# الفصل الثالث

## علم الهندسة عند اليونان

كان النزاع والمشادات السياسية مستمرة بين اليونان والفرس . فقد سيطر الفرس على دول الشرق الأوسط ومعظم أجزاء دولة اليونان . وانحصرت الدولة اليونانية في الجزر اليونانية فقط ، وقد كانت أثينا لها الزعامة والريادة القيادية والفكرية في ذلك الحين ، وبقيت على هذه الحالة تقريباً خمسين عاماً ، وذلك في عصر بركليس وهو العصر الذي ظهر فيه سقراط وأفلاطون .

بقيت بلاد اليونان مقسمة ومتطاحنة مدة طويلة حتى عهد فيليب المكدوني وابنه الإسكندر المكدوني اللذين قادا الحركة الفكرية ، وحاولا أن يوطدا الاستقرار في بلاد اليونان وذلك وسط القرن الرابع قبل الميلاد ، وبهما انتهى العصر المعروف عند المؤرخين بالعصر الهليني . هذه الأمة التي وصلت إلى مستوى عظيم من الثقافة والمعرفة العلمية والفلسفية فشلت فشلاً ذريعاً بأن تكون أمة مترابطة .

استفاد علماء اليونان من إنتاج كل من قدماء المصريين والبابليين في العلوم بوجه عام ، أما في علم الهندسة فقد اعتمدوا في بداية الأمر على إنتاج علماء قدماء المصريين ، ولكنهم عملوا أيضاً إضافات جوهرية ، تعطيهم حق الريادة في هذا المجال الحيوي ، فهم الذين قدموا لعلم الهندسة البراهين الرياضية المبنية على الحقائق المنطقية . لذا لا عجب أن يقال : إن العالم بأسره مدين لعلماء اليونان في علم الهندسة المستوية التي ندرسها لطلابنا في المدارس والجامعات وهذه حقيقة لا تحتاج إلى برهان .

حقيقة أن الحركة الفكرية الرياضية بدأت عند اليونان في مطلع القرن السادس قبل الميلاد بطاليس وذلك حوالى سنة (٦٠٠) قبل الميلاد ، ووصلت ذروتها في أواخر القرن الثالث قبل الميلاد بإقليدس سنة (٣٠٠) قبل الميلاد ، ولكنها تبلورت وصارت واضحة المعالم ليس فقط في مجال علم الهندسة ولكن في العلوم الأخرى أيضاً في عهد أرخميدس الذي جاء بعد إقليدس مباشرة تقريباً سنة ٢٥٠ قبل الميلاد .

يذكر هورد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» أن علماء اليونان بذلوا كل غال ورخيص في حل ثلاث مسائل هندسية وهي :

(١) تضعيف المكعب (المطلوب إيجاد مكعب حجمه يساوي ضعف حجم مكعب معلوم) الطريقة التي رسمها أبقراط (Hippocrates) تقريباً سنة ٤٤٠ قبل الميلاد ، هي إيجاد وسطين هندسيين بين ج ، ٢ج .

فرض أن س ، ص هما الوسطان المطلوبان .

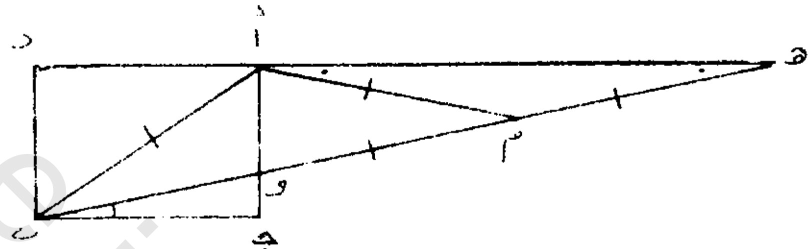
إذن ج : س = س : ص = ص : ٢ج أو $\frac{\text{ج}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ ج}}$

لذا س$^{٢}$ = ص ج (١) ، ص$^{٢}$ = ٢ س ج ج = $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{٢ س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) إذن س$^{٢}$ = ص $\left(\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{٢س}}\right)$ ٢س$^{٣}$ = ص$^{٣}$

إذن المكعب الذي ضلعه ص يكافئ بحجمه ضعف المكعب الذي ضلعه س .

(٢) تثليث الزاوية والمقصود هنا الطريقة التي نتمكن فيها بواسطة المسطرة والفرجار من تثليث هذه الزاوية . فعلماء اليونان القدماء أخذوا الزاوية الحادة أ ب^ جـ كزاوية محصورة بين قطر المستطيل أ جـ ب د وليكن أ ب وبين ضلعه ب جـ . كما هو واضح من الشكل .




* رسم من نقطة ب المستقيم ب هـ بحيث يقطع أ جـ في نقطة و ، ويلتقي بامتداد د أ في نفس النطقة هـ بحيث يكون هـ و = ٢ (أ ب) سيعطى هذا :
أ ب = هـ م = م و .

* أخذ نقطة م على منتصف و هـ ، لذا و م = م هـ ⟸ في Δ أ و هـ القائم الزاوية في و أ^ هـ ⟸ هـ م = م و = أ م (طول المتوسط على الوتر يساوي نصف الوتر) .

إذن و م = م هـ = أ ب = أ م ، م هـ^ أ = م أ^ هـ ، لأن م هـ = م أ في Δ م هـ أ

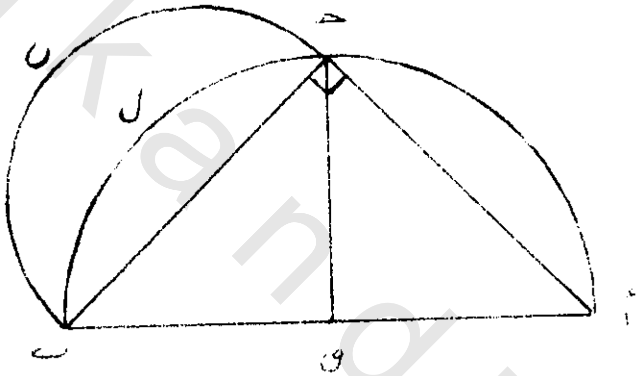
لذا أ ب^ م = أ م^ ب = م أ^ هـ + م هـ^ أ لأنها زاوية خارجية للمثلث أ م^ هـ = ٢ (م هـ^ أ) = ٢ (م ب^ جـ) ، لأن أ هـ^ ب = جـ ب^ هـ بالتبادل حيث د هـ // ب جـ ، ب هـ قاطع .

إذن المستقيم ب و هـ يثلث الزاوية أ ب جـ .

(٣) تربيع الدائرة : وهذه الفكرة قديمة جداً ورثها علماء اليونان من قدماء المصريين حيث إن قدماء المصريين حسبوا مساحة الدائرة = ٨/٩ مساحة

المربع المنشأ على قطر هذه الدائرة . أما اليونانيون فقد قدروها بـ $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ (قطرها)$^{\text{٢}}$ . والمعروف أن ط هي النسبة التقريبية بين محيط الدائرة إلى قطرها ط = ( $\frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{قطرها}}$ ) واستخدم الأوائل ط = ٣ ، على الرغم من أن قدماء المصريين حسبوها بأنها تساوي ٣,١٦٠٤ .

ويذكر عمر فروخ في كتابه «تاريخ العلوم» أن هيبوكراتيس بلغ أشده عام ٤٣٠ قبل الميلاد . واستطاع أن يقع – في أثناء محاولاته لتربيع الدائرة – على حالة خاصة واحدة يمكن فيها تربيع الهلال .




**العمل :**

* لتكن نصف الدائرة مركزها ق ، وقطرها أ ب
* ارسم الزاوية القطرية أ $\hat{\text{جـ}}$ ب
* ارسم نصف دائرة قطرها على جـ ب

**البرهان :**

$\Delta$ أ ق جـ يطابق $\Delta$ ق ب جـ حيث إن :

أ $\hat{\text{ق}}$ جـ = ب $\hat{\text{ق}}$ جـ = ٩٠°

أ ق = ق ب = نصف القطر

ق جـ مشترك . لذا أ جـ = جـ ب ⟸ $\overline{\text{أ جـ}}^{٢} = \overline{\text{جـ ب}}^{٢}$ (١)

أيضاً في $\Delta$ أ ب جـ

$\overline{\text{أ ب}}^{٢} = \overline{\text{أ جـ}}^{٢} + \overline{\text{جـ ب}}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) إذن $\overline{\text{أ ب}}^{٢} = ٢\ \overline{\text{جـ ب}}^{٢}$

∴ ربع الدائرة ق ب ل جـ = نصف الدائرة جـ ب ن

وبما أن القطعة جـ ب ل مشتركة

∴ مساحة $\Delta$ ق ب جـ = مساحة الهلال جـ ن ب ل

**طاليس[١] :**

عاش طاليس في القرن السادس قبل الميلاد وعرف بحنكته ، لذا اعتبر واحداً من حكماء اليونان السبعة . اشتغل في التجارة فكان من أنجح التجار في عصره ، لذا فإنه زار مصر عدة مرات ، فأعجب طاليس بالطرق الرياضية التي كان يستخدمها قدماء المصريين في قياس الأرض وبناء الأهرام . من ذلك بدأ اهتمام طاليس بالرياضيات وخاصة علم الهندسة فأطلق على إنتاجه الرياضي اسم قياس الأرض .

وركز طاليس على إنتاج علماء بابل في علم الفلك ، فقد خمن حدوث كسوف للشمس عام ٥٨٥ قبل الميلاد ، لذا حلق في سماء المعرفة بين معاصريه ، وقضى على الأساطير والسحر اللذين كانا منتشرين آنذاك بين

(١) ولد طاليس بمدينة ميليتس (Miletus) الذي بدأ حياته هناك كتاجر ورجل دولة وعالم من علماء الرياضيات الكبار .

اليونانيين . حقاً ، طاليس هو الذي أدخل علم الهندسة إلى بلاد اليونان ، وهو الذي بدأ بقياس بعد السفن عن الشواطئ اليونانية وارتفاع الهرم بطرق رياضية بحتة تدل على طول باعه في ميدان علم الهندسة .

وتنسب النظريات الآتية لطاليس وهي :

(١) تساوي الزاويتين المتقابلتين بالرأس .

(٢) تساوي زاويتي القاعدة للمثلث المتساوي الساقين .

(٣) قطر الدائرة ينصفها .

(٤) الزاوية الواقعة في نصف الدائرة تكون قائمة .

(٥) تطابق مثلثين بتساوي زاويتين وضلع محصور بينهما نظائرها في الآخر .

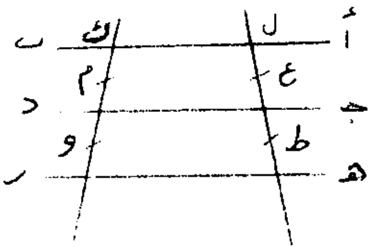
(٦) تتناسب الأضلاع في مثلثين متشابهين .

(٧) إذا حددت عدة مستقيمات متوازية قطعاً متطابقة على قاطع ما ، فإنها تحدد قطعاً متطابقة على أي قاطع آخر .

∴ أ ب // جـ د // هـ ز ،

ك م = م و معطى

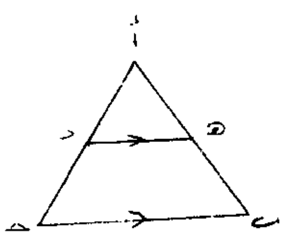
∴ ل ع = ع ط



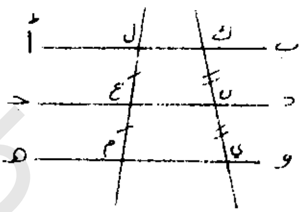

(٨) المستقيم الموازي لضلع مثلث ، والمار في منتصف ضلع ثانٍ ، يمر أيضاً في منتصف الضلع الثالث . (نتيجة من النظرية ٧) .

∴ هـ د // ب جـ ، أ د = د جـ معطى

∴ أ هـ = هـ ب



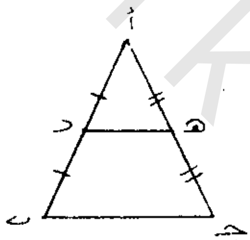
(٩) مستقيم يحدد مع متوازيين قطعتين متطابقتين مع قاطع أول ، وقطعتين متطابقين على قاطع ثانٍ ، هو مستقيم موازٍ للمستقيمين المتوازيين .



أب // د جـ ، ل ع = ع م ، ك ن = ن ي معطى

∴ أ ب // د جـ // و هـ

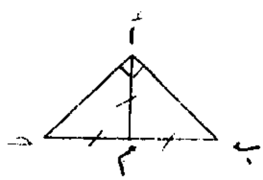
(١٠) المستقيم المار في منتصفي ضلعي المثلث هو موازٍ للضلع الثالث .



أ د = د ب ، أ هـ = هـ جـ معطى

∴ هـ د // جـ ب

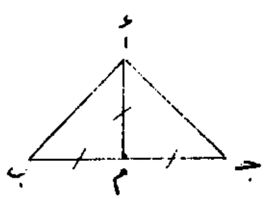
(١١) في مثلث قائم الزاوية طول المتوسط على الوتر يساوي نصف الوتر .



∴ أ م المتوسط في $\Delta$ أ ب جـ القائم الزاوية في أ

∴ أ م = م ب = م جـ

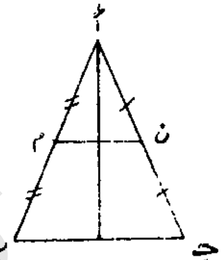
(١٢) إذا كان طول المتوسط على ضلع مثلث يساوي نصف الضلع ، فالمثلث هو قائم الزاوية والضلع المعني الوتر



∴ أ م المتوسط في $\Delta$ أ ب جـ ، أ م = جـ م = م ب

∴ $\Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية في الزاوية أ والوتر جـ ب

(١٣) طول القطعة المحدودة بمنتصفي ضلعي مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث .




∴ أ ن = ن جـ ، أ م = م ب في $\Delta$ أ ب جـ

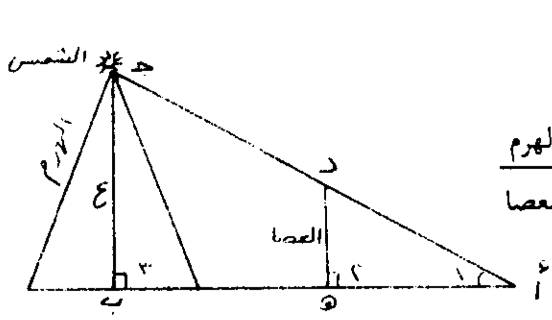
∴ ن م // ب جـ (من النظرية ١٠)

وأيضاً ن م = $\frac{\text{ب جـ}}{٢}$

على كل حال معظم هذه الحقائق الهندسية كانت معروفة تماماً لدى قدماء المصريين والبابليين قبل طاليس بخمسة عشر قرناً تقريباً ، ولكنها نسبت لطاليس لأنه وجد لهذه الحقائق برهاناً منطقياً ، بينما قدماء المصريين والبابليين أثبتوها عملياً .

ويظهر لنا أن طاليس هو صاحب الانطلاقة في الرياضيات اليونانية البحتة فمن قياس أطوال ومساحات إلى التجريد ، ولذا لا عجب إذا قيل : إنه أول من استخدم المنطق الرياضي . وطاليس حقيقة أنه من كبار العلماء الإغريق ، فهو أول من كشف أن دورة الشمس ليست دائماً متساوية بالنسبة للانقلابين .

ومعروف لدى المؤرخين في الرياضيات أن طاليس أول من طبق نظرية «تتناسب الأضلاع في مثلثين متشابهين» على الأهرام في مصر ، وذلك بقياس ارتفاع الهرم كالآتي :




$\frac{\text{ارتفاع الهرم}}{\text{ارتفاع العصا}} = \frac{\text{طول ظل الهرم}}{\text{طول ظل العصا}}$

Δ أ ب جـ يشابه Δ أ هـ د لأن $\hat{١}$ مشتركة وأن $\hat{٢} = \hat{٣} = ٩٠^\circ$ ⟸ ب جـ $\hat{أ}$ = هـ د $\hat{أ}$

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{طول ظل الهرم}}{\text{طول ظل العصا}} = \frac{\text{ارتفاع الهرم}}{\text{ارتفاع العصا}}$$

**المدرسة الفيثاغورية :**

وبعد طاليس ظهر على المسرح فيثاغورث الذي يعتبر من كبار الشخصيات في تاريخ الرياضيات ، ولد في جزيرة ساموس (Samos) سنة ٥٧٢ قبل الميلاد وتوفي سنة ٤٩٧ قبل الميلاد تقريباً . وعندما بلغ سن الرشد رحل إلى كل من مصر وبلاد بابل لطلب العلم ، وزار طاليس في بلده ميليتس وتلقى العلوم عليه هناك . وأخيراً استقر في بلدة صغيرة على الشواطئ الإيطالية معروفة باسم كروتون (Croton) وبنى مدرسته وهي أول مدرسة نموذجية عرفت بالتاريخ وهي عبارة عن رابطة للعلماء الباحثين ، لذا كان الإنتاج العلمي الصادر من هذه المجموعة لا ينسب لفرد ولكنه ينسب للمجموعة المعروفة باسم الأخوة الفيثاغوريين ، وبقيت الحالة هكذا لمدة أكثر من مائة وخمسين عاماً . وجميع الإنتاج العلمي ينسب إلى المدرسة الفيثاغورية وليس لشخص أو لأشخاص ، وهذا المنهج الغريب اتبعته المدرسة الفيثاغورية .

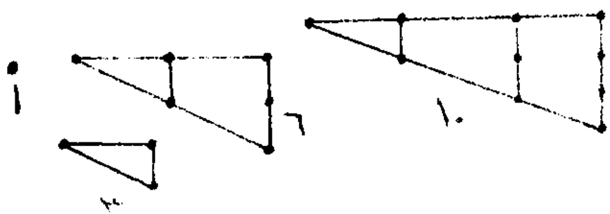
وقد عانى المؤرخون في الرياضيات الأمرين في تحديد بعض الأفكار الرياضية التي صدرت عن المدرسة الفيثاغورية لأصحابها ، حيث إنه يصدر عن الأخوة الفيثاغوريين الذين تربطهم عقيدة واحدة وهي البحث عن سر الكون من خلال دراسة الرياضيات . ولهذه المجموعة شبيه في الحضارة الإسلامية هم إخوان الصفاء وخلان الوفاء الذين ظهروا في القرن الرابع الهجري ، في وقت كانت الأمة الإسلامية متمزقة ، فبدؤوا يعملون بالسر وينشرون أفكاراً جديدة مغايرة

للمألوف خلال رسائلهم الإحدى والخمسين رسالة ، فكانت هذه الرسائل تباع بالأسواق بدون مؤلف ، كان كثير من المؤرخين في العلوم يعتبرون إخوان الصفاء وخلان الوفاء فيثاغوريي النزعة . لذا فإن المؤرخين في العلوم الرياضية يفضلون التحدث عن الفيثاغوريين وليس عن فيثاغورث نفسه ، لأن هذه المجموعة نسبت جميع أعمالها لفيثاغورث لأنه قائدهم .

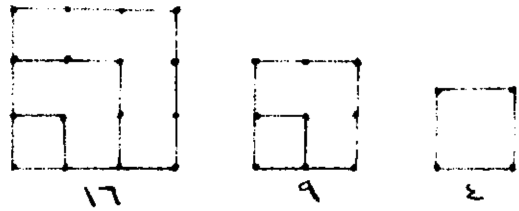
وذكر علي عبد الله الدفاع في كتابه «لمحات من تاريخ الحضارة العربية والإسلامية» أن العادة عند الفيثاغوريين أن ينسبوا إنتاجهم إلى مؤسس المدرسة الفيثاغورية . واهتم بعض الفيثاغوريين بالسحر والخرافات العددية ، ومن ذلك أنهم ربطوا العدد (٢) بجنس الإناث ، وربطوا العدد (٣) بجنس الذكور ، والعدد (٤) بالعدل ، لأن ٤ = ٢ × ٢ نتيجة عاملين متساويين . أما العدد (٥) فقد ربطوه بالزواج ، لأنه حاصل جمع ٢ + ٣ ، وكان العدد (٧) مقترناً بالعذراء ، لأنه ليس له عوامل يقبل القسمة عليها .

ويذكر هورد ايفز في كتابه آنف الذكر أن الفيثاغوريين درسوا العلاقة الرياضية بين الحساب والهندسة عن طريق البحث في المضلعات المنتظمة وعدد رؤوسها وأضلاعها . كما درسوا بدقة الأعداد التشكيلية والمثلثية والتربيعية والسطحية والمتواليات .

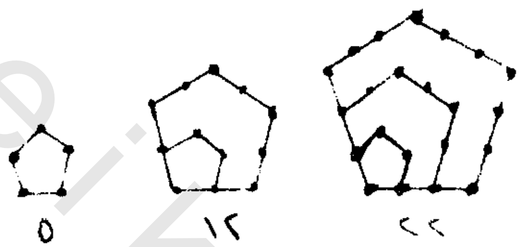
الأعداد المثلثية



الأعداد الرباعية

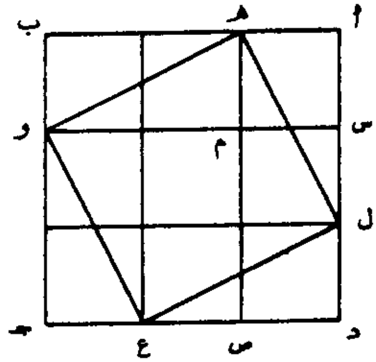



الأعداد الخماسية




## نظرية مثلث قائم الزاوية :

إن مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين . والمتواتر أن قدماء المصريين عرفوا مبدأ نظرية مثلث قائم الزاوية ، وذلك برسم الزاوية القائمة بطريقة تقسيم حبل معين إلى أجــزاء ثلاثة أطوالها ٣ ، ٤ ، ٥ وحــدات على الترتيب ، كما تظهــر معرفتهم واضحــة في بنائهم أهرام الجيزة الثلاثة المعروفة في القاهرة ، أما البابليون فقد عرفوا هذه النظرية واستخدموها في إيجاد مساحة شبه المنحرف ، ولكنهم لم يبرهنوا صحتها كما فعل فيثاغورث . والواضح أن فيثاغورث لم يضف شيئاً على معارف الأوائل حول هذه النظرية سوى أنه قدم برهاناً منطقياً لها وهو كالآتي :




البرهان :

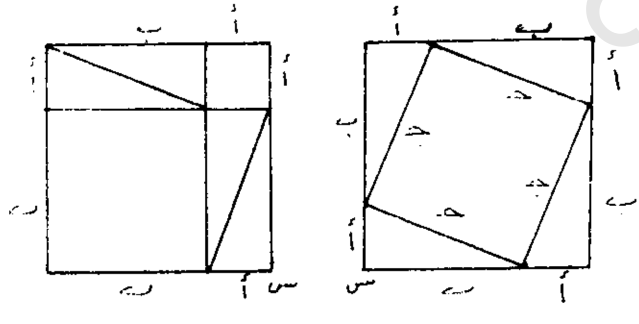
مساحة المربع أ ب جـ د = مساحة المربع هـ و ع ل + ٤ $\Delta$ هـ ب و (١)

= مساحة المربع م و جـ ص + مساحة المربع م هـ أ س + ٤ $\Delta$ هـ ب و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن مساحة المربع هـ و ع ل + ٤ $\Delta$ هـ ب و = مساحة المربع م و جـ ص + مساحة المربع م هـ أ س + ٤ $\Delta$ هـ ب و

إذن $\overline{\text{هـ و}}^{2} = \overline{\text{م و}}^{2} + \overline{\text{م هـ}}^{2}$

كما قدم هورد ايفز في كتابه آنف الذكر برهاناً آخر ينسبه لفيثاغورث وهو كما يلي : (١) (٢)



**البرهان :**

مساحة المربع (١) = مساحة المربع (٢)

بما أن المربع (١) مكون من مربع و٤ مثلثات مساوية للمثلث المطلوب .

إذن مساحة المربع (١) = جـ$^{٢}$ + ٤ $\frac{\text{(أ) (ب)}}{٢}$ = جـ$^{٢}$ + ٢ أ ب (١)

مساحة المربع (٢) مكون من المربع المنشأ على أ والمربع المنشأ على ب و٤ مثلثات مكافئة للمثلث المطلوب .

إذن مساحة المربع (٢) = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ + ٤ $\frac{\text{(أ) (ب)}}{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ + ٢ أ ب (٢)

من (١) ، (٢) استنتج أن جـ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ .

لقد قدم الفيثاغوريون خدمة عظيمة لعلم الرياضيات وخاصة علم الهندسة ، ويمكن تلخيص إنتاجهم كالآتي :

(١) الفيثاغوريون أول من أخذ بالبديهيات ثم البرهان ، ولهم الفضل في إدخال البرهان على النظريات الرياضية .

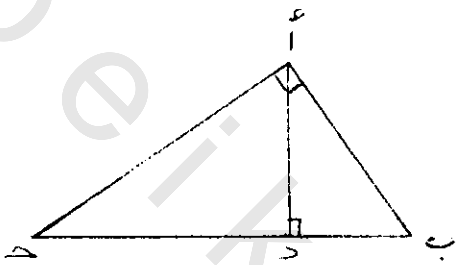
(٢) درسوا المتوازيات وبرهنوا بها أن مجموع زوايا المثلث = قائمتين ، واستنتجوا مجموع الزوايا الخارجية والداخلية لأي مضلع .

(٣) درسوا المجسمات المنتظمة مثل مثلث متساوي الأضلاع ، مربع ، مخمس منتظم ، مسدس منتظم ، الهرم الثلاثي المنتظم (هرم من أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع) ، المجسم السداسي المنتظم (مكعب ذو ستة وجوه كل منها مربع) ، الثماني المنتظم (مثمن من ثمانية وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع) ، المجسم الثاني عشر المنتظم (من اثنى عشر وجهاً كل منها خماسي منتظم) وغيرها .

(٤) قدموا براهين رياضية لتكافؤ الأشكال الهندسية بمساحاتها (طريقة رسم مضلع يكافئ بمساحته مضلعاً معلوماً) .

(٥) برهنوا على نظريات في التناسب وهي :

أ – إذا أسقط عمود من رأس القائمة على الوتر كان كل ضلع هو وسط التناسب بين الوتر وجزئه المجاور للضلع .




أي أن $\overline{\text{أ ب}}^{\,٢} = \text{ب جـ} \times \text{ب د}$

$\overline{\text{أ جـ}}^{\,٢} = \text{ب جـ} \times \text{جـ د}$

ب – العمود هو وسط التناسب بين جزأي الوتر

أي أن $\overline{\text{أ د}}^{\,٢} = \text{ب د} \times \text{د جـ}$

$\Delta$ أ جـ ب يشابه $\Delta$ د جـ أ

$\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} \Leftarrow \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{أ د}}$ (١)

$\Delta$ أ ب جـ يشابه د ب أ $\Leftarrow \frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}}$

$\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{د جـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} \Leftarrow \overline{\text{أ د}}^{\,٢} = \text{د جـ} \times \text{د ب}$

جـ – إذا كان العمود النازل من رأس المثلث إلى قاعدته وسطاً تناسبياً بين جزأي القاعدة كان المثلث قائم الزاوية .

د - إذا تقاطع وتران في دائرة فالمستطيل المكون من جزأي أحدهما يكافئ المستطيل المكون من جزأي الآخر .

هـ - الزوايا في القطع الدائرية متساوية .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن الفيثاغوريين اهتموا بالبحث عن جوانب للأسئلة الآتية :

١ - هل يمكن تقسيم أي مستقيمين بحيث تكون الأجزاء التي ينقسم إليها المستقيمان متساوية؟

٢ - هل يمكن ملء أي شكل مستو معلوم بتكرارات من شكل آخر مثله؟

٣ - هل يمكن ملء أي جسم بتكرارات من جسم معلوم؟

إن الإجابة على هذه الأسئلة ليست بسيطة كما يظهر . فلنحاول مثلاً أن نجد مقياساً مشتركاً لضلع المربع وقطره . إن هذا العمل غير ممكن وذلك بسبب كون ٢ عدداً غير قياسي (غير نسبي) ، خلال البحث عن الإجابات لهذه الأسئلة اكتشف الفيثاغوريون المجسم المنتظم ذا الاثنى عشر وجهاً والذي كل وجه فيه مخمس منتظم ، والمجسم المنتظم ذا العشرين وجهاً والذي كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع .

**رواد الفكر الرياضي في القرن الخامس قبل الميلاد الذين عاصروا المدرسة الفيثاغورية :**

لقد أورد جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» ملخصاً عن بعض علماء الرياضيات في القرن الخامس قبل الميلاد الذين عاصروا المدرسة الفيثاغورية وهم :

**زينون الأيلي :**

نشأ في بداية القرن الخامس قبل الميلاد واشتهر بعقليته الفلسفية ، وزار أثينا والتقى في قادة الفكر هناك مثل أبقراط . وله دور عظيم في جعل الهندسة تعتمد إلى حد كبير على خصائص الأعداد .

**ديموكريتوس الأبديري :**

ولد بعد زينون بنحو ثلاثين عاماً (حوالى عام ٤٦٠ قبل الميلاد) وتوفي سنة ٣٧٠ قبل الميلاد . له خمس رسائل في الرياضيات :

**الأولى** : في تماس الدائرة والكرة ، **والثانية والثالثة** : في الهندسة ، **والرابعة** : في الأعداد ، **والخامسة** : في الأعداد اللامنطقية (Irrationals) .

وأشار أرخميدس أن ديموكريتوس اكتشف أن حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانة التي تشاركه في القاعدة والارتفاع ، وأن حجم الهرم يساوي ثلث حجم المنشور الذي يشاركه في القاعدة والارتفاع .

**هيبوكراتيس (أو أبقراط الخيوسي) :**

نشأ في مجموعة جزر سبوراديس (Sporades) القريبة من شاطئ آسيا الصغرى ، ويعتبر من عظماء علماء الرياضيات في القرن الخامس قبل الميلاد . وبذل هيبوكراتيس جهداً عظيماً في محاولة برهان صحة المسائل الثلاث الآتية :

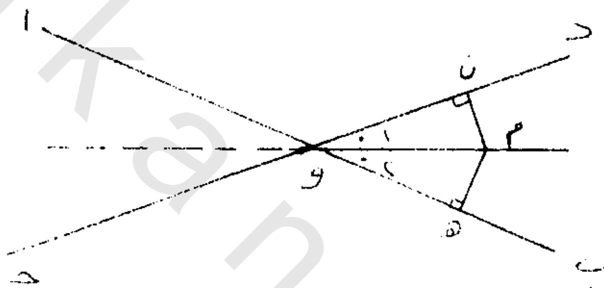
(١) تربيع الدائرة .

(٢) تثليث الزاوية .

(٣) مضاعفة المكعب .

وإلى هيبوكراتيس تنسب النظرية الهندسية القائلة بأن النسبة بين مساحتي دائرتين كالنسبة بين مربعي قطريهما ، وبهذا يعتبر أنه سبق إقليدس الذي نسب هذه النظرية لنفسه في كتابه «أصول الهندسة» ، وهو أول من استعمل الحروف في وصف الأشكال الهندسية .

يذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أن هبوكراتيس هو مخترع المحل الهندسي الذي يتضمن وينص على إيجاد المحل الهندسي للنقط متساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين . ليكن أ ب ، جـ د مستقيمين متقاطعين في و




لنثبت أن م نقطة تقع على بعدين متساويين من المستقيمين .

**العمل** : أسقط عمودين من نقطة م على كل من المستقيمين أ ب ، جـ د وليكونا كل من م ن ، م هـ

رسم المستقيم م و المنصف لزاوية د و ب فإن $\Delta$ م و ن يطابق $\Delta$ و م هـ

لأن م $\hat{\text{هـ}}$ و = م $\hat{\text{ن}}$ و = ٩٠°

و $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ لأن و م منصف ومشترك ومن ذلك استنتج أن م ن = م هـ

من هذا استخلص هيبوكراتيس أن أية نقطة على المنصفين تقع على بعدين متساويين من المستقيمين ، وأن أية نقطة ليست على المنصفين لا تكون على بعدين متساويين من المستقيمين .

### أينوبيديس الخيوسي :

كان معاصراً لهيبوكراتيس ، بل من أبناء مدينة خيوس . من كبار علماء الفلك ، ولكنه أول من حل المسألتين الآتيتين :

**الأولى** : رسم عمود من نقطة مفروضة على مستقيم معلوم باستعمال المسطرة والفرجار .

**الثانية** : إنشاء زاوية من نقطة مفروضة على مستقيم تساوي زاوية معلومة باستعمال المسطرة والفرجار .

### هيبياس الأيليسي :

نشأ في إيليس وهي مقاطعة صغيرة في الزاوية الشمالية الغربية من البيلويونيز ، اشتهر بتربية الخيول . وقد ولد حوالى سنة ٤٦٠ قبل الميلاد . عرف باسم المعلم ، لأنه ساح جميع أرجاء اليونان محاضراً في الناس ومعلماً . كما كان ذا ولع خاص في الرياضيات وعلم الفيزياء وذاع صيته سنة ٤٢٠ قبل الميلاد . لقد ابتكر هيبياس منحنياً جديداً كي يحل مسألة تثليث الزاوية .

وبعد قرن من الزمن استعمل دينوستراتوس (Dinostratus) عام ٢٠٤ قبل الميلاد منحنى هيبياس نفسه لتربيع الدائرة . لذا عرف هيبياس بمخترع المنحنى (Conchiod) التربيعي الذي استخدم في تقسيم الزاوية إلى أي عدد من الأقسام المتساوية .

### أنتيفون السوفسطائي :

نشأ في أثينا ولمع في عصر سقراط . ابتكر طريقة جديدة لحساب مساحة الدائرة وهي كما ذكرها سارتون في كتابه آنف الذكر اقترح أنتيفون إنشاء

مضلع بسيط منتظم ، ولنقل مربعاً ، داخل الدائرة المعطاة . وكان من الممكن بعد ذلك إنشاء مثلث متساوي الساقين على كل من أضلاع المربع ، بحيث يكون رأسه على محيط الدائرة . فيكون قد تم بذلك إنشاء مثمن منتظم ، وإذا ما ثابر المرء على العمل بالطريقة نفسها فإنه ينشئ مضلعات منتظمة عدد أضلاعها : ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، . . . ضلعاً . ومن الواضح أن مساحة أن مضلع لاحق من تلك المضلعات المتتالية تكون أقرب إلى مساحة الدائرة من مساحة أي مضلع سابق ، وبعبارة أخرى : إن مساحة الدائرة تستنفذ تدريجياً بازدياد أضلاع المضلع المحوط بالدائرة نفسها .

### الأكاديمية الأفلاطونية :

ولد أفلاطون في أثينا عام ٤٢٨ قبل الميلاد وتوفي هناك ٣٤٧ قبل الميلاد ، وعاش في بيئة غنية ، لذا تعلم العلوم على جهابذة الفكر آنذاك . ولذا فإن أفلاطون عرّف العلم وأبعده عن الخرافات . كما عُرِف عن أفلاطون أنه قال : «ما قام عليه دليل منطقي فهو علم ، وما لم يقم على دليل منطقي فليس بعلم» . فهو أول من وضع البرهان المنطقي الذي يعتبر ركن المنهج العلمي . فالمصنفات التي صدرت من الأكاديمية الأفلاطونية كانت تحظى في برهان جميع النظريات التي وردت فيها ، لذلك صارت سريعة الانتشار والتداول . علماً أن أفلاطون كان يؤمن إيماناً قوياً أن هناك مسلمات لجميع العلوم وتعتبر مسلمات عامة ، ثم لكل فن مسلمات خاصة به ، وهذه المسلمات لا تحتاج إلى برهان .

ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن أفلاطون اهتم بالرياضيات البحتة وأهمل الرياضيات

التطبيقية . لذا كانت إضافات أفلاطون إلى المعرفة الرياضية من النوع الفلسفي ، فقد هذب التعاريف وزاد الضبط المنطقي للأصول . وليس من الممكن أن نقيس مدى تلك الإضافات ولا مدى جدتها ، ولكننا نعلم أن الأكاديمية الأفلاطونية جعلت للمناقشات الرياضية شأناً كبيراً ، فكان أهم نتيجة لذلك أن زادت الرياضيات دقة وقوة . وهذا لا يمكن أن يعزى على وجه اليقين إلى أفلاطون أستاذ الأكاديمية الأكبر ولا إلى أحد بعينه من رجالها وإنما هو إلى حد ما عمل جماعي . وبقي أفلاطون رئيساً للأكاديمية حتى توفي ، فخلفه ابن أخيه أسبوسيبوس (Spensippus) بالوصية منه . وهذا مما أغضب أرسطو ، لأنه يرى أنه أحق برئاسة الأكاديمية من أسبوسيبوس .

تواتر أن أفلاطون أنه قال : «لا بد لمن يبغي تعلم الرياضيات من أن يحبها وإلا فلا سبيل له إلى تحصيلها» . وكذلك نقش على باب الأكاديمية الأفلاطونية «من لم يكن رياضياً فلا يدخل ها هنا» . لذا يتضح أن أفلاطون بحق كان رياضياً مغرماً بهذا الفن ، فله الفضل في بناء الأكاديمية التي جمع فيها كبار علماء عصره في هذا الميدان المهم . أيضاً يعود الفضل له في جعل مادة الرياضيات في أعلى مكان بين الفنون الثقافية . من هذا يحق أن نقول : إن تحمس أفلاطون لعلم الرياضيات جعلها ضرورة لتدريب العقل على التفكير الصحيح الدقيق .

أعظم عمل قامت به الأكاديمية الأفلاطونية ابتكار الطريقة التحليلية كطريقة للبرهان ، وكذلك دراسة علم الحجوم الذي أهملها علماء اليونان حتى عصر أفلاطون ، لذا عرفت المجسمات المنتظمة بالأشكال الأفلاطونية ، علماً أن الفيثاغوريين عملوا أعمالاً عظيمة في المجسمات المنتظمة وخاصة

النجمة المخمسة والمخمسات . ويذكر هيث في كتابه «تاريخ الرياضيات اليونانية» : «أن تحمس أفلاطون للرياضيات وخاصة علم الهندسة من أسباب تقدم الرياضيات الهائل ، ويظهر هذا التحمس من الإيضاحات الرياضية التي ضمنها مؤلفات أكاديميته في العلوم . كما أنه حث وأثار الإعجاب في نفوس الدارسين لعلم الفلسفة بأن يولوا عناية خاصة في علم الهندسة التي تخضع للمنطق الرياضي ، الذي كان ينادي بتعلمه من الصفر .

يبدي أفلاطون اهتمامه في العلوم الرياضية في جمهوريته عندما قال : «من المناسب أن ننص في قوانيننا على وجوب دراسة علم الرياضيات ، ويجب أن نحمل من يلي مناصب الدولة العليا أن يدرس الحساب ويتمكن منه لا كما يفعل الهواة ، بل عليه أن يواصل دراسته حتى يصل إلى مرحلة تدبر طبيعة العدد بالتفكير والبحث ، لا للانتفاع به في البيع والشراء - شأن من يعد نفسه ليكون تاجراً أو بائعاً متجولاً - بل للانتفاع به في الحرب وفي تيسير صرف النفس عن عالم الجوهر والحقيقة» .

وسنحاول أن نقدم نبذة مختصرة عن العلماء الذين عاصروا أكاديمية أفلاطون مستمدة من كتاب «تاريخ العلوم» لجورج سارتون و«موجز تاريخ الرياضيات» لكل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد :

**تياتيتوس :**

لا نعلم كثيراً عن سيرته ، ولكنه من أهل أثينا وعاش فيما بين ٤١٥-٣٦٩ قبل الميلاد ، واشتهر باكتشافه المجسمات المنتظمة ذات ثمانية الأوجه والعشرين وجهاً . وإليه ينسب بعض هذه الأفكار الرياضية للمجسمات المنتظمة وهي :

(١) مجموع الزوايا المستوية لأية زاوية مجسمة محدبة أقل من أربع قوائم ، ولا يمكن أن تصل إلى النهاية العظمى (أي أربع قوائم) إلا إذا سطحت الزاوية المجسمة ، وعندئذ تصبح الزاوية المجسمة لا وجود لها .

(٢) إذا كانت الأوجه مثلثات فيمكن أن يوجد حول النقطة :

أ - ثلاث مثلثات ويكون المجسم رباعي الأوجه ، أي : هرماً ثلاثياً .

ب - أربعة مثلثات ويكون المجسم ثماني الأوجه .

جـ - خمسة مثلثات ويكون المجسم ذا عشرين وجهاً .

ولا يمكن أن يوجد ستة مثلثات لأن مجموع الزوايا المستوية في كل رأس يساوي ٦ × ٦٠ = ٣٦٠° وهذا ليس أقل من أربع قوائم .

(٣) إذا كانت الأوجه مربعات فيمكن أن توجد ثلاثة أوجه فقط حول النقطة ويكون الجسم الناتج سداسي الأوجه (مكعباً) .

(٤) إذا كانت الأوجه مخمسات فيمكن أن توجد ثلاثة أوجه فقط لكل رأس زاوية مجسمة (لأن زاوية المخمس المنتظم= $\frac{٦}{٥}$ القائمة) ويكون ذا الاثني عشر وجهاً .

(٥) ولا يمكن أن يوجد غير ذلك لأن زاوية المسدس المنتظم = $\frac{٤}{٣}$ القائمة وثلاثة منها تساوي أربع قوائم .

ومما تقــدم نفهم أنه لا يوجـد إلا خمسة مجسمات منتظمة هي ذات : ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٢ ، و٢٠ وجهاً متساوياً .

والجدير بالذكر هنا أنه من الضروري أن نضيف كلمة (محدب) ، لأنه قد تبين أخيراً أن هناك مجسمات منتظمة أخرى ليست محدبة وتسمى كثيرات السطوح النجمية (Polyhedron's Stellated) . والعلاقة بين المجسمات

المنتظمة المحدبة والمجسمات كثيرات السطوح النجمية هي كالعلاقة بين النجمة المخمسة والمخمس . وأضاف كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما المذكور أعلاه أنه في عام ١٨١٠م كشف لويس بوانسو (١٧٧٧-١٨٥٩م) أربعة من كثيرات السطوح النجمية ، ثلاثة نجميات ذوات الاثني عشر وجهاً وواحداً ذا عشرين وجهاً . وفي سنة ١٨١٣م أثبت أوجستين كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧م) أن هذه المجسمات التسعة هي كل المجسمات المنتظمة . وقد بين جوزيف برتراند (١٨٢٢-١٩٠٠م) أن رؤوس كل كثير سطوح نجمي يجب أن تكون رؤوس كثير سطوح محدب متحد معه في المركز .

**أرخيتاس التارني :**

لا نعرف الكثير عنه ، ولكنه رجل له مكانته السياسية والعلمية في مدينة تارنتم ، ويذكر أفلاطون أنه عندما زار صقلية آخر مرة سنة ٣٦١ قبل الميلاد كان أرخيتاس لا يزال على قيد الحياة .

واشتهر أرخيتاس في بحثه في العالم من حيث هو محدود أو لا نهائي ، وتوصل في النهاية إلى أن العالم غير محدود .

قضى مدة طويلة في دراسته لموضوع تضعيف المكعب الذي اختزلها أبقراط الخيوسي إلى إيجاد وسطين هندسيين بين مستقيمين معلومين ، ولكن أرخيتاس عيَّن هذين الوسطين بواسطة تقاطع ثلاثة أسطح دورانية ، سطحان منها هما الأسطوانة وحلقة الأنجر (Torus) التي نصف قطرها الداخلي صفر . يتقاطعان في منحنى ثنائي الانحناء ، وتقاطع هذا المنحنى مع المسطح الثالث وهو مخروط دائري قائم يعطي الحل . وهذه أول حالة على الإطلاق استعمل فيها منحنى ثنائي الانحناء .

وتواتر عن مؤرخي العلوم أن أرخيتاس عنده عقلية عظيمة في مجال الميكانيكا ، فهو من علماء اليونان الفريدين الذين درسوا العلاقة بين الميكانيكا والرياضيات ، وقادهم ذلك إلى تطوير فن الموسيقى .

## يودكسوس الكنيدي :

ولد في كنيدوس سنة ٤٠٨ قبل الميلاد وتوفي سنة ٣٥٥ قبل الميلاد . تلقى علم الهندسة على الأستاذ الكبير أرخيتاس التارني . زار أثينا وهو في سن ٢٣ سنة وهناك تتلمذ على أفلاطون . كان فقيراً معدماً في بادئ حياته ، ولكنه برز في العلوم الرياضية وصار من الأساتذة الكبار الذي يشار إليهم بالبنان . وتواتر لدى المؤرخين في العلوم أن نظريات الباب الخامس من كتاب أصول الهندسة لإقليدس (الحجوم ونسبة بعضها إلى بعض) ليودكسوس .

نال يودكسوس مكانة مرموقة عند المؤرخين في الرياضيات ، حيث نسبت إليه :

(١) النظرية العامة في التناسب .

(٢) القسمة الذهبية والمراد بها تقسيم المستقيم قسمة ذات وسط وطرفين ، وهي التي نشأت عند إنشاء المخمس والمجسم ذي الاثنى عشر وجهاً . ولقد بسطها إقليدس فيما بعد ، وذلك بتقسيم مستقيم إلى جزأين بحيث يكون المستطيل المكون من المستقيم وأحد الجزأين مساوياً لمربع الجزء الآخر .

أو بعبارة أخرى لدينا مستقيم طوله ل يراد تقسيمه إلى جزأين س ، ل − س

بحيث يكون $\frac{\text{ل}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{ل} - \text{س}}$ ، $\text{س}^2 = \text{ل}\,(\text{ل} - \text{س}) \Longleftarrow \text{س}^2 + \text{ل}\,\text{س} - \text{ل}^2 = ٠$

بما أن $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$ ، وحيث إن أ = ١ ، ب = ل ، $\text{جـ} = -\text{ل}^2$

$$\text{إذن } س = \frac{-\text{ل} + \sqrt{\text{ل}^{٢} - ٤(-\text{ل}^{٢})}}{٢} = \frac{-\text{ل} + \sqrt{\text{ل}^{٢} + ٤\text{ل}^{٢}}}{٢}$$

$$= \frac{-\text{ل} + \text{ل}\sqrt{٥}}{٢} = \frac{\text{ل}(\sqrt{٥} - ١)}{٢}$$

(٣) نظرية الاستنفاد فهي طريقة صادقة للكميات المتناهية في الصغر . وأساسها تصور فكرة النهاية تصوراً دقيقاً ، وباختراعها صار يودكسوس من أقدم الرواد لحساب التكامل ، وإن كان تكامل المساحات البسيطة معروفاً قبله ، لأن العلماء الأوائل وصلوا إلى نتائج من قبيل أن النسبة بين دائرتين كالنسبة بين مربع قطريهما .

(٤) له باع طويل في الهندسة الفراغية (المجسمة) .

ويذكر عمر فروخ في كتابه «تاريخ العلوم عند العرب» أن ليودكسوس البرهان على أن الهرم يساوي ثلث المنشور في الحجم وعلى أن المخروط يساوي ثلث الأسطوانة في الحجم ، إذا كانت قاعدة كل زوجين وارتفاعهما متساويين(١) . وكذلك له نسبة دائرة إلى دائرة أخرى (في المساحة) كنسبة مربع نصف القطر في إحداهما إلى مربع نصف القطر في الأخرى ، وأن نسبة كرة إلى كرة كنسبة مكعب نصف القطر في إحداهما إلى مكعب نصف القطر في الأخرى .

(١) المنشور (في الهندسة) : جسم كثير السطوح قاعدتاه أو ضلعاه متساويان ومتماثلان ومتوازيان ، وكل سطح من سطوحه الأخرى الجانبية متوازي الأضلاع ، وينسب المنشور عادة إلى شكل قاعدته فيقال : منشور ثلاثي أو رباعي (المعجم الوسيط ٩٢٩) . ويقال له في بعض الأحيان : موشور .

## عصر أرسطو[١] :

عاش أرسطو بين (٣٨٤-٣٢٢ قبل الميلاد) ، لذا يعتبر القرن الرابع قبل الميلاد عصر أرسطو طاليس ، فأرسطو من كبار علماء الأكاديمية الأفلاطونية ، حيث قضى حوالى عشرين عاماً وهو متصل بها بطريق مباشر أو غير مباشر . ولد أرسطو في سطا جبرا (مقدونية) وكانت مستعمرة يونانية على بحر إيجه . كان والده نيقوماخوس طبيباً للملك أمينتاس الثاني (Amyntas II) ملك مقدونية وحفيد الإسكندر الأكبر ، لذا فأرسطو جاء من عائلة عريقة في الطب . نال شهرة عظيمة بين معاصريه بعلم الفلسفة ، والأمانة ، ولذا لقب بـ«المعلم الأمين» ، وكذلك «عقل الأكاديمية المفكر» لأنه تميز على زملائه في الأكاديمية الأفلاطونية .

ويذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أن أرسطو طاليس ميز بين البديهيات المشتركة بين كل العلوم والمسلمات الخاصة بكل علم على حدة ، فمن البديهيات المشتركة بين العلوم :

(١) الشيء لا يكون إلا مقبولاً أو مردوداً .

(٢) الشيء لا يكون موجوداً ولا معدوماً في آن واحد .

(٣) إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية فلا بد أن يكون الناتج متساوياً .

أما علي عبد الله الدفاع فيقول في كتابه «العلوم البحتة في الحضارة العربية والإسلامية» : إن أهم إنتاج علمي قام به أرسطو طاليس :

---

(١) عاش أرسطو في مصر أشد اضطراباً ، ولكنه خدم علم الهندسة خدمة نافعة ، فقد صاغ تعاريف الهندسة بلغة سهلة وواضحة ، وإن كان معرفته في الرياضيات محدودة إذا ما قورن بأستاذه أفلاطون .

(١) مجموع الزوايا الخارجة لأي مضلع تساوي أربع زوايا قائمة .
(٢) المحل الهندسي لنقطة النسبة بين بعديهما عن نقطتين ثابتتين نسبة معلومة دائرة .
(٣) قانون متوازي الأضلاع .
(٤) مؤلفات في المنطق والسياسة والاقتصاد وما وراء الطبيعة والرياضيات وعلم النفس .
(٥) قسم العلوم إلى ثلاث أقسام : العلوم النظرية والعلوم العملية والعلوم الفنية .

ونوه محمد عبد الرحمن مرحبا في كتابه «الموجز في تاريخ العلوم عند العرب» أن أرسطو كان مؤلفاً مكثراً كأستاذه أفلاطون ، لم يترك فناً إلا طرقه ، ولا مذهباً من مذاهب الفلسفة والأخلاق إلا عالجه ، ولا نظاماً اجتماعياً إلا تناوله بالدرس والنقد ، فله مؤلفاته في الطبيعة وما بعد الطبيعة والنفس والأخلاق والسياسة والخطابة والحيوان . وكان من عاداته أن يعطي محاضراته وهو يمشي ومعه تلاميذه ، فعرف هو وأتباعه باسم المشائين .

ويرى جورج سارتون في كتابه المذكور أعلاه أن أعظم خدمات أرسطو في الرياضيات بحوثه الحذرة في الاستمرار واللانهاية . وعنده أن اللانهاية لا توجد إلا بالقوة ، ولا توجد بالفعل . وآراؤه في هذه المسائل الأساسية – بعد أن شرحها وأضاف إليها كل من أرخميدس وأبولونيوس – هي أساس علم التكامل .

والحق أن أرسطو طاليس ومعاصريه وضعوا الأسس العلمية للأعمال الجليلة التي أداها من بعدهم إقليدس وأرخميدس وأبولونيوس وغيرهم . كما أنهم أيضاً همزة الوصل بين هؤلاء العمالقة وعلماء الأكاديمية الأفلاطونية .

واشتهر أرسطو طاليس وزملاؤه بأنهم كانوا يأخذون بالكليات أكثر من الجزئيات ، وبالأسباب العامة أكثر من الخاصة ، وهذه الظاهــرة انفرد بها أرسطو طاليس وزملاؤه العظام .

**مينايخموس (Menaichmos) :**

لا نعلم شيئاً عن حياته ، ولكن نعرف أن إنتاجه ظهر للعيان (سنة ٣٥٠ قبل الميلاد) قضى مينايخموس (Menaichmos) ردحاً من الزمن في أثينا ودرس في الأكاديمية الأفلاطونية ، فهو من كبار علمائها الذين حاولوا أن يصلوا بعلم الهندسة إلى الكمال . ويذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أن مينايخموس اهتم اهتماماً بالغاً بإنشاء التركيب الهندسي ، كما كان مينايخموس مولعاً بالمشكلة القديمة ، مشكلة تضعيف المكعب والتي أوجزها أبقراط الخيوسي (في القرن الخامس قبل الميلاد) في إيجاد وسطين هندسيين بين مستقيم وآخر ضعفه ، ومعنى ذلك بالاصطلاح الحديث أن أبقراط اختصر حل معادلة تكعيبية فجعله حل معادلتين تربيعيتين . فكيف يتسنى حل هاتين المعادلتين؟ وجد مينايخموس طريقتين لحلهما بواسطة تقاطع قطعين مكافئيين س$^{٢}$ = أ ص ، ص$^{٢}$ = ٢ أ س في الحالة الأولى ، ثم قطع مكافئ وقطع زائد في الحالة الثانية س$^{٢}$ = أ ص ، س$^{٢}$ − ص$^{٢}$ = أ ص − ٢ أ س .

وأضاف جورج سارتون في كتابه المذكور أعلاه أنه يعزى كشف القطوع المخروطية لمينايخموس . وطريقته في إنشاء هذه القطوع غريبة جداً ، فقد تصور مستوياً يقطع مخروطاً دائرياً قائماً بحيث يكون عمودياً مع أحد الرواسم[١] . ويمكن الحصول على القطوع الثلاثة المختلفة (ويظهر أنه فرق

---

(١) المولدات .

بينهما) بزيادة زاوية رأس المخروط[1] وما دامت الزاوية حادة فالقطع الناشئ قطع ناقص ، فإذا صارت قائمة كان القطع مكافئاً ، وإذا صارت منفرجة أمكن الحصول على فرعي القطع الزائد .

كان الإسكندر الأكبر يحب العلماء ومجالستهم ، وكان يعجب بهم ، فذات مرة سأل الإسكندر الأكبر مينايخموس عن أقصر طريق لتعلم علم الهندسة . ينقل لنا كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» القصة كما وردت وهي : سأل الإسكندر الأكبر مينايخموس : أهناك طريق مختصر إلى تعلم الهندسة؟ فكان جوابه : أيها الملك إن للسفر في أنحاء البلاد طرقاً ملكية وطرقاً للجمهور ، ولكن لا يوجد في الهندسة غير طريق واحد يسلكه الناس جميعاً .

**أريستايوس الكبير :**

لا نعرف متى ولد ولا متى توفي ، ولكنه كان عبارة عن نقطة الارتباط بين عصر أرسطو (القرن الرابع قبل الميلاد) وعصر إقليدس (القرن الثالث قبل الميلاد) . وكان لأريستايوس الكبير (Aristaios the Elder) مكانة مرموقة بين علماء علم الهندسة . يذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أن أريستايوس كتب كتابين هامين هما : «كتاب في القطوع المخروطية باعتبارها محال هندسية» ، و«كتاب في مقارنة الأشكال الخمسة» ويقصد هنا المجسمات الخمسة . وقد ضمن كتابيه بعض التعاريف العلمية التي نقلها عن مينايخموس . وله نظرية مشهورة وهي أن دائرة واحدة تحيط بكل من المخمس ذي الاثنى عشر وجهاً والمثلث ذي العشرين وجهاً ، إذا رسم كل من المجسمين في دائرة واحدة .

(١) يقصد بزاوية المخروط هنا الزاوية المحصورة بين أي مولدين فيه ، وهي ضعف الزاوية التي كونت المخروط بدورانها .

### إقليدس (ت نحو ٢٧٥ق . م .) :

كانت أثينا في سنة ٣٣٨ قبل الميلاد تحت سيطرة الحكم المكدوني ، وبعد سنتين تماماً خلف الإسكندر الأكبر والده في الحكم ، ومنها بدأت الفتوحات التاريخية ، فأسس مدينة الإسكندرية في مصر سنة ٣٣٢ قبل الميلاد ، والتي صار لها شأناً عظيماً في التاريخ اليوناني . وبعد وفاة الإسكندر الأكبر انقسمت مملكته إلى دويلات صغيرة ، فكانت مصر من حظ بطليموس ، فبنى جامعة الإسكندرية ومكتبتها العظيمة سنة ٣٠٠ قبل الميلاد ، وكان إقليدس من ضمن أساتذته في حقل الرياضيات .

والثابت عن إقليدس أنه تعلم في أثينا ، ولكنه انضم لجامعة الإسكندرية عام ٣٠٠ قبل الميلاد ، لذا يعتبر إقليدس من علماء النصف الأول من القرن الثالث قبل الميلاد . والحقيقة أن كل ما نعرفه عنه من كتابه «أصول الهندسة» الذي جمعه من مصادر مختلفة ، فخدم به الإنسانية . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أنه لا غرابة في أننا لا نعرف بالضبط تاريخ ومحل ولادة وموت إقليدس ، إذ إن كثيراً من العلماء الكبار عرباً وغير عرب طويت صحائفهم ، فلم نعد نعرف عنهم إلا النزر اليسير . ويحتمل جداً أن إقليدس درس الرياضيات المعروفة في زمانه في أثينا في حدود ٣٠٠ قبل الميلاد ، ثم سافر إلى الإسكندرية وصار أستاذاً في جامعتها . وقد نشر إقليدس كتابه «أصول الهندسة» في مدينة الإسكندرية ونال شهرة عظيمة بهذا الكتاب . إن قسماً كبيراً من المؤرخين في مجال الرياضيات لا ينعتون إقليدس بأكثر من جامع ومرتب ومنسق للمعلومات المعروفة في زمانه ، ولكن الإنصاف يجعل أغلبية المؤرخين يشيدون بفضله في هذا العمل الأول من نوعه . وبقي كتاب أصول

الهندسة أكثر من ألفي سنة كتاباً مدرسياً يستعمل في مدارس وجامعات أوروبا وإفريقيا وآسيا وأمريكا ، فليس هناك رياضي إلا نهل من هذا الينبوع ، وهو بالحقيقة كتاب في غاية الإتقان والدقة .

بدأ إقليدس هندسته بثلاث مفردات لا تحتاج إلى تعريف وبرهان وهي : النقطة والخط المستقيم والسطح ، ولكنه أيضاً حاول أن يقربها إلى أذهان طلابه بجامعة الإسكندرية فقال : إذا تقاطع خطان يتقاطعان في نقطة ، وإذا تقاطع سطحان يتقاطعان في خط مستقيم . وقد تبنى إقليدس المنهج العلمي الذي اقترحه أفلاطون والذي فحواه «ما قام عليه دليل منطقي فهو علم ، وما لم يقم عليه دليل منطقي فليس بعلم» . لذا نرى إقليدس ضمن كتابه النظريات التي استطاع أن يجد لها برهاناً منطقياً .

ألف إقليدس كتابه «أصول الهندسة» الذي يعتبر دائرة معارف ليس فقط في مجال الهندسة ، ولكن في كل المعارف الرياضية . ويتألف كتاب «أصول الهندسة» (Elements of Euclid) من ثلاثة عشر جزءاً :

**الكتاب الأول** : يشمل التعريفات والمسلمات ويتناول المثلثات والمتوازيات ومتوازيات الأضلاع .

**الكتاب الثاني** : يحتوي على معلومات جيدة عن الجبر وعلاقته بالهندسة (الجبر الهندسي) .

**الكتاب الثالث** : عن هندسة الدائرة .

**الكتاب الرابع** : يعالج كثيرات الأضلاع المنتظمة .

**الكتاب الخامس** : يتعامل مع نظريات في النسب المستخدمة في الكميات التي تعد والكميات التي لا تعد .

**الكتاب السادس :** يحتوي على تطبيقات عامة على الهندسة المستوية .

**الكتب من ٧-٩ :** بحثت في أنواع الأعداد ، والمضاعف المشترك الأصغر ، ونظرية الأعداد بوجه عام .

**أما الكتاب العاشر :** فقد خصصه إقليدس للمستقيمات غير الجذرية .

**الكتب من ١١-١٣ :** تعالج الهندسة المجسمة ، حيث جاء في الكتاب الثاني عشر تطبيقات على نظرية الاستنفاد في قياس الدائرة والكرة والمخروط وغيرها من الأشكال الدورانية . أما الكتاب الثالث عشر فيحتوي على جميع المجسمات المنتظمة المعروفة آنذاك .

ويذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أنه أضيف إلى «أصول الهندسة» لإقليدس كتابان آخران يعالجان المجسمات المنتظمة ، وهما الكتابان الرابع عشر والخامس عشر ، وقد ظهرا في طبعات عديدة أو في ترجمات مخطوطة أو مطبوعة . وقد ألف هيبسيكليس الإسكندري (Hypsicles) ما يسمى بالكتاب الرابع عشر في بداية (القرن الثاني قبل الميلاد) ، وهو كتاب على درجة كبيرة من الجودة والأهمية . أما الكتاب الثاني والموسوم بالكتاب الخامس عشر فهو أحدث كثيراً من الرابع عشر وقد كتبه أحد تلاميذ ايزيدورس المليطي (مهندس أيا صوفيا سنة ٥٣٢ تقريباً) .

إن اختيار إقليدس للبديهيات الخمس وللمسلمات (المصادرات) الخمس يدعو للدهشة ، حيث أنشأ هندسته عليها . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن إقليدس بنى هندسته على التعاريف والفرضيات دون أن يعتبر أن هناك بعض المفاهيم والكلمات تؤخذ بدون تعريف (Undefined Terms) لأن الإثبات المنطقي

لا بد أن يرتكز على نقطة ابتداء مفروضة بغير مناقشة وإلا فالحلقة مفرغة لا مناص منه . وضع إقليدس ٢٣ تعريفاً متعلقة بالنقطة والخط المستوي وحدودهما والزاوية وأنواعها والأشكال وأجزائها ، كما وضع عشر فرضيات استند إليها في اشتقاق نظريات الهندسة الإقليدية المعروفة .

البديهيات العامة (Common Notions) لكل العلوم الرياضية :

(١) الأشياء التي تساوي شيئاً واحداً متساوية .

(٢) الأشياء المتساوية إذا أضيفت إلى أشياء متساوية كانت النواتج متساوية .

(٣) إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية تكون البواقي متساوية .

(٤) الأشياء المتطابقة متساوية .

(٥) الكل أكبر من جزئه .

المسلمات أو المصادرات (Postulates) تتعلق بالهندسة فقط :

(١) يمكن أن يمد مستقيم من أي نقطة إلى أية نقطة .

(٢) يجوز مد قطعة المستقيم إلى ما لا نهاية من كلتا جهتيها .

(٣) يمكن أن نرسم دائرة من أي مركز بأي نصف قطر .

(٤) الزوايا القائمة متساوية .

(٥) إذا قطع مستقيم مستقيمين فكانت الزاويتان المحصورتان بينه وبين المستقيمين في إحدى جهتيه أقل من قائمتين ، فالمستقيمان يلتقيان في تلك الجهة من القاطع إذا مدّا إلى غير حد .

وكما ذكرنا آنفاً أن إقليدس وصل إلى مكانة مرموقة بمؤلفه الضخم «أصول الهندسة» والذي يحتوي على ما يقرب من (٤٦٥) نظرية معظمها في مجال الهندسة ، ويضم في بعض أجزائه نظريات مهمة في مجالي الحساب

والجبر . وقد اعتمد إقليدس في براهين الكثير من النظريات التي وردت في كتابه «أصول الهندسة» على التفكير المنطقي الفيثاغوري الذي يمثل الأعداد بخطوط . علماً أن إقليدس تجنب النظريات التي ليس لها برهان واضح وجلي . ويلزم أن لا ننسى أن إقليدس له مؤلفات عدة منها الأصول والمناظر والمعطيات ولكن كتاب الأصول أهمها وخاصة في المعارف والعلوم الرياضية .

حقاً إن إقليدس فشل فشلاً ذريعاً في موضوع البرهان التجريبي ، ولكنه نجح نجاحاً باهراً في البرهان المنطقي النظري . لذا نستطيع أن نقول : إن إقليدس أدى رسالته المطلوبة في العلوم الرياضية ، ولكنه أخفق في العلوم التجريبية . فلا يستغرب أبداً أن علماء العرب والمسلمين انتقدوا إقليدس لأنه ركز على البرهان المنطقي النظري ، وأهمل تماماً بل حارب البرهان العلمي التجريبي . ولكن علماء العرب والمسلمين هم الذين بدؤوا الدليل العلمي ، وجعلوا الأخلاقيات العلمية جزءاً لا يتجزأ من منهجهم ، فقد اشتهروا بأمانتهم العلمية . والجدير بالذكر أن علماء المسلمين نشؤوا في بيئة تملي عليهم الأمانة ، لأنه مطلوب منهم التأكد من صحة بعض الأحاديث النبوية ، ففي بعض الحالات يستدعي الأمر إلى أن يقطع الباحث آلاف الأميال ليحصل على مخطوط أو يلتقي بعالم مشهور كي يتثبت من صحة معلوماته . ولكن للأسف الشديد أن هذه الأخلاقيات العلمية تضاءلت في نهاية العصور الإسلامية .

وخلاصة القول : إن إقليدس له فضل عظيم على الإنسانية ، لأنه جمع المعلومات الهندسية المنتشرة والمتناثرة آنذاك في كتابه «أصول الهندسة» ، فهو الذي رتب هذه المعارف في كتابه المذكور بطريقة منطقية مدهشة . إضافة إلى ذلك هناك بعض النظريات في كتابه «أصول الهندسة» ليس لها هوية معروفة ، لذا يمكن أن تنسب إليه .

## أرخميدس السيراكيوسي[1] :

من علماء القرن الثالث قبل الميلاد البارزين . ولد أرخميدس في سيراكيوس (صقلية) سنة (٢٨٧ قبل الميلاد) وقتل سنة (٢١٢ قبل الميلاد) على يد جندي روماني جاهل . ذهب إلى مصر ودرس في جامعة الإسكندرية ، وتفنن في الرياضيات والفيزياء ، وعاد إلى مسقط رأسه حتى كان أشهر أبناء مدينته وأعظم علماء الرياضيات في الحضارة اليونانية .

نبغ أرخميدس في علم الفيزياء إلى درجة أن كثيراً من معاصريه صار يخيل لهم أنه ساحر ميكانيكيّ . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن أرخميدس اخترع الروافع والبكرات لرفع الأثقال الكبيرة التي استعملها في الدفاع عن سيراكيوس ضد هجمات الرومان ، فمن فتحات في أسوار سيراكيوس وبواسطة أعمدة متحركة معلقة على الأسوار استطاع أرخميدس أن يرمي سفن الرومان المهاجمة بأحجار كبيرة تعمل على إغراقها . وقد أخذ الرومان المهاجمين الذعر لدرجة أنهم كانوا إذا رأوا قطعة حبل أو خشب تتأرجح على أسوار المدينة صاحوا أن أرخميدس قد حرك ضدهم آلة من آلاته وولوا الأدبار هاربين ، أو يقال : إن أرخميدس استعمل المرايا المقعرة لجمع أشعة الشمس وتسليطها على أشرعة السفن المهاجمة وإحراقها .

ويذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلم» أن أخميدس قام باختراعات كثيرة منها آلات مثل البكرات المركبة ، والحلزون غير المنتهي ، والساعة

(١) كان والد أرخميدس فيداس (Phidias) رياضياً وفلكياً ، صاحب صلة قوية بحاكم سيراكيوس هيرو الثاني الملقب بالجبار .

الشمسية[١] ، والطنبور[٢] ، والمرايا الحارقة ، والمقاليع التي تستخدم لقذف الحجارة الكبيرة ، وعلمي الاستاتيكا والهيدروستاتيكا . كما توصل إلى طريقة يستطيع فيها تحريك ثقل معين بقوة معينة . وكذلك برهن على أن الدوائر الكبرى تفوق الدوائر الصغرى حينما تدور حول نفس المركز .

واستخدم أرخميدس لإيجاد قمة «ط» مضلعاً منتظماً ذي ٩٦ ضلعاً ، لذا وصل إلى أن $٣\frac{١}{٧}$ > ط > $٣\frac{١٠}{٧١}$ أي ٣,١٤٢ > ط > ٣,١٤١ بمقارنة مساحتي المضلعين المنتظمين المرسومين داخل نفس الدائرة وخارجها[٣] ، وتعتبر هذه الطريقة نصراً عظيماً آنذاك . كما أوجد أرخميدس مساحة الأشكال المحدودة بمنحنيات ، وكذلك مساحة السطوح المنحنية وأحجامها . كما استطاع أن يستعمل طريقة تساوي طريقة التكامل لحساب مساحة القطع المكافئة والحلزونات ، وحجوم الكرات ، والقطع الكروية ، وكذلك مساحات قطع من مجسمات الدرجة الثانية .

---

(١) الساعة الشمسية لبيان حركة الشمس والقمر والكواكب ، وكانت هذه الساعة الشمسية من الدقة بحيث تستطيع التنبؤ بما قد يحدث من كسوف الشمس وخسوف القمر .

(٢) طنبور أرخميدس هو قطعة خشب لفت بطريقة حلزونية على محور مائل ، ومحاطة بأسطوانة مجوفة مفتوحة ويوضح جزؤها الأسفل في الماء ، وتدار فيرتفع الماء إلى المستويات الأعلى .

(٣) أوجد أرخميدس المساحة الداخلية والخارجية في كل حالة على أن مساحة الدائرة محصورة بين هاتين المساحتين ، وكلما زاد عدد أضلاع الشكل المرسوم انكمش الفرق بين المساحتين الداخلية والخارجية ، وأصبحت مساحة الدائرة أقرب إلى التحديد .

ويلخص كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما المذكور أعلاه أهم أعمال أرخميدس في العلوم الرياضية وهي :

(١) قوانين سطح وحجم الكرة بطريقة عملية إفناء الفرق ، فوجد سطح الكرة = ٤ ط نق$^{٢}$ ، ومنها استنتج حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق$^{٣}$ .

(٢) حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران قطع ناقص حول أحد قطرية (Circular Ellipsoid) .

(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران قطعة من القطع المكافئ حول محور التناظر (Circular Paraboloid) .

(٤) حجم أجزاء من الكرة والجسم الدوراني المقطوع بمستوى عمودي على محور الدوران .

(٥) نسبة حجم الكرة إلى حجم الإسطوانة المماسة لها تساوي = $\frac{٢}{٣}$ .

(٦) الحجم المشترك بين أسطوانتين متعامدتين ونصفا قطريهما متساويان يساوي = $\frac{٢}{٣}$ حجم المكعب الذي ضلعه قطر كل منهما .

(٧) المساحة المستوية للقطع الناقص .

(٨) المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ووتر عمودي على محوره = $\frac{٤}{٣}$ مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع .

(٩) اللولب الحلزوني المقترن باسمه (حلزون أرخميدس) .

ويذكر عمر فروخ في كتابه «تاريخ العلوم عند العرب» أن من كشوف أرخميدس : إذا كان عندنا أسطوانة ومخروط (مستديرا القاعدة) ونصف كرة ، وكان لها كلها قاعدة واحدة وارتفاع واحد ، فإن حجم نصف الكرة يساوي

ضعف حجم المخروط . ويكون حجم المخروط وحجم نصف الكرة معاً مساويين لحجم الأسطوانة . وقال أرخميدس : «يتشكل الشبيه بالمخروط من دوران القطع المكافئ والقطع الزائد على محوريهما ، والأجسام الشبيهة بالكرة تحدث من دوران القطع الناقص وتكون متطاولة أو مفرطحة بحسب دوران القطع الناقص على محوره الأعظم أو محوره الأصغر» .

ومن مؤلفات أرخميدس التي ذكرها جورج سارتون في كتابه آنف الذكر هي :

١ - كتاب عن الكرة والأسطوانة وهو من مجلدين .

٢ - كتاب في قياس الدائرة .

٣ - كتاب في أشباه المخروط وأشباه الكرة .

٤ - كتاب خصص للحلزونات .

٥ - كتاب في توازن المستويات .

٦ - كتاب عن تربيع القطع المكافئ .

٧ - كتاب التمهيديات .

٨ - كتاب عداد الرمل .

٩ - كتاب في الأجسام الطافية .

١٠- مسألة الماشية .

١١- كتاب في الميكانيكا النظرية .

١٢- كتاب الطريقة .

١٣- كتاب ستوماخيون (الألغاز الهندسية) .

ويروي كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما المذكور أعلاه قصة علمية تستحق أن نذكرها للقارئ وهي : طلب الملك هيرو الثاني

من أرخميدس معرفة ما إذا صدق صائغ كان قد صاغ تاجه من الذهب الخالص أم أنه قد غشه بخلطه من الفضة ، وجاءت الفكرة لأرخميدس في أثناء اغتساله في الحمام ، فخرج من الحمام عارياً يجري في شوارع سيراكيوس صائحاً «وجدتها وجدتها» فمن وجوده في الحمام انتبه إلى أن الجسم الغاطس يفقد من وزنه بقدر وزن السائل المزاح ، ولم يذكر التاريخ عن ثبوت أمانة الصائغ أو غشه في صنع تاج الملك . وكانت الطريقة التي استخدمها أرخميدس هي :

(١) أخذ وزناً (مساوياً لوزن التاج) من الذهب الخالص وليكن (ث) وقد حسب مقدار ما يفقد من وزنه في السائل وليكن ($ف_{١}$) .

(٢) أخذ وزن (ث) من الفضة الخالصة ، وقد حسب مقدار ما يفقده من وزنه في نفس السائل وليكن ($ف_{٢}$) .

(٣) حسب مقدار ما يفقد التاج من وزنه في ذلك السائل وليكن ف ، فإذا كان ف = $ف_{١}$ فإن التاج من الذهب الخالص . وإذا كان غير ذلك فيمكن حساب نسبة الذهب إلى الفضة في ذلك التاج .

فرض أن $ث_{١}$ = مقدار الذهب الخالص في التاج .

$ث_{٢}$ = مقدار الفضة الخالصة في التاج .

إذن ث = $ث_{١}$ + $ث_{٢}$

ومقدار فقدان $ث_{١}$ من السائل يكون $\frac{ث_{١}}{ث}$ = $ف_{١}$

ومقدار فقدان $ث_{٢}$ من السائل يكون $\frac{ث_{٢}}{ث}$ = $ف_{٢}$

( إذن $\text{ف} = \frac{\text{ث}_1}{\text{ث}}\,\text{ف}_1 + \frac{\text{ث}_2}{\text{ث}}\,\text{ف}_2$ )

ولما كان $\text{ث} = \text{ث}_1 + \text{ث}_2$

ينتج أن $\frac{\text{ث}_1}{\text{ث}_2} = \frac{\text{ف}_2 - \text{ف}}{\text{ف} - \text{ف}_1}$

والمعروف أن أرخميدس لا يهتم بمظهره ، بل كان دائماً يجلس منهمكاً بأشكال يرسمها على الرماد المتناثر من مدفأته ، ولم يستطع الرومان فتح سيراكيوس إلا عندما دخلوها أثناء احتفالات سكانها . وقد كان أرخميدس في أثناء ذلك منشغلاً بمسألة رياضية على شكل هندسي مرسوم على التراب ، فرأى ظلاً يقع على الرسم ، فصاح ابتعد عن الرسم ، فقتله الجندي الروماني عن عمر يناهز ٧٥ سنة ، وبموت أرخميدس انتهى العصر الذهبي للرياضيات عند اليونان .

وأضاف كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما المذكور أعلاه أيضاً أن الملك هيرو الثاني حاكم سيراكيوس طلب من أرخميدس تفريغ ماء إحدى السفن الغريقة ، فأخذ أرخميدس أنبوبة طويلة مفتوحة في نهايتيها وفي داخلها قطعة حلزونية من المعدن تشبه فتاحة سداد الفلين ، فعندما غمر أحد طرفي الأنبوبة في الماء وأدير الحلزون بدأ الماء يرتفع في الأنبوب . وبذا استطاع أرخميدس تفريغ ماء السفينة الغريقة . بدون شك مما تقدم نستطيع القول : إن أرخميدس عقلية جبارة ونادرة الوجود . لذا لا عجب إذا تواتر عن الكثير من المؤرخين للعلوم أن العصر الذهبي للرياضيات اليونانية مات بموت أرخميدس .

## أبولونيوس البرجي (Apollonius) :

عاش أبولونيوس البرجي فيما بين (٢٦٢-٢٠٠ قبل الميلاد) ، ولد في برجه في بامفليا[1] (Pamphlia) ودرس في جامعة الإسكندرية وتوفي فيها . ويعتبر بحق أحد الثلاثة العمالقة في الحضارة اليونانية في مجال الرياضيات . عندما كبر إقليدس في السن كان أرخميدس طفلاً يانعاً ، بينما العملاق الثالث أبولونيوس أصغر من أرخميدس بـ ٢٥ سنة . تأثر أبولونيوس في منهج إقليدس ،لذا جمع كل ما يعرف عن القطوع المخروطية في ثمانية أجزاء .

لقد درس أرخميدس القطوع المخروطية بطريقة القياس ، بينما أبولونيوس تناول القطوع المخروطية بدراسته أشكالها ومواضعها والعلاقة بينها . ويذكر جورج سارتون في كتابه «تاريخ العلوم» أن أرخميدس كان مهتماً بالقياس مثل عمليات التربيع ، واستطاع أن يحقق بمهارة تكاملاً في المستويات أو السطوح ذات الأبعاد الثلاثة المحوطة بمنحنيات ، بالإضافة إلى المجسمات ، أما أبولونيوس فقد حاول أن يفهم أشكال ومواضع القطوع المخروطية ، فضلاً عن إدراك ما بينها من علاقات يمكن أن تميز كل نوع منها . كما درس ما قد يحدث إذا ما تقاطع اثنان من هذه القطوع سواء أكانا من نوع واحد أم مختلفان ويمكننا أن نقول : إن هندسة أرخميدس هندسة القياس ، وهندسة أبولونيوس هندسة الأشكال والأوضاع . ويجب أن نتذكر دائماً أن هذين النوعين من الهندسة ليسا متباعدين ولكنهما متداخلان .

كان لكتب أبولونيوس في القطوع المخروطية صدى عظيماً يضاهي مكانة كتب أصول الهندسة لإقليدس ، حيث بقي كتب كل منهما كتباً دراسية عبر

---

(١) بامفليا بلد صغير في وسط الساحل الجنوبي الشرقي لآسيا الصغرى وغرب قبرص .

العصور . ففي حال هندسة القطوع المخروطية لأبولونيوس ظلت مستخدمة حتى ظهرت كل من الهندسة التحليلية والهندسة الإسقاطية التي بواسطتها استطاع علماء الهندسة المتأخرين أن يحصلوا على نفس النتائج بطريقة أسهل وأعمق .

لخص جورج سارتون محتوى كتب أبولونيوس الثمانية في كتابه المذكور أعلاه كالآتي :

ففي الكتاب الأول توجد طرق تكوين القطوع الثلاثة والفروع الأخرى من القطع الزائد ، فضلاً عن الخواص الأساسية الموجودة بها .

أما الكتاب الثاني فيحتوي على خواص أقطار القطوع ومحاورها ، فضلاً عن الخطوط التقريبية .

والكتاب الثالث يشمل على نظريات ملحوظة يستفاد بها في ربط المحلات الهندسية المجسمة .

ويبين الكتاب الرابع بطرق متعددة كيف تتقاطع القطوع المخروطية مع بعضها ومع محيط الدائرة ، وكذلك يحتوي بصفة خاصة على المسألة المتعلقة بكم عدد النقط التي فيها يتقاطع فرعاً كل من قطعين زائدين .

والكتاب الخامس يعالج النهايات الصغرى والعظمى .

والكتاب السادس يحتوي على القطوع المخروطية المتساوية المتشابهة .

والكتاب السابع يعالج باختصار ثالث النظريات الخاصة بتعيين النهايات .

أما الكتاب الثامن فيتناول مسائل معينة متعلقة بالقطوع المخروطية .

فتصور أبولونيوس للقطوع المخروطية كان على غرار تصور أرخميدس ، ويختلف عن طريقة مينايخموس . ويذكر كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن أبولونيوس أخذ المخروط الناشئ من دوران مستقيم إحدى نهايتيه ثابتة ، والأخرى على محيط دائرة (والمستقيم متغير الطول فيرسم مخروطاً مائلاً) وأعطى الحالات الثلاث الآتية :

**الحالة الأولى** : إذا كانت زاوية رأس المخروط تساوي زاوية ميل المستوى القاطع عن مولده عند التقاطع (أي المستوى القاطع يوازي أحد مولداته الأخرى) فالمقطع يكون قطعاً مكافئاً (Parabola) . وكان يعرف أبولونيوس هذا المقطع : (مساحة المربع المنشأ على العمود النازل من أية نقطة من نقاط المقطع على محوره تكافئ مساحة المستطيل الذي بعداه الوتر البؤري (Lotus Rectum) وبعد مسقط العمود عن رأس المقطع) .

**الحالة الثانية** : إذا كانت زاوية رأس المخروط أقل (أنقص) من زاوية ميل المستوى القاطع عن مولده عند القطع ، فالقاطع يسمى قطعاً ناقصاً (Ellipse) . وكان يعرف أبولونيوس هذا المقطع : (مساحة المربع المنشأ على العمود النازل من أي نقطة من نقاط المقطع على محوره أنقص من مساحة المستطيل الذي بعداه الوتر البؤري وبعد موقع العمود عن الرأس) .

**الحالة الثالثة** : إذا كانت زاوية رأس المخروط أكثر من (أزيد) زاوية ميل المستوى القاطع عن مولده عند القطع ، فالقاطع يسمى قطعاً زائداً (Hyperbola) . وكان يعرف أبولونيوس هذا المقطع : (مساحة المربع المنشأ

على العمود النازل من أية نقطة من نقاط المقطع على محوره أزيد من مساحة المستطيل الذي أبعاده الوتر البؤري وبعد موقع العمود عن الرأس) .

وعرفت القطوع المخروطية عند مينايخموس ومعاصريه : قطع المخروط الحاد الزاوية ويقصد بذلك القطع الناقص . وقطع المخروط القائم الزاوية ويقصد به القطع المكافئ . أما قطع المخروط المنفرج الزاوية فهو القطع الزائد . ولكن أبولونيوس قدمها لنا بأن الأقل مساحة القطع الناقص ، والمساوي للمساحة كلها القطع المكافئ ، والأزيد مساحة القطع الزائد ( أي ص$^{٢}$ < أ س ، ص$^{٢}$ = أ س ، ص$^{٢}$ > أ س ) .

درس أبولونيوس القطوع المخروطية بطريقة تفصيلية يصعب على من يحاول أن يزيد عليها . فقد عرف خواص البؤرة لكل من القطع الناقص والقطع الزائد ، ولكنه أهمل التحدث عن بؤرة القطع المكافئ . ويذكر جورج سارتون في كتابه المذكور أعلاه أن أبولونيوس كان يعرف تمام المعرفة البؤرة للقطع الناقص والقطع الزائد ، ولكنه لم يفطن إلى وجود البؤرة في القطع المكافئ . وامتدح هورد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» أن أبولونيوس وضع مسألة عرفت باسمه (The Problem of Apollonius) وهي تتعلق بالتماس والدوائر المتماسة ، حيث بدأ بدائرة تمس ثلاث دوائر معلومة . ثم تناول المسألة بغير شروط ، فجعل بعض هذه الدوائر مستقيمات أو نقاط ، وهذه المسألة بالذات اجتذبت كثيراً من مشاهير الرياضيات المتأخرين مثل فيت (Viete) وأويلر (Euler) ونيوتن (Newton) وغيرهم .

كان العصر الذهبي للحضارة اليونانية في علم الهندسة القرن الثالث قبل الميلاد ، وهو القرن الذي ظهر فيه كل من أقليدس وأرخميدس وأبولونيوس ،

أما القرنان الأخيران قبل الميلاد فهما عبارة عن ركود تام في إنتاج علماء اليونان في مجال علم الهندسة . ويظهر ذلك من قول جورج سارتون في كتابه آنف الذكر «يبدو تاريخ الرياضيات إبان القرنين الأخيرين في الحضيض إذا ما قورن بالقرن الثالث ، ذلك لأن زمن إقليدس وأرخميدس وأبولونيوس كان عصراً ذهبياً ، فظل عصراً فريداً حتى القرن السابع عشر في علم الهندسة» .

**بابوس (Pappus) :**

ظهر في القرن الثالث بعد الميلاد ، بعد أبولونيوس بـ(٥٠٠) سنة ، فهو عالم كبير من علماء جامعة الإسكندرية يعرف باسم بابوس ، له منجزات ضخمة سماها «المجموعة الرياضية» (Mathematical Collection) وتحتوي على ٨ أجزاء . ويذكر هورد ايفز في كتابه «المدخل إلى تاريخ الرياضيات» أن الجزء السابع من «المجموعة الرياضية» لبابوس يصف منهاجاً رياضياً فريداً ، يلزم كل متخصص في الرياضيات دراسته .

أما عمل بابوس في مجال علم الهندسة كان شاملاً لما جمعه كل من إقليدس وبطليموس ، أو بعبارة أخرى ضمت «المجموعة الرياضية» لبابوس كل المعلومات الرياضية التي عرفت عن اليونان . كما أن بابوس وضع عدداً كبيراً من النظريات في مجال علم الهندسة لا تزال تعرف باسمه وتستحق التأمل والدراسة . يذكر موريس اكلاين في كتابه «الفكر الرياضي من القديم إلى الحديث» أن من مآثر بابوس تعريفه بأن مساحة الدائرة أكبر من مساحة أي من المضلعات المنتظمة التي محيطها يساوي محيط تلك الدائرة . وحجم الكرة هو أكبر من حجم كل من الأجسام الخمسة المنتظمة التي سطوحها تساوي سطح الكرة .

كما أضاف كل من هاشم أحمد الطيار ويحيى عبد سعيد في كتابهما «موجز تاريخ الرياضيات» أن بابوس من الإسكندرية وله نظريته المشهورة وهي حجم الجسم الدوراني يساوي مساحة المقطع المولد للحجم في محيط الدائرة الناتجة من دوران مركز ثقل تلك المساحة ، ثم كيفية رسم قطع مخروطي يمر بخمس نقاط معلومة ، وتعيين البؤرة . كما عرف أيضاً المستقيم الموجه (Directrix) للقطوع الثلاثة (القطع المكافئ ، القطع الناقص ، القطع الزائد) .

وبعد بابوس توقفت القريحة اليونانية ، حتى دخل العرب والمسلمون مصر ، فبدؤوا بإحياء التراث اليوناني ، وانتقلت كنوز اليونان في الفلسفة والهندسة إلى كل من دمشق وبغداد وقرطبة ، وعكف علماء العرب والمسلمين على الترجمة والشرح والتعليق على إنتاج علماء اليونان الغزير .

**منلاوس** (ت نحو ٢١٠ ميلادية) :

من كبار علماء الإسكندرية ، اشتهر في كتابه (في الأكر) . كذلك هو أول من فرق بين علمي حساب المثلثات والهندسة . ويذكر عمر فروخ في كتابه «تاريخ العلوم عند العرب» أن منلاوس (Menelaus of Alexanderia) اشتهر في كتابه (في الأكر) وهو كتاب في علم المثلثات الكروية . ومنلاوس أول من فرق بين علم المثلثات وبين علم الهندسة وعلم استخراج أحجام المجسمات .

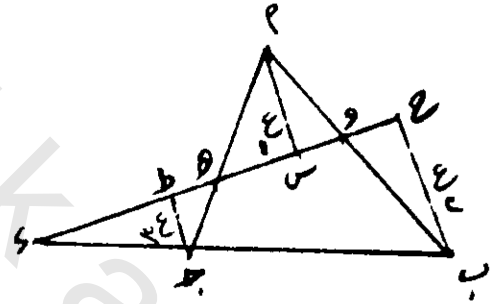
وينقل لنا كارل بوير في كتابه «تاريخ الرياضيات» نظرية منلاوس في الهندسة إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع المثلث أ ب جـ ، وامتداد الضلع الثالث في النقط و ، هـ ، د الواقعة في المستقيمات أ ب ، أ جـ ، امتداد ب جـ على الترتيب فإن $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ أ}} \times \frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} = ١$

**المعطيات :**

$\Delta$ أ ب جـ ، رسم القاطع د هـ و يقطع امتداد ب جـ في د ، ويقطع أيضاً جـ أ في هـ ، و أ ب في و .

**المطلوب :**

إثبات أن $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ أ}} \times \frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} = ١$



**العمل :**

نسقط الأعمدة أ س ، ب ح ، جـ ط من رؤوس المثلث أ ب جـ على القاطع د هـ و ، ولتكن أطوالها ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ على الترتيب :

**البرهان :**

$\Delta$ ب د ح يشابه $\Delta$ جـ د ط ، لأن الزوايا متساوية .

إذن $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{د ح}}{\text{د ط}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{جـ ط}} \Longleftarrow \frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ع}_٢}{\text{ع}_٣}$ (١)

إذن $\Delta$ جـ ط هـ يشابه $\Delta$ أ س هـ ، لأن الزوايا متساوية

إذن $\frac{\text{جـ ط}}{\text{أ س}} = \frac{\text{ط هـ}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} \Longleftarrow \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ع}_٣}{\text{ع}_١}$ (٢)

إذن $\Delta$ ب ح و يشابه $\Delta$ أ س و ، لأن الزوايا متساوية

إذن $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ س}} = \frac{\text{ح و}}{\text{س و}} = \frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} \Leftarrow \frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} \Leftarrow \frac{\text{أ و}}{\text{ب و}} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} \times \frac{\text{أ و}}{\text{ب و}} = \frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{٣}} \times \frac{\text{ع}_{٣}}{\text{ع}_{١}} \times \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = ١$$

إذن $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} \times \frac{\text{أ و}}{\text{ب و}} = ١$ وهو المطلوب .