline Lens)

وهذه العدسة متصلة عند حافتها بعضلات (Ciliary Muscles) قابلة للتقلص والارتخاء» . ويقول ماكس مايرهوف في مقالة بعنوان العلوم والطب نشرت في كتاب «تراث الإسلام» : «كان ابن الهيثم أول من رتب أقسام العين ورسمها بوضوح تام . ووضع لأقسامها أسماء أخذها عنه الطب الغربي» .

ويذكر مصطفى نظيف في كتابه «الحسن بن الهيثم بحوثه وكشوفه» : «أن ابن الهيثم عَرَّف الضوء بتعريفين مختلفين ، أحدهما : أن الضوء حرارة نارية تنبعث من الأجسام المضيئة بذواتها كالشمس أو النار أو الجسم المتوهج ، وأنه إذا أشرق على جسم كثيف أسخنه ، وإذا انعكس عن مرآة مقعرة واجتمع عند نقطة واحدة ، وكان عندها جسم يقبل الاحتراق أحرقه . ويعتبر ابن الهيثم أن ماهية الأضواء الذاتية وماهية الأضواء العرضية واحدة ، وأن للضوء وجوداً ذاتياً ، وأن الإبصار إنما هو بفعل هذا الضوء الذي يشرق من المبصر وينفذ في المشف إلى البصر» . كما يذكر مصطفى نظيف في كتابه «الحسن ابن الهيثم بحوثه وكشوفه» أن ابن الهيثم قسم الضوء إلى قسمين :

القسم الأول : الأضواء التي تشرق من الأجسام المضيئة بذواتها كضوء الشمس وضوء النار ، وسماها «الذاتية» .

القسم الثاني : وهي التي تشرق من الأجسام التي ليست مضيئة بذاتها ، وإنما تشرق منها إذا كانت بجوار الأجسام المضيئة بذاتها أو المستضيئة بغيرها وسماها «الأضواء العرضية» .

وقد عُدَّ ابن الهيثم من أعظم علماء المسلمين في جميع فروع المعرفة وخاصة علم «الفيزياء» ومن أعظم الباحثين في علم الضوء في جميع العصور .

كما له مؤلفات كثيرة في الطب والفلسفة والمنطق . ونال شهرة ملموسة بكتابه «المناظر» الذي يحتوي على اكتشافات كثيرة في «الفيزياء» ودراسات عميقة في حقلي انعكاس وانكسار الأشعة وقد ترجم هذا الكتاب إلى اللغة اللاتينية وبقي المرجع الوحيد في هذا الحقل حتى القرن الحادي عشر الهجري (السابع عشر الميلادي) في جميع أنحاء العالم وخاصة في أوروبا . قال روز بول في كتابه «المختصر في تاريخ الرياضيات» : «إن ابن الهيثم برهن على نظريات كثيرة في علم «الفيزياء» الحديثة كانكسار الأشعة مما أدى إلى تقدم هذا العلم إلى ما هو عليه الآن . وأضاف قائلاً : «إن عمل ابن الهيثم في البصريات يفوق عمل (إقليدس وبطليموس)» .

ويقول مصطفى نظيف في كتابه «الحسن بن الهيثم بحوثه وكشوفه البصرية» ابن الهيثم وموضوع الخزانة المظلمة ذات الثقب : «إن امتداد الأضواء على سمت الخطوط المستقيمة تؤدي رأساً إلى أن الضوء المشرق من جسم مبصر إذا نفذ من ثقب ضيق في حاجز واستقبل على حاجز أبيض من خلفه ، تكونت على هذا الحاجز صورة منكوسة للجسم . ويستعمل عادة للحصول عليها جهاز أو آلة تسمى في كتب الضوء الابتدائية (الخزانة المظلمة ذات الثقب) ويطابق هذا الاسم اسمها اللاتيني الذي عرفت به في القرون الوسطى وفي عصر النهضة . ومن المتواتر نسبة الفضل في الكشف عن تكون الصورة على هذه الصفة إلى (دلايورتا) الذي أورد ذكر هذه (الخزانة المظلمة) ووصفها في كتاب نشر له في سنة ١٥٨٩م . ولكن مما لا شك فيه أن ابن الهيثم تناول دراسة نفوذ الأضواء من الثقوب . وأغلب الظن أن الاسم (Crmesa Obscura) ترجمة حرفية للعبارة العربية (البيت المظلم) الذي ترد كثيراً في أقوال ابن الهيثم» .

ولمح درك ستروِيك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» إلى : «أن ابن الهيثم أعطى دراسة وافية عن طريق تحديد موضع صورة نقطة مضيئة في مرآة أسطوانية الشكل إذا ما عرف كل من النقطة والعين» وتقود هذه المسألة إلى حل المسألة المعروفة عند الأوروبيين باسم مسألة الهيثم ، وهي التي تتعلق بكيفية رسم خطين في مستوى دائرة يتلاقيان في نقطة على المحيط ويرسمان زاويتين متساويتين مع الخط العمودي في تلك النقطة ، وتؤدي هذه إلى معادلة جبرية من الدرجة الرابعة أ س^{٤} + ب س^{٣} = جـ . وقد حلها ابن الهيثم بطريقة القطع الزائد ، أي : بواسطة تقاطع دائرة مع قطع مخروطي زائد .
وفي القرن الحادي عشر الهجري (السابع عشر الميلادي) أعطى العالم الهندسي المشهور كريسشن هيوجنس الذي ولد عام ١٦٢٩م وتوفي عام ١٦٩٥م ، اهتماماً كبيراً لهذه المسألة ، ولا يقل عنه اهتماماً عالم القرن السابع عشر الميلادي الإنجليزي إسحاق باور الذي عاش فيما بين (١٦٣٠-١٦٧٧م) . قال هورد ايفز في كتابه «مقدمة تاريخ الرياضيات» : «إن ابن الهيثم الذي عاش فيما بين (٩٦٥م إلى ١٠٣٩م) ، قد اشتهر بنظرياته المعروفة لدينا نحن الرياضيين برسائل ابن الهيثم ، ولا شك أنه أعظم رياضي مسلم في ذلك العصر ، وأعظم فيزيائي مسلم في جميع العصور ، وفضله لا ينسى بحكم مؤلفاته المشهورة بالبصريات» .

ولقد درس إنتاج علماء اليونان في حقل الهندسة والفلك وعلق على الكثير . ويقول محمد فائز القصري في كتابه «مظاهر الثقافة الإسلامية وأثرها في الحضارة» : «الحسن بن الهيثم أبدى الشك في نظرية أرسطو طاليس وبطليموس القائلة : إن الكرة الأرضية مركز الكون والأفلاك تدور حولها . وناقش هذا الفرض فما وجده مقنعاً ، ولهذا قال : من الممكن أن يتصور الإنسان

أوضاعاً أخرى وحركات سماوية غير التي رآها أرسطو ويطليموس وأن هناك مجموعة شمسية تدور . وفعلاً بعد ابن الهيثم بألف سنة توصل نيوتن وكوبرنيكس إلى نظرية المجموعة الشمسية وأن الكرة الأرضية إحداها» .

إن المنهج العلمي الذي سلكه ابن الهيثم في بحوثه وكشوفه في الضوء والبصريات والذي يعده علماء الغرب من مبتكرات العصر الحديث ، ولكن حقيقة الأمر أن صاحب هذا المنهج هو ابن الهيثم ؛ لأنه بنى منهجه العلمي على استخراج القانون العام من مفردات الوقائع ، وهذا ما يسمى الآن بالاستقراء والقياس والاستنباط ، والذي مكن ابن الهيثم من اتباع المنهج العلمي الفريد هو كونه رياضياً وفيلسوفاً ، فالرياضيات ساعدته على تحليل أبحاثه وبرهنتها ، أما الفلسفة فساعدته على التعمق في الأمور ، وحسن التبويب . ومما تقدم يتضح جلياً أن صاحب المنهج العلمي هو ابن الهيثم وليس فرانسيس بيكون[1] كما يدعيه الغرب . ولكن يجب أن لا ننسى أن بيكون قدم خدمات جليلة بهذا المضمار ويذكر جوزيف هيل في كتابه «الحضارة العربية» : «أن الطريقة التي اتبعها ابن الهيثم في بحوثه وكشوفه هي المنهج العلمي ، ويكون بهذا قد سبق بيكون الذي ينسب إليه هذا المنهج . والجدير بالذكر هنا أن بحوث وكشوف ابن الهيثم قد أغنت اللغة العربية في المفردات والمصطلحات العلمية التي لا تزال يتداولها العلماء في العلوم في المعمورة .

وإنتاج ابن الهيثم معروف لدى أوروبا ، وخاصة فيما بين القرنين السادس والسابع الهجريين (الثاني عشر والثالث عشر الميلاديين) بواسطة جون

---

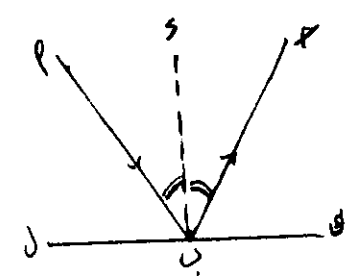
(١) فرانسيس بيكون إنجليزي الأصل ولد في لندن وعاش فيما بين (١٥٦١-١٦٢٦م) . له شهرة في القانون والفلسفة والمنهج العلمي . وقد اهتم بيكون بالتفلسف النظري في مبادئه .

بيكهام . ولقد اخترع العدسات المكبرة التي كانت إيطاليا أول بلد استفاد منها . كما نهل من ابتكارات ابن الهيثم علماء كثيرون وذلك في القرن الحادي عشر الهجري (السابع عشر الميلادي) وفي مقدمتهم العالم المشهور كبلر . ولقد قال كيلي في كتابه «تاريخ الفلك» : «إن مؤلفات ابن الهيثم لها طابع رياضي خاص ، وخاصة في علم الهندسة ، وهو بدون شك أول من شرح حدوث (قوس قزح) والكسوف والخسوف وعلم الظل والعدسات المقعرة والمحدبة ، كما قام باكتشافات عديدة مثل اكتشافه طريقة التوسط والتي في بعض الأحيان تعرف باسم «طريقة التناسب» . والجدير بالذكر أن طريقة التوسط التي سبق أن تكلمنا عنها «طريقة جيدة تمتاز بسهولتها لإيجاد الجذر الحقيقي التقريبي ، والكثير من علماء الرياضيات يستعملونها ويفضلونها على طريقة الخطأين لصاحبها العالم المسلم الجليل محمد بن موسى الخوارزمي وعلى طريقة الميزان لصاحبها بهاء الدين العاملي» .

يتكلم مصطفى نظيف عن الانعكاس في كتابه «البصريات الهندسية والعلمية» فيقول : «إن ابن الهيثم تناول في بحوث الشعاع الساقط والمنعكس :

* فرض أن ك ل يمثل السطح الأفقي لماء موضوع في إناء .

* فرض أن أ ب شعاع يقع على السطح عند ب وأنه ينعكس فيسير في اتجاه ب جـ .

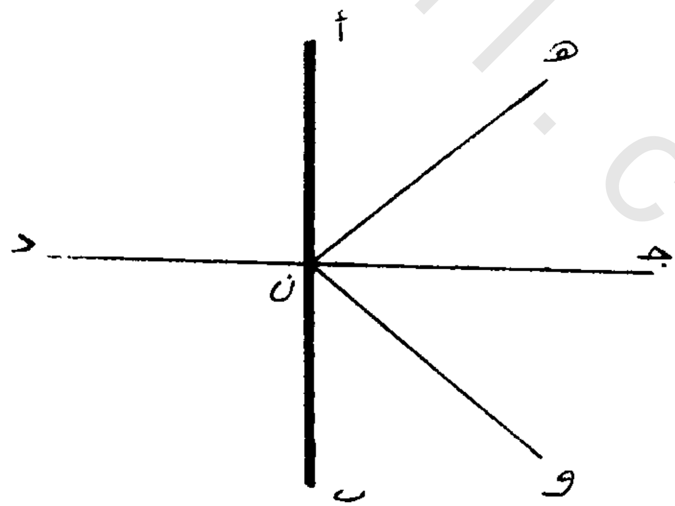


* الشعاع أ ب الواقع على السطح ك ل يسمى الشعاع الساقط ، والشعاع ب جـ المرتد عنه يسمى الشعاع المنعكس ، ونقطة ب وهي موضع تقابل الشعاع

الساقط بالسطح تسمى نقطة السقوط ، والسطح ك ل الذي يحدث عنده الانعكاس يسمى السطح العاكس ، والعمود ب د المقام على السطح العاكس عند نقطة السقوط يسمى العمود ، والزاوية المحصورة بين الشعاع الساقط والعمود تسمى زاوية السقوط ، والزاوية المحصورة بين الشعاع المنعكس والعمود تسمى زاوية الانعكاس .

* وانعكاس الضوء الذي يحدث بهذه الكيفية عند سطح الماء أو الزجاج أو المعادن المصقولة ينقاد لقانونين يعرفان بقانوني الانعكاس ، ينص الأول منهما : على أن الشعاع الساقط والعمود والشعاع المنعكس في مستوى واحد . وينص القانون الثاني أن زاوية السقوط مساوية زاوية الانعكاس .

وكذلك شرح نظرية انعكاس الضوء بطريقة حديثة جداً وافترض أن الضوء شيء مادي ، كذلك ينعكس الضوء من الأجسام المصقولة ، كما ترتد الكرة من الجسم الصلب عند اصطدامها به ، وهذه النظرية أدَّت دوراً عبر التاريخ ومن المؤسف حقاً أن الكثير من علماء الغرب يدعون خطأ أن إسحاق نيوتن العالم الإنجليزي والذي عاش فيما بين (١٦٤٢-١٧٢٧م) هو مبتكر النظرية ، ويمكن توضيح هذه النظرية كما شرحها ابن الهيثم :



* افرض أن أ ب مانع ذا مقاومة قوية .
* إذا رميت الكرة من نقطة جـ في الاتجاه الأفقي (الزاوية ٩٠) فإن الكرة لا تمر من نقطة ن ، بل ترتد بعد الاصطدام إلى نقطة جـ .
* أما إذا قذفت الكرة من نقطة هـ فإنها لا ترتد إلى نقطة هـ أو إلى نقطة جـ بل ترتد إلى نقطة و .

كما أن ابن الهيثم حاول أن يبرهن الموضوعة الخامسة المشهورة من موضوعات إقليدس ونال برهانه إعجاباً لمن خلفه . هذه الموضوعة التي لم يعتمد عليها إقليدس في هندسته ، خلقت حقلاً جديداً في علم الهندسة ، وصار كثير من الجامعات بالعالم يعلمها ، وتدعى هندسة «لوباشيفسكي» أو الهندسة غير الإقليدية التي نتجت عن محاولات كبار علماء الرياضيات لبرهان موضوعة إقليدس الخامسة .

مؤلفاته :

ولقد ألف ابن الهيثم في القاهرة مجموعة من المسائل المشابهة لمفروضات إقليدس نال بها الشهرة الكبيرة ، يقارب عددها مائتي مؤلف في حقول مختلفة مثل : الرياضيات ، الفيزياء ، وعلم الفلك ، وعلم الطب ومن هذه المؤلفات .

١ - كتاب في المناظر ويحتوي على سبع مقالات ، ذكرها مصطفى نظيف في كتابه «الحسن بن الهيثم بحوثه وكشوفه في البصريات» وهي :

المقالة الأولى : عن كيفية الإبصار وتشمل خواص البصر ، وخواص الضوء ، وعن كيفية إشراق الأضواء ، وفيما يعرض بين البصر والضوء ، وفي هيئة البصر ، وكيفية الإبصار ، وفي منافع آلات البصر ، وفي علل المعاني التي لا تتم الإبصار إلا بها وباجتماعها .

المقالة الثانية : في تفصيل المعاني الذي يدركها البصر وعللها وكيفية إدراكها وتضم تمييز خطوط الشعاع ، وفي كيفية إدراك كل واحد من المعاني الجزئية التي تدرك بحاسة البصر ، وفي تمييز إدراك البصر للمبصرات .

المقالة الثالثة : في أغلاط البصر فيما يدركه وتتكون من العلل التي من أجلها يعرض للبصر الغلط ، وأغلاط البصر ، وفي كيفية أغلاط البصر التي تكون في المعرفة ، وفي كيفية أغلاط البصر التي تكون في القياس .

المقالة الرابعة : في كيفية إدراك البصر بالانعكاس عن الأجسام الثقيلة وتشمل صور المبصرات تنعكس عن الأجسام الثقيلة ، وفي أن ما يدركه البصر في الأجسام الثقيلة هي إدراك بالانعكاس ، وفي كيفية إدراك البصر للمبصرات بالانعكاس .

المقالة الخامسة : في مواضع الخيالات وهي الصور التي ترى في الأجسام الثقيلة ، والمقالة فصلان : **الأول** : صدر المقالة ، **والثاني** : القول في الخيال .

المقالة السادسة : في أغلاط البصر فيما يدركه بالانعكاس وعللها وهي أغلاط البصر التي تعرض من أجل الانعكاس ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا المسطحة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا الكروية المحدبة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا الأسطوانية المحدبة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا المخروطية المحدبة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا الكروية المقعرة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا الأسطوانية المقعرة ، وأغلاط البصر التي تعرض في المرايا المخروطية المقعرة .

المقالة السابعة : في كيفية إدراك البصر بالانعكاس من وراء الأجسام الشفة المخالفة لشفيف الهواء ، وتشمل أن الضوء ينفذ في الأجسام المشفة على سموت خطوط مستقيمة ، وينعطف إذا صادف جسماً مخالف الشفيف لشفيف الجسم الذي هو فيه ، وفي كيفية انعطاف الأضواء في الأجسام المشفة ، وفي أن ما يدركه البصر من وراء الأجسام المشفة المخالفة الشفيف لشفيف الجسم الذي فيه البصر إذا كان مائلاً عن الأعمدة القائمة على سطوحها هو إدراك بالانعطاف ، وفي الخيال ، وفي كيفية إدراك البصر للمبصرات بالانعطاف ، وفي أغلاط البصر التي تعرض من أجل الانعطاف ، وبه يختتم ابن الهيثم مباحث كتابه في المناظر .

ويقول أحمد علي الملا في كتابه «أثر العلماء المسلمين في الحضارة الأوروبية» : «ومن الثابت أن كتاب المناظر لابن الهيثم ، من أكثر الكتب استيفاء لبحوث الضوء ، وأرفعها قدراً وهو لا يقل - مادة تبويباً - عن الكتب الحديثة العالية ، إن لم يفق بعضها في موضوع انكسار الضوء ، وتشريح العين ، وكيفية تكوين الصور على شبكة العين» . وأضاف جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية - نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة» قائلاً : «كتاب المناظر لابن الهيثم انتشر في القرون الوسطى انتشاراً كبيراً في حوالى خمس ترجمات لاتينية ، وعدة ترجمات أخرى إلى اللغات المشتقة من اللاتينية . وفي سنة ١٥٧٢م نشر روزنر (Risner) ترجمة كاملة لكتاب المناظر عنوانها (Opticae thesaurus al hazeni) وفي هذه الطبعة رسم روزنر رسماً بيّن فيه مختلف أجزاء العين الذي ذكره ابن الهيثم» .

٢ - المختصر في علم هندسة إقليدس .

٣ - كتاب فيه ردود على الفلاسفة اليونانيين وعلماء الكلام .

٤ - الكتاب الجامع في أصول الحساب .

٥ - كتاب يحتوي على مجموعة في علم الهندسة وعلم الحساب مأخوذة من مؤلفات إقليدس .

٦ - كتاب في الجبر والمقابلة وفيه تحليل لمسائل عديدة .

٧ - كتاب يحتوي على مجموعة من المقالات في الرياضيات العامة .

٨ - كتاب فيه العديد من المسائل الحسابية والجبرية والهندسية .

٩ - مخطوطة في القياسات .

١٠- كتاب يشتمل على حلول مسائل من الكتاب الأول لإقليدس في علم الهندسة .

١١- كتاب فيه حلول مسائل من الكتاب الخامس لإقليدس .

١٢- رسالة شرح فيها اتجاه القبلة .

١٣- رسالة أوضح فيها علاقة الجبر بعلم الفرائض .

١٤- رسالة عن المخروط .

١٥- رسالة أعطى فيها حلاً ميكانيكياً جميلاً لمسألة «أرخميدس» في قطع الكرة بمستوى بحيث تكون النسبة بين حجمي جزأيها المقطوعين تساوي نسبة معلومة .

١٦- كتاب شرح فيه مصادرات كتاب «إقليدس» في الأصول حيث يناقش تعاريف ومسلمات وبديهات إقليدس .

١٧- كتاب بعنوان «حل شكوك إقليدس في الأصول» وفيه ناقش وعلق على نظريات إقليدس .

١٨- رسالة تحتوي على دراسة نظرية المخطوط المتوازية ومحاولة لبرهان المسلمة الخامسة لإقليدس .

١٩- كتاب بعنوان «مساحة المجسمات المكافئة» وفيه تمكن من حساب حجم المجسم الناتج من دوران قطعة القطع المكافئ حول محوره .

٢٠- رسالة استطاع فيها تحديد ارتفاع الطبقة الهوائية فوق الأرض وذلك بالاعتماد على ما أثبته من أن الظلام لا يحل إلا بعد انخفاض الشمس عن خط الأفق بزاوية قدرها (١٩ درجة) .

٢١- كتاب لخص فيه علم المناظر من كتابي «إقليدس وبطليموس» .

٢٢- رسالة بحث فيها كيفية استخراج سمت القبلة في جميع أنحاء العالم .

٢٣- رسالة برهن فيها أن القطع الزائد للمخروط والخطين اللذين لا يلتقيان يقربان أبداً ولا يلتقيان .

٢٤- رسالة في أصول المسائل العديدة خاصة للأعداد الصم وتحليلها .

٢٥- رسالة في المرايا المحرقة بالقطوع .

٢٦- رسالة في المرايا المحرقة بالدائرة .

٢٧- رسالة في ضوء القمر .

٢٨- مخطوطة تحتوي على مجموعة مسائل في علم المجسمات .

٢٩- كتاب التحليل والتركيب الهندسية .

٣٠- كتاب شرح فيه وعلق على الكتاب الثاني عشر لإقليدس في علم الهندسة .

٣١- رسالة عن الأعداد الصم .

٣٢- رسالة بيّن فيها أن جميع الأمور الدنيوية والدينية هي نتاج العلوم الفلسفية .

٣٣- رسالة في نظرية التفريغ .

٣٤- كتاب يحتوي على شرح كافي عن علم الهندسة وخواصها .

٣٥- كتاب في البصريات .

٣٦- رسالة في حساب الخطأين .
٣٧- مقالة في علم الهندسة والمثلثات وحساب المعاملات .
٣٨- مقالة علق فيها على مؤلفات «أرسطو طاليس» في علم المنطق .
٣٩- رسالة عن كيفية إدراك البصر بالانعكاس .
٤٠- رسالة في انعطاف الضوء .
٤١- رسالة عن العين والإبصار .
٤٢- كتاب هيئة العالم .
٤٣- كتاب شرح المصادر .
٤٤- كتاب عن العالم والسماء .

أعطى علماء العرب والمسلمين اهتماماً بالغاً لعلم الضوء وهذا يظهر من قول أنور الرفاعي في كتابه «الإسلام في حضارته ونظمه» : «لقد عرف علماء العرب والمسلمين علم الضوء بعلم البصريات (أو علم المناظر) ، وقد اعتز به علماء العرب والمسلمين منذ بدء اهتمامهم بالعلوم وبالفلسفة ، وليس من المبالغة القول بأنه لولا علم البصريات والنتائج التي وصل إليها علماء العرب والمسلمين لما تقدم كل من علمي الفلك والطبيعة تقدمهما العجيب . فالكندي ألف كتابين : أحدهما : في اختلاف المناظر ، وثانيهما : في اختلاف مناظر المرآة ، وابن سينا أوجد بعض النظريات الجديدة في البصريات ، ولكن رائد علم البصريات هو الحسن بن الهيثم ، وبقيت بحوثه وكشوفه في البصريات تدرس في جامعات أوروبا حتى القرن السابع عشر الميلادي» .

وقد قضى ابن الهيثم وقتاً طويلاً في دراسة طبقة الهواء حول الأرض حتى استطاع تحديد ارتفاعها ، مستنتجاً ما أثبته بطريقة دقيقة بأن الظلام لا يحل إلا بعد انخفاض الشمس عن خط الأفق بزاوية قدرها (١٩ درجة) .

والجدير بالذكر أن هذه القيمة لا تقل عن القيمة الحقيقية المحسوبة بالحاسبات الإلكترونية إلا بمقدار درجة واحدة . كما أولى عناية كبيرة بمسألة «أرخميدس» وهي قطع الكرة بمستوى بحيث تكون النسبة بين حجمي جزأيها المقطوعين تساوي نسبة ثابتة ، وقد أدخل على هذه المسألة تعديلات كثيرة ، حتى أمكنه تحديد النسبة الثابتة بدقة فائقة .

وقد أولى ابن الهيثم اهتماماً جديراً بأن يذكر هنا : وهو تطويره مجموع مسلسلتي الأس الثالث والأس الرابع للأعداد الطبيعية وهي كالآتي :

مجموع مسلسلة الأس الثالث للأعداد الطبيعية

$$١ + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots + ن^{٣} = \frac{ن^{٢} (ن + ١)^{٢}}{٤}$$

أما مجموع مسلسلة الأس الرابع للأعداد الطبيعية $١ + ٢^{٤} + ٣^{٤} + ٠٠٠ + ن^{٤}$

$$= \frac{ن (ن + ١) (٦ن^{٣} + ٩ن^{٢} - ١)}{٣٠}$$

عندما كان يحاول حساب حجم الجسم الناتج عن دوران قطعة قائمة من قطع مكافئ حول محور عمودي على محور تماثلها . وهذا العمل عبارة عن حل تقريبي للتكامل $\int س^{٤}\, د\, س$. يقول أحمد سعيد الدمرداش في تحقيقه لكتاب «مفتاح الحساب» للكاشي : «إن العالم ابن الهيثم أوجد مجموع مسلسلتي الأس الثالث والأس الرابع للأعداد الطبيعية عندما كان يقوم بحساب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران قطعة قائمة من قطع مكافئ حول محور عمودي على محور تماثلها . وهذا المجموع هو حل تقريبي للتكامل $\int س^{٤}\, د\, س$.

ابن الهيثم نهج المنهج العلمي الصحيح، وساعد على ذلك معرفته الفائقة بعلم الرياضيات الذي مكنه من تنظيم بحثه، وعلم الفلسفة الذي مكنه من حسن تحليل الأمور، ولقد قال حكيم محمد سعيد رئيس مجلس العلوم في كراتشي بمناسبة الحفلة السنوية التي أقيمت عام ١٣٨٩هـ (١٩٦٩م) لابن الهيثم في الباكستان: «تعتبر سنة وقوف الإنسان على سطح القمر لأول مرة يرجع هذا بدون شك إلى التكنولوجيا الحديثة، ولو أخذ كل شيء بعين الاعتبار فإن ابن الهيثم يعد رائد هؤلاء العلماء الأمريكيين حيث إن كل نظرياتهم الرياضية مقتبسة من ابتكارات أبي علي. لهذا باستطاعتي أن أقول: لدى ابن الهيثم عقل القرن العشرين ولكنه عاش في القرن العاشر، ومهما حاولت أن أصف عالمنا الكبير فإنني عاجز عن ذلك، كما أن الأقطار العربية قد اهتمت بعالمنا الفاضل ابن الهيثم، وذلك بتكريمه والاعتراف بفضله، ومن أمثلة تكريمه وتخليد اسمه أن جامعة القاهرة خصصت في عام ١٣٥٨هـ (١٩٣٩م) قائمة للمحاضرات باسم ابن الهيثم وكذلك قاعة في كلية العلوم بجامعة بغداد.

رحم الله أبا علي وجعل مثاله في البحث والتنقيب والابتكار مثالاً لشباب أمتنا حتى نكون خير خلف لخير سلف.

*** نصير الدين الطوسي:**

هو محمد بن محمد الحسن أبو جعفر نصير الدين الطوسي[1]، ولد في خراسان وعاش وتوفي في بغداد وذلك فيما بين (٥٩٧-٦٧٢هـ=١٢٠١-١٢٧٤م)

---

(١) هناك عالم أخر بهذا الاسم هو شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي من طوس عاش في القرن السابع الهجري (الثالث عشر الميلادي). رحل إلى الموصل ودمشق. واشتهر بالعلوم الرياضية وباختراعه أحد أنواع الأسطرلاب. ومن مؤلفاته كتاب الجبر والمقابلة ورسالة في الأسطرلاب الخطي.

درس مؤلفات الإغريق وترجم كتاب أصول الهندسة لإقليدس ، وهي أدق وأوضح ترجمة عربية عرفت . كما اشتهر بمؤلفاته في علم المثلثات والجبر والفلك والهندسة ، فكان عالماً فذاً في الرياضيات والفلك ، أسند إليه المرصد الفلكي في «مراغة» الذي اشتهر بآلاته الفلكية الدقيقة ، وأرصاده الضابطة ، ومكتبته الضخمة ، وعلمائه الفلكيين الذين كانوا يأتون إليه من شتى أنحاء المعمورة لنهل العلم ، وهم من أمثال فخر الدين المراغي من الموصل ، ومحيي الدين المغربي من الأندلس ، والقزويني من قزوين ، وغيرهم من أرباب العلم . ويقول جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» : «إن نصير الدين الطوسي يعتبر من أعظم علماء الإسلام ، ومن أكبر رياضييهم» . . فقد عرف بين أصدقائه وذويه وعلماء المشرق والمغرب بلقب «علامة» . والجدير بالذكر أنه كان يجيد اللغة اللاتينية والفارسية والتركية مما أعطته القدرة على السيطرة على شتى المعارف .

ويروى لنا قصة عجيبة عن الطوسي ، وهي أنه كانت له مكانة مرموقة عند الخلفاء العباسيين لذكائه الخارق ، ولذا فإن أحد الوزراء تربص له بدافع الحسد وأرسل تهماً ملفقة إلى حاكم قهستان ، أدت بالطوسي إلى السجن في إحدى القلاع ، فكان نتيجة سجنه أن أنجز أكثر مؤلفاته في الرياضيات والفلك التي خلدت اسمه بين نوابغ العلوم في العالم . وقد حدث لحسن حظه أن استولى على السلطة في بغداد هولاكو ، فأخرجه من السجن وقربه إليه ، فصار الأمير على أوقاف المماليك التي استولى عليها هولاكو . فاستغل الطوسي هذه الأموال في بناء مكتبة ضخمة ضمت أكثر من أربعمائة ألف مجلد من الكتب النادرة . ويروي هذه القصة قدري طوقان في كتابه «تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك» فيقول : «إن الطوسي نظم قصيدة مدح فيها

المعتصم ، وأن أحد الوزراء رأى فيها ما ينافي مصلحته الخاصة ، فأرسل إلى حاكم قهستان يخبره بضرورة ترصده ، وهكذا كان ، فإنه لم يمض زمن إلا والطوسي في قلعة ألموت ، حيث بقي فيها إلى مجيء هولاكو في منتصف القرن السابع الهجري . وفي هذه القلعة أنجز أكثر تآليفه في العلوم الرياضية التي خلدته ، وجعلته علماً بين العلماء» .

في دراسته للمجموعة الشمسية كان يعتقد أن الشمس هي المركز ، مخالفاً الاعتقاد السائد آنذاك بأن الأرض هي المركز ، وأن المجموعة الشمسية تدور حولها . ويقول محمد فائز القصري في كتاب «مظاهر الثقافة الإسلامية وأثرها في الحضارة» : «للطوسي بحوث فريدة في القبة السماوية . أما في الحياة البشرية فقد امتد الخيال والبحث العلمي لدى هذا الرجل العالم ، فقال : إن موضع التفكير العقلي في جسم الإنسان هو داخل المخ ، وأن فيه نقطة ، هي نقطة الحياة ، أو الروح ، وهي وضع الله تعالى ، ولا بأس هنا أن نقول : إن العلماء والأطباء في العصر الحاضر يرون أن نقطة الحياة في البصلة السيسائية وهي من أجزاء المخ» .

تلقى نصير الدين علمه عن العالم الكبير كمال الدين بن يونس الموصلي(١) ، فغرس فيه حب الكتب حتى توصل إلى أنه ينفق الكثير من ماله على شراء الكتب الثمينة ، وأبدع في علم الرياضيات بجميع فروعه ، فكان له فضل كبير في تعريف الأعداد الصم ، وقد ذكر الدكتور موريس كلاين

(١) كمال الدين بن يونس الموصلي ولد في الموصل (العراق) سنة ٥٥١هـ (الموافق ١١٥٦م) . اشتهر في جميع فروع المعرفة ، ولكنه تميز فعلاً في دراسته للقطوع المخروطية التي ورثها عن أبولونيوس . ومن مصنفاته : كتاب مفردات ألفاظ القانون ، وكتاب عيون المنطق ، وكتاب الأسرار السلطانية في النجوم وغيرها .

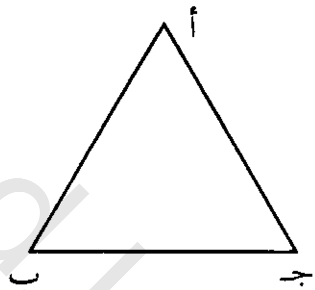
في كتابه «تاريخ الرياضيات من الغابر حتى الحاضر» : «أن نصير الدين الطوسي كان يعرف معرفة تامة الأعداد الصم ، ويظهر ذلك من أبحاثه لمعادلات صماء مثل : $\sqrt{\text{أب}} = \sqrt{\text{أ}}\sqrt{\text{ب}}$ و $\sqrt{\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢}} = \text{أب}$ ، كما كانت لديه خبرة جيدة بالدالة الرباعية الأضلاع» ، ويرى كثير من علماء الغرب أنه من المؤسف حقاً أنهم لم يكتشفوا هذه الرسالة إلا عام ١٤٥٠م ، ويقول درك ستريك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «إن نصير الدين من المفكرين الأوائل في الأعداد التي ليس لها جذور (الأعداد الصم) ، ولو أعطى كل ذي حق حقه فإنه من الجدير أن يقال : إنه المبتكر الأول لهذه الأعداد التي أدَّت في الغابر دوراً مهماً ، ولا تزال لها أهميتها العظمى في الرياضيات الحديثة التي تدرس الآن في جميع أنحاء العالم» .

اشتهر نصير الدين الطوسي بعلمي الهندسة وحساب المثلثات ، فكتب أول كتاب فيهما كان متداولاً في جميع أنحاء المعمورة ، واسم هذا الكتاب «شكل القطاعات» وهو يحتوي على حساب المثلثات فقط ، وقد علق كذلك تعليقاً وافياً مهماً على كتاب البيروني «دائرة المعارف» ويتكون كتاب البيروني من خمس عشرة رسالة في الرياضيات والفلك ، كما نقل الطوسي كتاب إقليدس إلى اللغة العربية ، ونشر بحثاً يتركز حول موضوعات إقليدس ، وقد اعتمد المؤلف المعروف «ريجيو مونتانوس» أفكار نصير الدين الطوسي في تأليفه في حقل حساب المثلثات ، وجورج سارتون يعبر في كتابه «علوم القدماء وأثرها في النهضة العلمية خلال عام ١٦٠٠م» : «أن نصير الدين كتب كتاباً بعنوان تحرير أصول رياضة إقليدس ، وفيه شرح وناقش كثيراً من المسائل والنظريات التي تطرق لها بعض من سبقه من علماء المسلمين» .

وأضاف في كتابه «تاريخ العلوم» : «أن نصير الدين بذل جهداً كبيراً يحمد عليه في دراسة مخطوطات إخوانه علماء المسلمين الذين سبقوه ، خاصة تلك التي تدرس الأجرام السماوية وحركتها ، والمسافة بينها وبين الأرض . ولقد استفاد نصير الدين الطوسي من المعلومات التي حصل عليها من بحوث ابن الهيثم حول قوس قزح ، لذا كثير من المؤلفين في تاريخ العلوم ينسبون إلى نصير الدين الفضل في التعريف بقوس قزح وتحليل العوامل الفيزيائية التي تحدثه ، وما لذلك من أهمية في دراسة الكون ، ومن جهة أخرى ذكر جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «أن نصير الدين الطوسي انتقد بطليموس وما قدمه في المجسطي ، وهذا يدل على عبقرية نصير الدين وطول باعه في علم الفلك ، ويمكن القول بكل صراحة : إن انتقاده هذا كان خطوة تمهيدية للإصلاحات التي قام بها كوبر نيكس في العصر الحديث» .

ويذكر عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الإسلامية» : «كان للطوسي باع طويل وإضافات مهمة في علم الفلك ، ويعد زيجه الأيلخاني من المصادر التي استندت عليها أوروبا في إحياء العلوم . وهذا الزيج يحتوي على أربع مقالات : المقالة الأولى في التواريخ ، والمقالة الثانية في سير الكواكب ومواضعها طولاً وعرضاً ، والمقالة الثالثة في أوقات المطالع ، والمقالة الرابعة في أعمال النجوم . وأما كتاب التذكرة فقد أوضح الطوسي فيه كثيراً من النظريات الفلكية ، وقد صنعها بشكل صعب ، وهذا هو السبب في كثرة الشروح التي وضعت عليه ، كما انتقد كتاب المجسطي واقترح نظاماً جديداً للكون أبسط من النظام الذي وضعه بطليموس ، وكذلك أدخل فيه حجوم بعض الكواكب وأبعادها .

ركز نصير الدين الطوسي جهده في فصل حساب المثلثات عن علم الفلك فنجح في ذلك نجاحاً باهراً . ولقد ذكر ديفيد يوجين سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن نصير الدين كتب أول كتاب في علم حساب المثلثات عام (٦٤٨هـ = ١٢٥٠م) نجح فيه نجاحاً تاماً في فصل حساب المثلثات عن علم الفلك ، وأضاف كارل بوير في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «أن نصير الدين رتب ونظم علم حساب المثلثات كعلم مستقل استقلالاً تاماً عن علم الفلك» ويزيد على ذلك ديفيد يوجين سمث في كتابه السابق : «إن نصير الدين أول من كتب كتاباً بعنوان «أشكال القطاعات» ثم قال : «أن نصير الدين هو أول من طور نظريات جيب الزاوية إلى ما هي عليه الآن ، مستعملاً المثلث المستوى كما يظهر بالشكل التالي :



حيث إن $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$

وأضاف أريك بل في كتابه «الرياضيات وتطويرها عبر التاريخ» : «أنه كان لكتاب نصير الدين الطوسي في علم حساب المثلثات الأثر الكبير على علماء الرياضيات في الشرق والغرب ، بما فيه من الابتكارات الجديدة التي أفادت وطورت هذا الحقل» . ويذكر البارون كارادي فو في كتاب «تراث الإسلام» : «أن الطوسي امتاز على زملائه في علم حساب المثلثات الكروية ، حيث قدم هذا الموضوع بأسلوب سهل ومقبول . أما قاعدته والتي سماها «قاعدة الأشكال المتتامة» في تخالف نظرية بطليموس في الأشكال الرباعية ، وهي

بالحقيقة صورة مبسطة لقانون الجيوب ، الذي يقضي بأن جيوب الزوايا تتناسب مع الأضلاع المقابلة لها» .

أبدع نصير الدين في دراسة العلاقة بين المنطق والرياضيات ، لدرجة أن معظم علماء العالم يقولون مقارنين ابن سينا والطوسي : إن ابن سينا طبيب ناجح ، والطوسي رياضي بارع ، فأطلق عليه اسم «المحقق» ، والجدير بالذكر أن الطوسي نال شهرة مرموقة في علم الهندسة ، مما جعل العالم الألماني ويدمان يقول : «إن نصير الدين الطوسي نبغ في شتى فروع المعرفة ، وبالأخص في علم البصريات ، إذ أتى ببرهان جديد لتساوي زاويتي السقوط والانعكاس ، يدل على خصب قريحته وقوة منطقه» . وقد حاول نصير الدين أن يبرهن فرضية إقليدس الخامسة في كتابه «الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية» فكانت محاولة ناجحة حيث فتحت باب النقاش وعدم التسليم بما كتبه إقليدس وأمثاله من عمالقة اليونان في علم الهندسة . ويقول جورج سارتون في كتابه «المدخل إلى تاريخ العلوم» : «إن الطوسي أظهر براعة فائقة النظير وخارقة للعادة في معالجة فرضية التوازي لإقليدس ، وجرب أن يبرهنها ، وبنى برهانه على فروض تدل على عبقريته ، ومن المسائل التي برهنها : دائرة تمس أخرى من الداخل ، قطرها ضعف الأولى ، تتحركان بانتظام في اتجاهين متضادين ، بحيث تكونان دائماً متماستين ، وسرعة الدائرة الصغيرة ضعف سرعة الدائرة الكبيرة . برهن نصير الدين نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى ، وجدير بالذكر أن هذه النظرية هي أساس تصميم جهاز الأسطرلاب البالغ الأهمية» .

أولى الطوسي اهتماماً ملموساً بالهندسة غير الإقليدية التي بنيت على أسس منطقية تناقض هندسة إقليدس ، التي كان يعتقد بأنها ليست قابلة

للتغيير والانتقاد عبر العصور ، كما ناقش دريك ستروبك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «أن نصير الدين الطوسي حاول بكل جدارة أن يبرهن على الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس ، فكانت محاولته بدء عصر جديد في علم الرياضيات الحديثة ، لهذا انصبت عقليته العظيمة على برهانها ، وهو (أن مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين) .

ألف نصير الدين الطوسي أكثر من (١٤٥) مؤلفاً في حقول مختلفة منها : علم حساب المثلثات والهيئة ، والجبر ، والجغرافيا ، والطبيعيات ، والمنطق ، والتنجيم منها :

١ - كتاب شكل القطاع ، وهو أول كتاب من نوعه يفصل علم المثلثات عن الفلك كعلم مستقل . وقد ترجمه علماء الغرب إلى اللغة اللاتينية والفرنسية والإنجليزية ، وبقي كتاب «شكل القطاع» مرجعاً ضرورياً لعلماء الغرب المهتمين بالمثلثات الكروية والمستوية . وأكبر دليل على ذلك أن ريجو مونتانوس اعتمد عليه عندما أراد أن يؤلف كتابه «علم حساب المثلثات» ، وذلك باستشهاد ريجو مونتانوس بكثير من النظريات والأفكار التي وردت في كتاب «شكل القطاع» للطوسي . والجدير بالذكر أن كتاب «شكل القطاع» يضم خمسة مقالات : المقالة الأولى : تحتوي على النسب ، والمقالة الثانية : تشمل شكل القطاع السطحي ، وأما المقالة الثالثة : عن القطاع الكروي ، والمقالة الرابعة : عن القطاع الكروي والنسب الواقعة عليه ، والمقالة الخامسة : تهتم بمعرفة أقواس الدوائر العظمى على سطح الكرة .

٢ - مقالة تحتوي على النسب .

٣ - مقالة القطاع الكروي .

٤ – مقالة في القطاع الكروي والنسب الواقعة عليه .

٥ – مقالة عن قياس الدوائر العظمى .

٦ – كتاب تحرير إقليدس .

٧ – الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية .

٨ – كتاب بين المصادر المشهورة للحكماء .

٩ – كتاب الأصول .

١٠– رسالة في الموضوعة الخامسة .

١١– كتاب الكرة المتحركة لأطوقولوس .

١٢– كتاب تسطيح الأرض وتربيع الدوائر .

١٣– كتاب قواعد الهندسة .

١٤– كتاب مساحة الأشكال البسيطة والكروية .

١٥– كتاب في الكرة والأسطوانة لأرخميدس المصري .

١٦– كتاب المأخوذات في الهندسة لأرخميدس .

١٧– كتاب المعطيات لإقليدس .

١٨– كتاب أرخميدس في تكسير الدائرة .

١٩– كتاب الجبر والمقابلة .

٢٠– كتاب جامع في الحساب .

٢١– مقالة برهن فيها أن مجموع مربعي عددين فرديين لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً .

٢٢– كتاب يتعلق بالميراث .

٢٣– زيج الأيلخاني .

٢٤– كتاب ظاهرات الفلك .

٢٥- كتاب جرمي الشمس والقمر وبعدهما الأرسطرخس .
٢٦- زيج الزاهي .
٢٧- مقالة عن سير الكواكب ومواضعها طولاً وعرضاً .
٢٨- مقالة في أعمال النجوم .
٢٩- كتاب ظاهرات الفلك لإقليدس .
٣٠- كتاب المطالع لإيسقلاوس .
٣١- كتاب في علم الهيئة .
٣٢- مقالة انتقد فيها كتاب المجسطي لبطليموس واقترح فيها نظاماً جديداً أبسط من النظام الذي وضعه بطليموس .
٣٣- كتاب التسهيل في النجوم .
٣٤- مقالة عن أحجام بعض الكواكب وأبعادها .
٣٥- تحرير كتاب الأكر لمنالاوس .
٣٦- كتاب الطلوع والغروب لأوطولوقس .
٣٧- كتاب تحرير المساكن .
٣٨- كتاب المأخوذات لأرخميدس .
٣٩- كتاب تحرير المناظر (في البصريات) .
٤٠- كتاب تحرير الأيام والليالي لتاوذوسيوس .
٤١- رسالة في المثلثات المستوية .
٤٢- كتاب تحرير الكلام .
٤٣- رسالة في المثلثات الكروية .
٤٤- كتاب مساحة الأشكال البسيطة والكروية .
٤٥- كتاب أرخميدس في تكسير الدائرة وغيرها .

ولهذا فإن نصير الدين ترجم دروساً ، واختصر ، وأضاف نظريات جديدة على إنتاج من سبقه من علماء شرقيين وغربيين ، فأرسى قواعد إنتاجه العلمي على تجاربه وتجارب الآخـرين ونشاطاتهم المختلفـة ، كما كان نصير الدين الطوسي موسوعة في العلوم كلها ، فألف من الكتب الكثير ، وقد استفاد منها من تبعه ، ومن المتفق عليه أن نصير الدين خلف ابن سينا بسعة الاطلاع وقدرة الاستيعاب ، وقد أعطى عناية خاصة لعلم البصريات التي تخلفت كثيراً بعد وفاة العالم المسلم المشهور ابن الهيثم ، ولكن نصير الدين استطاع أن يدرس مؤلفات ابن الهيثم ، ويعلق عليها ، ويجعل هذا العلم حياً مرة ثانية ، حتى إن مؤلفاتهما في هذا الحقل كانت تدرس في جميع جامعات العالم حتى القرن الثالث عشر الهجري (التاسع عشر الميلادي) .

ويقول البارون كارادي فو في كتاب «تراث الإسلام» : «تساوي عبقرية نصير الدين الطوسي الهندسية عبقريته الفلكية ، فقد جمع كل المؤلفات الرياضية التي كتبها الأقدمون ، وأبلغها ستة عشر كتاباً ، وهي مع أربعة كتب من العصر الإسلامي ، تستوعب في الواقع كل المكتشفات والمعلومات العلمية التي توصل إليها الذهن البشري حتى تلك الفترة» .

والجدير بالذكر أن نصير الدين كان أول من عقد مؤتمراً علمياً اجتمع فيه الكثير من علماء الشرق والغرب في مرصده بمراغة ، للمشاركة معه في مراصده الفلكية التي أقامها هناك . وإنتاجه الجم في الرياضيات والفلك يدل على خصب قريحته ، وقوة تفكيره ، وصبره على البحث في الحقيقة .