الفصل الثالث

علم الحساب عند اليونانيين

لقد اعتمد الترقيم اليوناني على التجميع وقد عرف منذ (٧٠٠ قبل الميلاد) ورموزهم مشتقة من اللغة اليونانية وهناك نوعان من الترقيم :

الأول وهو المنبثق عن أثينا مثل ١ = ١ ، ٢ = ١١ ، ٣ = ١١١ ، ٤ = ١١١١ ، ٥ = Γ ، ١٠ = Δ ، ٥٠ = 𐅄 ، ١٠٠ = H ، ٥٠٠ = 𐅅 ، ١٠٠٠ = X ، ١٠,٠٠٠ = M .

نلاحظ أن هناك نوعاً من التناظر بين ٥ ، ٥٠ ، ٥٠٠ وهذه بدون شك خطوة جيدة إلى الأمام .

فكتابة ٢٧٢٦ = XX𐅅HHΔΔΓI

و ٢١٧٥٦ = MMX𐅅HH𐅄ΓI

و ٣٦٣ = HHH𐅄ΔIII

و ٣٥٧٤ = XXX𐅅𐅄HHIIII

هذا النوع كان محدود الاستعمال للغاية في أثينا وما حولها ، أما النوع الثاني فكان كثير الانتشار في بلاد حوض البحر الأبيض المتوسط والبلاد المتاخمة للبحر الأسود ، وهو الذي يعتمد على الحروف اليونانية حيث إن لكل حرف قيمة عددية خاصة به مثل :

ο	ξ	ν	μ	λ	κ	ι	θ	η	ζ	ϛ	ε	δ	γ	β	α
٧٠	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
,ε	,δ	,γ	,β	,α	ϡ	ω	ψ	χ	φ	υ	τ	σ	ρ	ϙ	π
٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	٩٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٢٠٠	١٠٠	٩٠	٨٠
								$\overset{2}{M}$		M		,θ	,η	,ζ	,ϛ
								٣٠ر٠٠٠		١٠ر٠٠٠		٩٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	٦٠٠٠

فكتابة ٥٧١ = φοα

و ٥٦٠ = φξ فقط نحتاج إلى رمزين

و ١٢٧٢ = ϙσοβ

و ٢٤٧ = σμζ

اقتبس علماء اليونان العمليات الحسابية الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة) من علماء قدماء المصريين والبابليين ، وإضافاتهم قليلة في مجال علم الحساب إذا قورنت بما قدموه في حقلي الفلسفة والهندسة ، واتجهوا بعلم الحساب الاتجاه التجريدي ، ورواد هذا الاتجاه هم طاليس (٦٢٤-٥٤٧ قبل الميلاد) وفيثاغورث (٥٤٦-٤٩٧ قبل الميلاد) ويودكسيس (٤٠٨-٣٥٥ قبل الميلاد) وإقليدس الذي عاش في الإسكندرية (تقريباً ٣٠٠ قبل الميلاد) ونيكوماخوس (١٠٠ ميلادية) .

وقد عرّف علماء اليونان الأعداد الزوجية والأعداد الفردية تعريفاً علمياً ، ولهم نظريات منها على سبيل المثال :

١ - مجموع الأعداد الزوجية عدد زوجي ٢ + ٤ = ٦ .

٢ - مجموع أي عدد من الأعداد الفردية المتتالية هو مربع كامل (ابتداء من الواحد) مثال : ١ + ٣ = ٢^٢ ، ١ + ٣ + ٥ = ٣^٢ ، ١ + ٣ + ٥ + ٧ = ٤^٢ ، ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ = ٥^٢ ، ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ = ٣٦ = ٦^٢ .

٣ – الفرق بين عددين فرديين عدد زوجي . مثال : ٥ – ٣ = ٢ ، ١١ – ٧ = ٤ .

٤ – مجموع أي عدد من الأعداد الزوجية المتتالية (ابتداءً من ٢) مكون من عاملين يفترقان بواحد صحيح .

مثال :

٢ + ٤ = ٢ × ٣

و ٢ + ٤ + ٦ = ٣ × ٤

و ٢ + ٤ + ٦ + ٨ = ٤ × ٥

و ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٥ × ٦

٥ – قانون العدد التام والذي يوحي في نظرة عميقة عند علماء اليونان في مجال علم الحساب وهو :

ن	$٢^{ن} - ١$ (عدد أولي)	$٢^{ن-١} (٢^{ن} - ١)$
٢	٣	٢ (٣) = ٦
٣	٧	٤ (٧) = ٢٨
٤	١٥ ليس عدد أولي	
٥	٣١	١٦ (٣١) = ٤٩٦
٧	١٢٧	٦٤ × (١٢٧) = ٨١٢١

يتضح من هذا أن علماء اليونان كان اهتمامهم بالأعداد التامة وأوجدوا أربعة منها ٦ ، ٢٨ ، ٤٩٦ ، ٨١٢٨ ، لذا نجدهم يحاولون حصر الأعداد التامة فيما بين ١–١٠ بالعدد ٦ ، وبين ١٠–١٠٠ بالعدد ٢٨ ، وكذلك بين ١٠٠–١٠٠٠ بالعدد التام ٤٩٦ ، وبين ألف والعشرة آلاف بالعدد التام ٨١٢٨ .

كما هـو معـروف قانون العـدد التـام عـن إقليـدس ، مثـلاً إذا كان $٢^{ن-١}\ (٢^{ن}-١)$ عاملان لأي عدد تام فإن :

جـ١ للعدد الأول = $١ ، ٢ ، ٢^{٢} ، ٢^{٣} \ldots ٢^{ن-١}$

جـ٢ للعـــدد الثانـي = $١\ (٢^{ن}-١) ، ٢\ (٢^{ن}-١) ، ٢^{٢}(٢^{ن}-١) ، ٢^{٣}(٢^{ن}-١) \ldots ٢^{ن-٢}\ (٢^{ن}-١)$

مجمـوع عناصـر المجموعتين = $١ + ٢ + ٢^{٢} + ٢^{٣} + \ldots + ٢^{ن-١} + (٢^{ن}-١)\ (١ + ٢ + ٢^{٢} + ٢^{٣} + ٢^{ن-٢})$

$$= \frac{٢^{ن}-١}{٢-١} + (٢^{ن}-١)\ \frac{(٢^{ن-١}-١)}{٢-١}$$

$$= (٢^{ن}-١) + (٢^{ن}-١)\ (٢^{ن-١}-١)$$

$$= (٢^{ن}-١)\ (١ + ٢^{ن-١}-١)$$

$$= ٢^{ن-١}\ (٢^{ن}-١)$$

من المعروف لدى علماء الرياضيات أن فيثاغورث ابتكر زوجاً متحاباً من الأعداد (٢٢٠ ، ٢٨٤) . يروى أن فيثاغورث سئل ذات مرة ما هو الصديق؟ فأجاب أنه «نفس ثانية» ، فمن هذا المفهوم أطلق على تلك الأعداد اسم «الأعداد المتحابة» ، من هذا المنطلق عَرَّف العددين المتحابين (إذا كان مجموع قواسم أي منهما مساوياً للعدد الآخر ، والمراد بكلمة عدد هنا هو العدد الطبيعي الموجب) فمثلاً العددان ٢٢٠ ، ٢٨٤ عددان متحابان لأن قواسم كل منهما هي :

٢٨٤ : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢

ومجموع قواسم ٢٨٤ = ١ + ٢ + $٢^{٢}$ + ٧١ + ٢ (٧١) = ٢٢٠

٢٢٠ : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١١ ، ٢٢ ، ٤٤ ، ٥٥ ، ١١٠ .

ومجموع قواسم ٢٢٠ = ١ + ٢ + $٢^{٢}$ + ٥ + ٢ (٥) + $٢^{٢}$ (٥) + ١١ + ٢ (١١) + $٢^{٢}$ (١١) + ٥٥ + ٢ (٥٥) = ٢٨٤

كما ورث علماء اليونان وعلى رأسهم فيثاغورث الثلاثة الأعداد التي تكوّن مثلثاً قائم الزاوية من البابليين .

مثل : أ = $ن^{٢}$ − $م^{٢}$ ، ب = ٢ ن م ، جـ (الوتر) = $ن^{٢}$ + $م^{٢}$ ، فلو أخذنا

ن = ١٢ ، م = ٥ فإن ن = ٣ ، م = ٢

أ = ٩ − ٤ = ٥

ب = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢

جـ (الوتر) = ٩ + ٤ = ١٣

أ = $١٢^{٢}$ − $٥^{٢}$ = ١١٩ ، ب = ٢ (١٢) (٥) = ١٢٠ ، جـ = $١٢^{٢}$ + $٥^{٢}$ = ١٦٩ .

ولكن لفيثاغورث دوراً هاماً في اكتشاف النظريتيْن الآتيتين :

١ – الأعداد الفردية التي تكون مثلثاً قائم الزاوية :

خذ أي عدد فردي وربعه وجزئه إلى جزأين متقاربين (الفرق بينهما واحد) فيكون العدد نفسه والجزآن المتقاربان مثلثاً قائم الزاوية .

مثال : ٥ مربعها = ٢٥ ، والجزآن المتقاربان ١٣ ، ١٢

إذن ٥ ، ١٢ ، ١٣ تكون مثلثاً قائم الزاوية

و٣ مربعها = ٩ ، والجزآن المتقاربان ٥ ، ٤

إذن ٣ ، ٥ ، ٤ تكون مثلثاً قائم الزاوية

و٧ مربعها = ٤٩ ، والجزآن المتقاربان ٢٥ ، ٢٤

إذن ٧ ، ٢٥ ، ٢٤ تكون مثلثاً قائم الزاوية

٢ – الأعداد الزوجية التي تكون مثلثاً قائم الزاوية :

خذ أي عدد زوجي

اعتبر ٢م ، م^{٢} – ١ ، م^{٢} + ١ تكوِّن مثلثاً قائم الزاوية

مثال م = ٢ : ٤ ، (٢^{٢} – ١) ، (٢^{٢} + ١) = ٤ ، ٣ ، ٥ تكون مثلثاً قائم الزاوية .

مثال م = ٤

إذن (٢ × ٤) ، (٤^{٢} – ١) ، (٤^{٢} + ١) = ٨ ، ١٥ ، ١٧ تكون مثلثاً قائم الزاوية .

وهذه تعتبر حالة خاصة من قاعدة البابليين التي استخدموها في تكوين مثلث قائم الزاوية التي سبق ذكرها والتي اعترف بها نيكيباور عام ١٩٤٥م أنها من إسهامات علماء بابل .

ولفيثاغورث يعود الفضل بابتكار الأعداد المصورة ، فالنقطة تمثل الواحد ، والنقطتان تمثلان الخط المستقيم ، وثلاث النقاط تمثل السطح المستوي المحاط في ثلاث مستقيمات (المثلث) . والشرط أن تكون ثلاث النقاط ليست على استقامة واحدة ، وأربع النقاط إذا كانت الرابعة خارج المستوى فإنها تمثل شكلاً مجسماً ، وهكذا .

أما الكسور فقد عرضها اليونانيون بطريقة سهلة ، وذلك بوضع علامة في مقدمة الرقم الموجود في خانة الآحاد مثل $\frac{١}{٣٤}$ = λδ' .

وبقيت هذه الطريقة في كتابة الكسور مستعملة مدة طويلة من الزمن ليس فقط في أثينا ، ولكن في جميع البلاد التي كان لليونانيين نفوذ فيها .