الجزء الرابع

الهندسة

GEOMETRY

الدرس الثامن عشر

التمثيل البيانى للمعادلات

Graphs of equations

[١٨ ـ ١] مقدمــة :

من خلال دراستنا للتمثيل البيانى للنقط بالدرس السابق فإنه يمكن تمثيل بعض الأشكال الهندسية والخطوط المستقيمة الممثلة بمعادلات جبرية والأمثلة التالية توضح ذلك .

[١٨ ـ ٢] أمثلة على الخطوط المستقيمة :

● **مثـال (١) :**

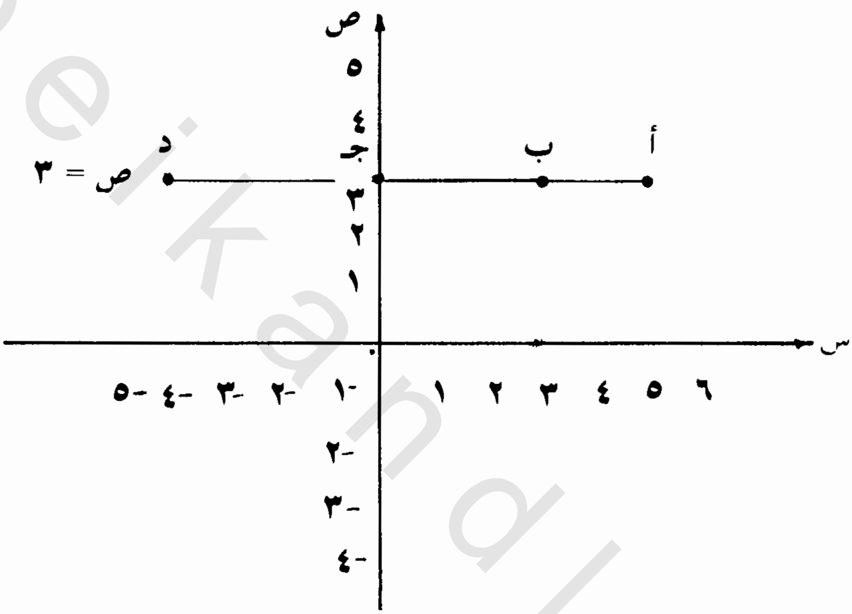
مثل مجموعة النقط التالية بيانياً ، ثم اذكر ما تلاحظه عنها :

النقطة (ا) (٥ ، ٣) ، النقطة ب (٣ ، ٣) ، النقطة جـ (صفر ، ٣) ، النقطة (د) ، (−٤ ، ٣) ،

● **الحـــل :**

يُلاحظ من الرسم البيانى بشكل (١٨ ـ ١) أن النقاط الأربعة كلها تقع على خط مستقيم واحد (ا د) وأن الإحداثى الصادى لكل النقاط الأربعة هو (٣) أى ص = ٣

وبالتالى فالمستقيم ا د يوازى محور السينات .



شكل [١٨ ـ ١]

ويقال للمستقيم ا د أن معادلته هى ص = ٣

أى أن جميع النقط الواقعة عليه ، إحداثيها الصادى هو « ٣ » وبنفس الطريقة فإن محور السينات ، تكون معادلته ص = صفر

أى أن جميع النقط الواقعة عليه ، إحداثيها الصادى هو « صفر »

● مثال (٢) :

النقاط التالية ا ، ب ، جـ ، د ، إحداثياتها على الترتيب كالتالى :

[ا] (−١ ، ٤) ، [ب] (−١ ، ١) ، [جـ] (−١ ، صفر) ،
[د] (−١ ، −٣)

باستخدام التمثيل البيانى للنقط ، وضح هذه النقاط واكتب معادلة الخط المستقيم ا د .

● الحـــل :

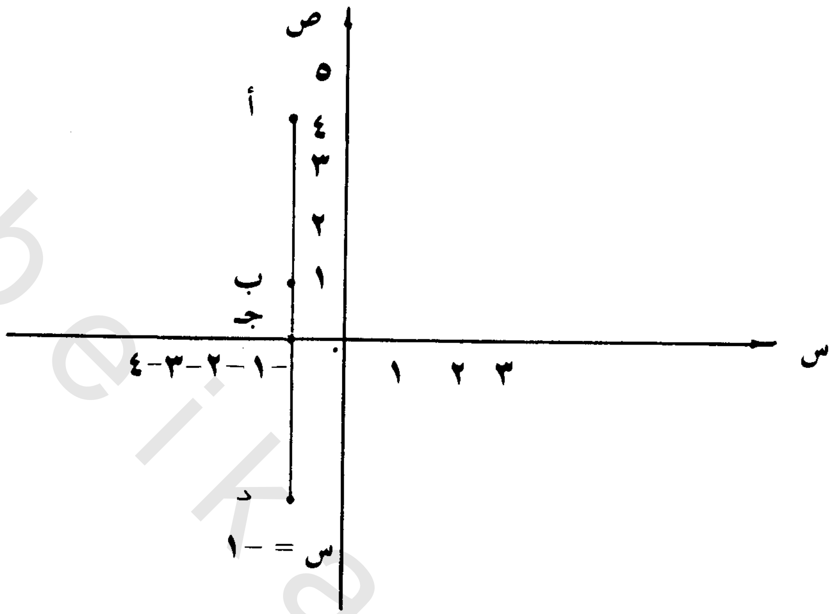
انظر شكل (١٨ ـ ٢) ، نلاحظ أن النقاط الأربع كلها تقع على استقامة واحدة ويضمها معاً الخط المستقيم (ا د) ولأن كل نقطة على الخط ، إحداثيها السينى هو (−١) أى (س = −١) لذلك نلاحظ أن المستقيم (ا د) يوازى محور الصادات ويبعد عنه بعداً عمودياً ثابتاً مقداره واحد (الوحدة) .

وعلى هذا فمعادلة الخط المستقيم (ا د) هى :

س = −١

وبنفس الطريقة فإن معادلة محور الصادات هى س = صفر

لأن جميع النقط الواقعة عليه يكون إحداثيها السينى مساوياً للصفر .



شكل [١٨ ـ ٣]

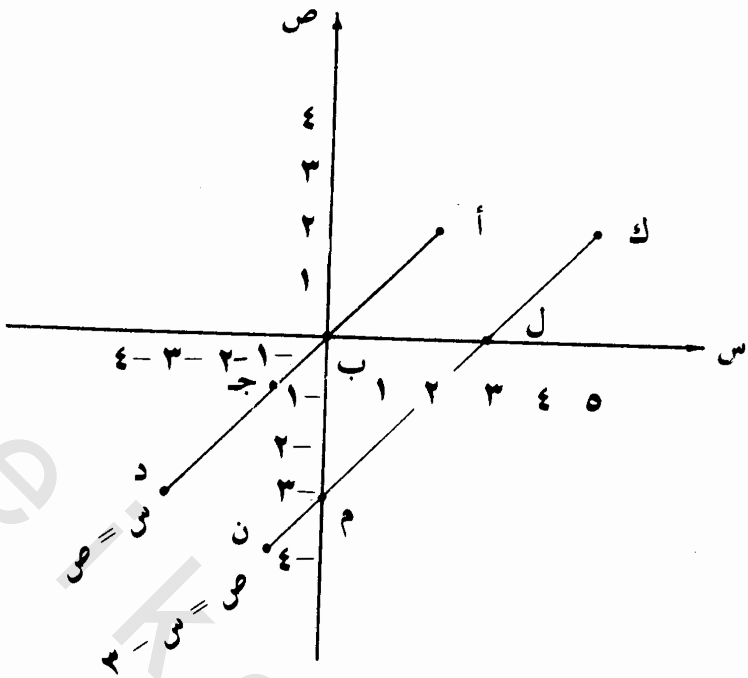
● مثال (٣) :

مثل النقاط التالية على ورقة الرسم البيانى :

[أ] (٢ ، ٢) ، [ب] (صفر ، صفر) ، جـ (−١ ، −١) ، [د] (− ٣ ، −٣) . ثم صل بينها لتكوّن خطاً مستقيماً .

● الحـــل :

انظر شكل (١٨ ــ ٣) ، ويلاحظ أن الإحداثى السينى لكل نقطة يساوى الإحداثى الصادى لها وأن النقاط الأربع تقع كلها على خط مستقيم واحد .



شكل [١٨ ـ ٣]

وعلى ذلك فمعادلة هذا الخط المستقيم هى :

س = ص

● **مثال (٤) :**

على نفس الرسم السابق مثل بيانياً النقط التالية [ك] (٥ ، ٢) ، [ل] (٣ ، صفر) ، [م] (صفر ، −٣) ، [ن] (−١ ، −٤) .

● **الحــل :**

من الرسم يتضح لنا أن النقاط الأربع تقع على خط مستقيم واحد هو ك ن .

وإذا قارنا الإحداثى الصادى بالإحداثى السينى لكل نقطة منهم نلاحظ أن الإحداثى السينى لكل نقطة يزيد عن الإحداثى الصادى لها بمقدار ٣ وحدات .

فمثلاً النقطة ل (٣ ، ٠)،س = ٣ ، ص = ٠

∴ س − ص = ٣

والنقطة ن(−١، −٤) ،س = −١ ، ص = −٤

∴ س − ص = −١ − (−٤) = −١ + ٤ = ٣

وهكذا بالنسبة لباقى النقط .

∴ فمعادلة المستقيم ك ن هى ص = (س − ٣)

[المستقيم ا د معادلته ص = س]

ويتضح كذلك من الرسم أن المستقيم (ك ن) يوازى المستقيم (ا د) لذلك فدرجة ميل كل من المستقيمين واحدة .

غير أن المستقيم ص = س يقطع محور الصادات عند ص = صفر بينما المستقيم ص = س − ٣ يقطع محور الصادات عند ص = − ٣

وعلى هذا :

فمعادلة المستقيم ا د :

ص = س + صفر

[أى يقطع محور الصادات عند ص = صفر]

ومعادلة المستقيم ك ن :

ص = س − ٣

(أى يقطع محور الصادات عند ص = −٣) ، وهكذا فإذا كان هناك مستقيم معادلته هى :

ص = س − ٥

فإن هذا المستقيم يوازى المستقيمين السابقين ولكنه يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ،−٥) .

● مثـال (٥) :

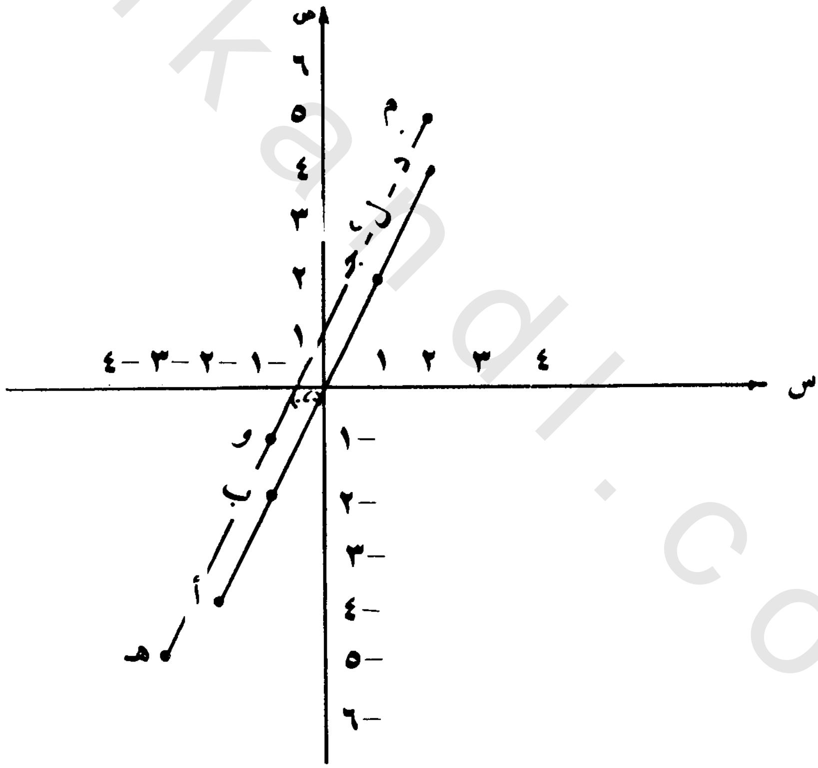
مثل بيانياً النقاط التالية :

ا (−٢ ، −٤) ، ب (−١ ، −٢) ، جـ (١ ، ٢) ، د (٢ ، ٤)

وعلى نفس الصفحة ارسم مجموعة النقاط الأُخرى التالية :

هـ (−٣، −٥) ، و (−١ ، −١) ، ل (١ ، ٣) م (٢ ، ٥)

● الحــل :



شكل [١٨ ـ ٤]

مرة أخرى نلاحظ أن المستقيمين متوازيان فدرجة الميل لهما واحدة .

والفارق الوحيد بينهما هو فى نقطة التقاطع مع محور الصادات فالمستقيم ا د يقطع محور الصادات عند نقطة الأصل أى عند ص = صفر

بينما المستقيم هـ م ، يقطع محور الصادات عند ص = ١ أى عند النقطة (صفر ، ١) .

وبمقارنة الإحداثيات السينية بالإحداثيات الصادية للمستقيم ا د نلاحظ أنه عند النقطة ا (−٢ ، −٤) :

∴ ص = −٤ = ٢ × −٢ = ٢ س

وبالمثل النقطة ب (−١ ، −٢) :

∴ ص = −٢ = ٢ × −١ = ٢ س كذلك .

∴ معادلة المستيم ا ب هى : ص = ٢ س

وهى نفسها معادلة المستقيم ا د

أما بالنسبة للمستقيم هـ م

فالنقطة هـ (− ٣ ، −٥) :

∴ ص = −٥ = ٢ × −٣ + ١ = ٢ س + ١

والنقطة و (−١ ، −١) :

∴ ص = −١ = ٢ × −١ + ١ = ٢ س + ١

∴ معادلة المستقيم هـ و وهى نفسها معادلة المستقيم هـ م :

ص = ٢ س + ١

وعلى ذلك فالفارق بين معادلتى المستقيمين هو نقطة تقاطع كليهما مع محور الصادات.

وعلى ذلك فمعادلة المستقيم ا د يمكن كتابتها كما يلى :

ص = ٢ س + صفر

[أى أن المستقيم ا د يقطع محور الصادات عند ص = صفر أى عند النقطة (صفر ، صفر)]

أما المستقيم هـ م :

ص = ٢ س + ١

[أى يقطع محور الصادات عند ص = +١ ، أى عند النقطة (صفر ، ١]

وبالمثل لو كان هناك مستقيم معادلته :

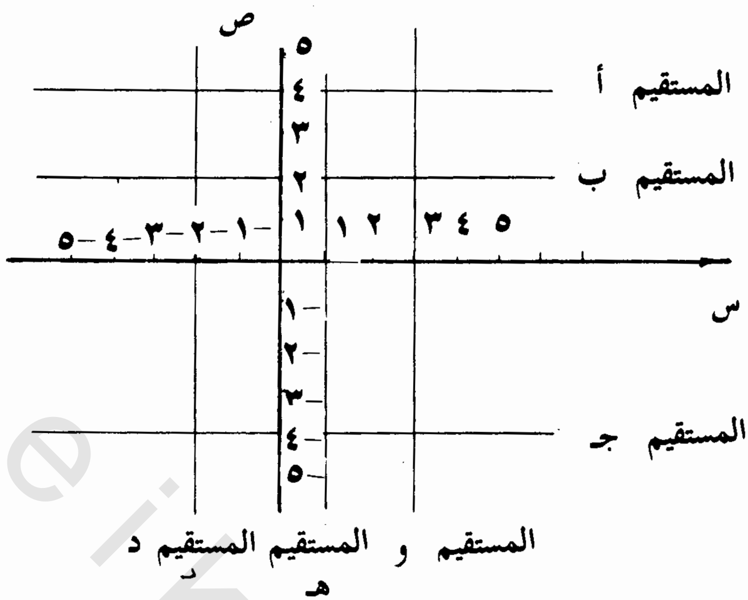
ص = ٢ س − ٦

فإنه يكون موازياً للمستقيمين السابقين ولكن يقطع محور الصادات عند ص = −٦ أى عند النقطة (صفر ، −٦) .

[١٨ ـ ٣] تدريبـــات :

(١) فى شكل (١٨ ـ٥) مجموعة من المستقيمات ، بعضها يوازى محور السينات وبعضها الآخر يوازى محور الصادات ، تأمل هذه المستقيمات واختر لكل مستقيم معادلته من بين المعادلات الآتية :

س = −٣ ، س = ٢ ، س = ١ ، ص = −٤
ص = −٢ ، ص = ٤ ، ص = ٢ ، س = −١
س = −٢ ، س = ٣



شكل [١٨ ـ ٥]

(٢) ارسم محورى الإحداثيات س ، ص وقم بتدريج المحور السينى من (−٥) ، إلى (+٥) والمحور الصادى من (−٧) إلى (+١٢) ثم مثل مجموعات النقط الآتية مع توصيل كل مجموعة منها معاً على حدة .

المجموعة الأولى : (٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (−٢ ، −٤)

المجموعة الثانية : (٠ ، ٠) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٩) ، (−١ ، −٣) ، (−٢ ، −٦)

المجموعة الثالثة : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (−١ ، −١)

المجموعة الرابعة : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (−٢ ، −١) .

ثم اكتب معادلة كل مستقيم منها .

(٣) ارسم محورى الإحداثيات (س ، ص) مع تدريج محور السينات من (−٣) إلى (٥) ومحور الصادات من (−٦) إلى (١١) ثم مثل مجموعات النقاط التالية وصل كل مجموعة منها على حدة :

المجموعة الأولى : (٠ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٩) ، (−١ ، ١)

المجموعة الثانية : (٠ ، −٢) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٦)

المجموعة الثالثة : (٠ ، −١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٨) .

المجموعة الرابعة : (٠ ، ٢) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٨) .

ثم اكتب معادلة كل خط من الخطوط الأربعة .

[١٨ ـ ٤] معادلة الخط المستقيم :

مما سبق نستنتج أن هنالك علاقة محددة تربط بين معادلة الخط المستقيم وبين ميله أو نقطة تقاطعه مع محور الصادات .

ويمكن دائماً تحديد ميل الخط المستقيم وذلك بكتابة معادلة الخط المستقيم فى الصورة :

ص = م س + جـ

حيث يرمز الرقم أمام (س) أو معامل (س) وهو (م) إلى ميل الخط المستقيم ، بينما يحدد الرمز (جـ) ، ويطلق عليه بالحد الثابت ، إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

● **مثـــال :**

خط مستقيم معادلته هى : ص = ٣ س + ٤ ، ويلاحظ أنها على الصورة : ص = م س + جـ

وعلى هذا فإنه يمكننا القول أن المستقيم له ميل م = ٣ ، كما أن طول الجزء المقطوع من محور الصادات وهو جـ = ٤ وحدات .

أى أن المستقيم يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٤) .

وفيما يلى بعض الأمثلة الأخرى :

(ا) ص = ٢ س − ٣

هى معادلة مستقيم ميله م = ٢ ، يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، −٣) .

(ب) ص = ٥ س + ٢

هى معادلة مستقيم ميله م = ٥ ، ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، +٢)

(حـ) ص = $-\frac{٧}{٢}$ س − ٩

هى معادلة مستقيم ميله م = $-\frac{٧}{٢}$ ويقطع محور الصادات عند (٠ ، −٩) .

(د) ٣ ص = ٦ س − ١ ويجب قبل التعامل مع هذه المعادلة أن نضعها فى الصورة المألوفة ص = م س + حـ .

∴ $\frac{٣ ص}{٣} = \frac{٦ س}{٣} - \frac{١}{٣}$ ومنها ص = ٢ س − $\frac{١}{٣}$

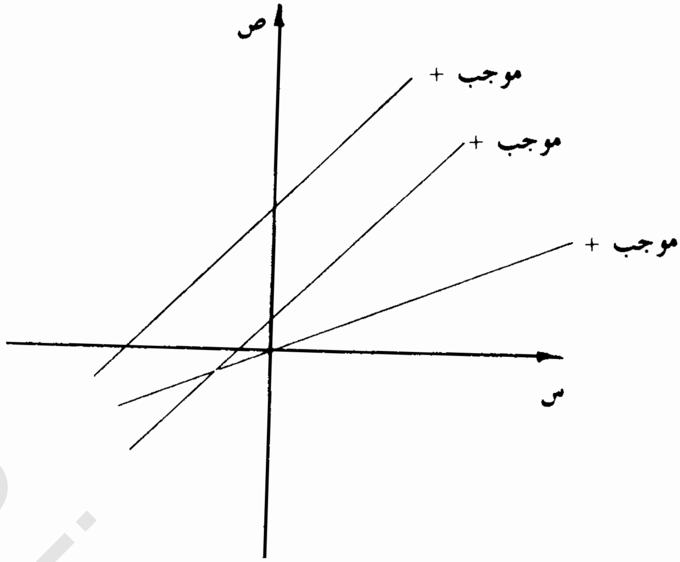
وعلى هذا فهذه معادلةمستقيم ميله م = ٢ ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، $-\frac{١}{٣}$)

[١٨ ـ ٥] قيم الميل الموجبة والسالبة للمستقيمات :

قد يأخذ الميل قيماً موجبة أو قيماً سالبة وذلك على حسب شكل ميل المستقيم كما يتضح من الشكل (١٨ ـ ٦) ، الشكل (١٨ − ٧) .

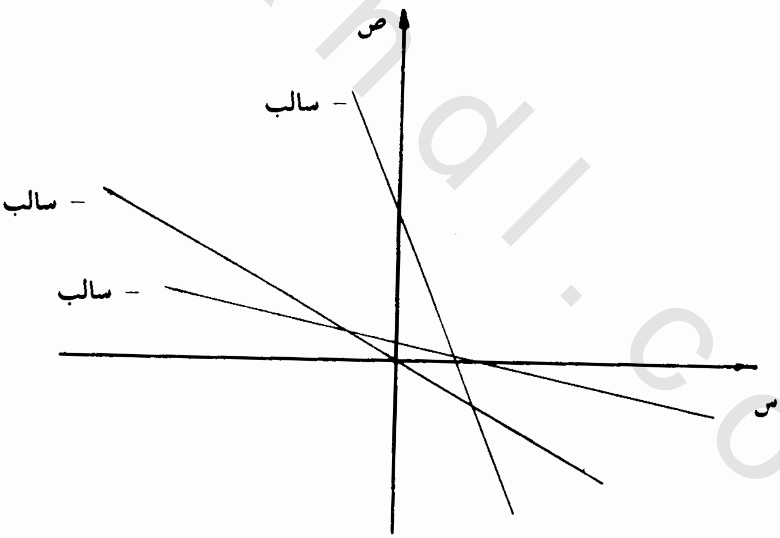
[١٨ ـ ٦] حساب ميل المستقيم :

يمكن بسهولة حساب ميل المستقيم وذلك بقسمة مقدار التغير فى البعد الرأسى بين نقطتين محددتين على التغير فى البعد الأفقى لهاتين النقطتين وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح طريقة حساب الميل بهذه الطريقة لمستقيم ميله موجب وآخر ميله سالب .



شكل [١٨ ـ ٦]

المستقيمات المائلة لأعلى من اليسار لليمين
يعتبر ميلها موجب



شكل [١٨ ـ ٧]

المستقيمات المائلة لأسفل من اليسار لليمين
يُعتبر ميلها سالب

● مثال (١) :

من شكل (١٨ ـ ٨) ، يلاحظ أن التغير فى المسافة الرأسية هو (+٢) وحدة ، والتغير فى المسافة الأفقية المناظرة لها هو (+٣) وحدة .

وبذلك فإن ميل المستقيم = $\frac{+٢}{+٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

وطبعاً فمن الواضح على الرسم أن ا ب هو جزء من المستقيم الذى ميله ثابت ويساوى $\frac{٢}{٣}$.

وبذلك فإن معادلة هذا الخط المستقيم (ا ب وامتداده) يمكن حسابها حيث أن الميل م = $\frac{٢}{٣}$ والجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١}{٣}$ ٢ (بالقياس) .

∴ ص = $\frac{٢}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$ ٢ ومنها :

٣ ص = ٢ س + ٧ وهى المعادلة المطلوبة .

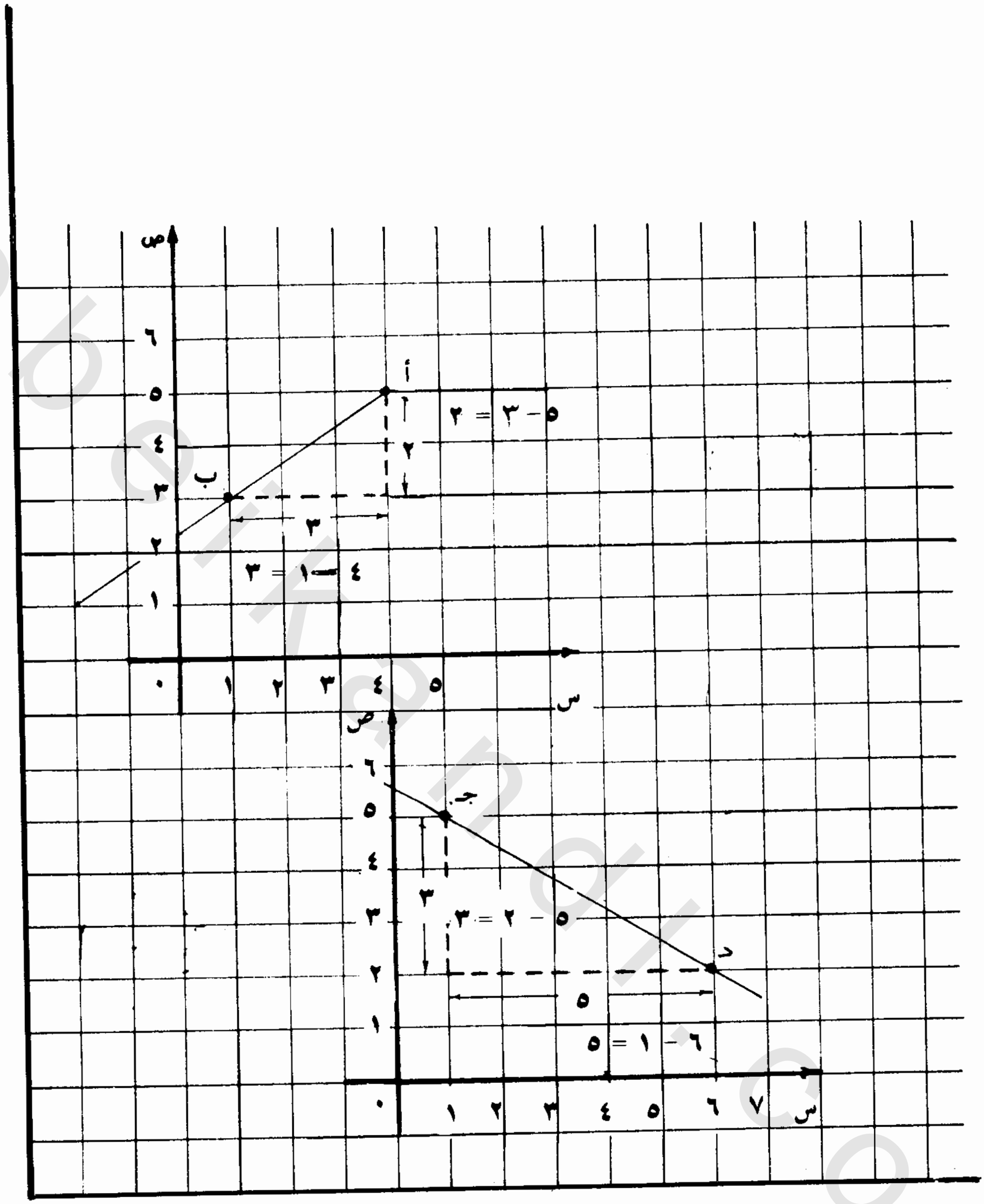
● مثال (٢) :

من شكل (١٨ ـ ٩) ، يلاحظ أن التغير فى المسافة الرأسية هو (+٣) وحدة والتغير فى المسافة الأفقية المناظر لها هو (−٥) وحدة . (المستقيم يتجه من اليسار لأسفل اليمين فميله سالب)

وبذلك فإن ميل المستقيم = $\frac{+٣}{-٥}$ = −٠,٦ .

وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هو (٥,٥) وحدة (بالقياس)

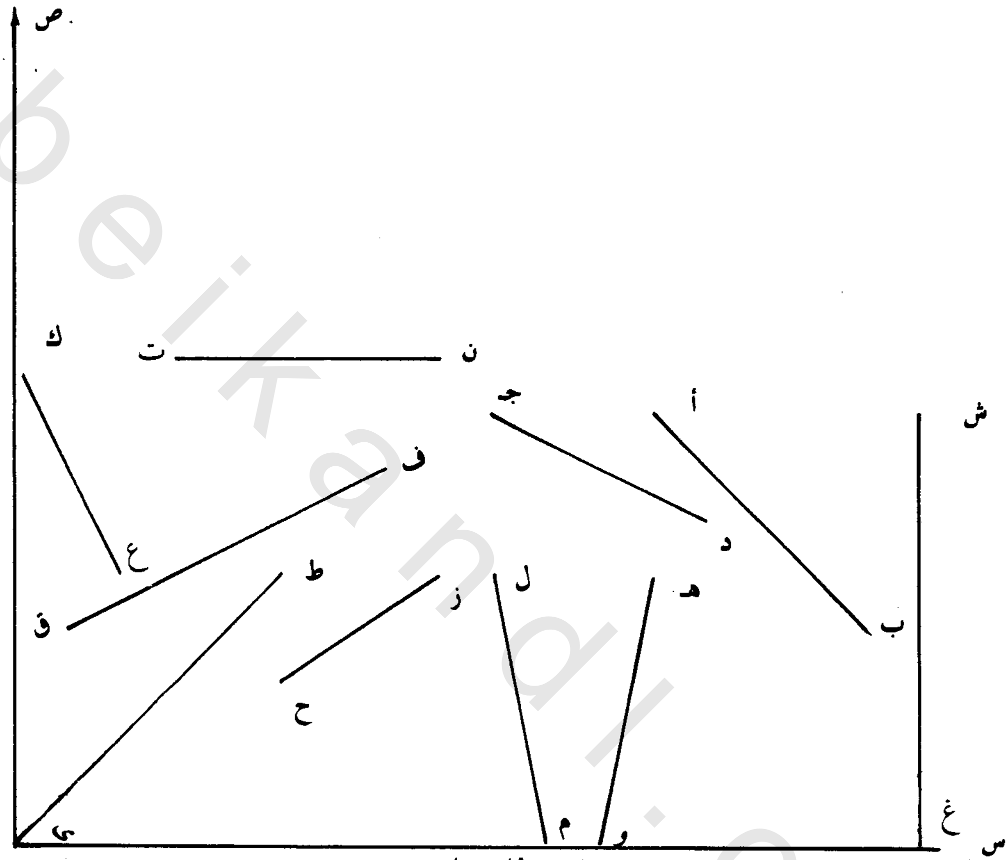
∴ ص = −٠,٦ س + ٥,٥



شكل [١٨ ـ ٨]   شكل [١٨ ـ ٩]

[١٨ ـ ٧] تدريبـــات :

(١) فى شكل (١٨ ــ ١٠) ، مجموعة من المستقيمات .



شكل [١٨ ـ ١٠]

(أ) احسب ميل المستقيمات الآتية :

ا ب ، جـ د ، ل م ، ك ع

(ب) احسب ميل المستقيمات الآتية :

ف ق ، ط ى ، ز ح ، هـ و

وما الفرق الذى تلاحظه فى إجابتك بين (ا) ، (ب)

(جـ) احسب ميل المستقيمان الآتيان :

ش غ ، ن ت .

وما الفرق الذى تُلاحظة فى إجابتك بين ميلى المستقيمين .

(٢) احسب ميل المستقيم الواصل فيما بين كل نقطتين فيما يلى :

(ا) (٨ ، ٦) (١١ ، ٤)

(ب) (٨ ، ٥) ، (١٠ ، ١)

(جـ) (٨ ، ٢) ، (١٠ ، −٣)

(د) (٧ ، ٤) ، (٤ ، ١)

(هـ)(١ ، ١) ، (٦ ، −٢)

(و) (٢ ، ٥) ، (٦ ، ٦)

(ز) (٤ ، ٣) ، (−١ ، ٥)

(ح) (− ٣ ، ٤) ، (−١ ، ٤)

(ط) (١ ، −١) ، (−٣ ، −٣)

(ى) (−٤ ، −١) ، (−٥ ، ٣)

وللتحقق من صحة الإجابة استخدم الرسم البيانى لحساب الميل .

(٣) احسب ميل المستقيمات التالية :

(ا) ص = ٢ س

(ب) ص = ٤ س

(جـ) ص = $\frac{٣}{٢}$ س

(د) ص = ٢ س − ٣

(هـ) ص = ٣ س − ٤

(و) ص = ٢ س + ٥

(ز) ٢ ص = ٤ س − ١

(ح) ص + ٢ س = ٤

(ط) ص − ٣ س + ٣ = صفر

(ى) ص = ٥ − ٢ س

(٤) فيما يلى مجموعة من المستقيمات ، احسب الإحداثى الصادى لنقطة تقاطع كل منها مع المحور الصادى .

(ا) ص = ٣ س + ٢

(ب) ص = ٢ س + ٥

(جـ) ص = ٢ س − ٢

(د) ص = ٤ س − ٢

(هـ) ٢ ص = س + ٢٠

(و) ص = ٢ س − ٤

(ز) ٥ ص = س − ١٠

(ح) ص + ٢ س − ٥ = صفر

(٥) احسب :

(ا) الميل .

(ب) نقطة التقاطع مع محور الصادات .

لكل من المستقيمات التالية المذكورة معادلاتها :

(ا) ص = ٣ س

(ب) ص = ٣ س − ٢

(جـ) ص = ٤ س − ٣

(د) ص = ٥ − ٣ س

(هـ) ص = $\frac{\text{س}}{٢}$ + ٤

(و) ٢ ص = ٣ س − ٦

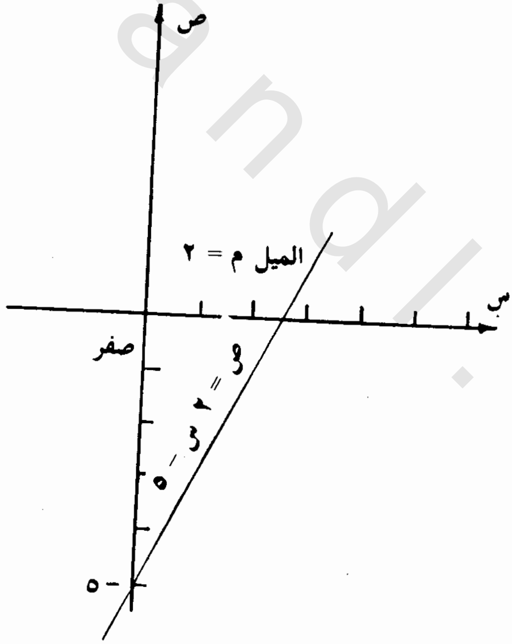
(ز) $\frac{١}{٢}$ ص = س + ٢

(ح) ص − س − ٨ = صفر

(ط) ٢ ص + ٣ س = ١٠

(ى) ص − ٦ = $\frac{٣}{٤}$ س

(٦) انظر إلى المثال المحلول فى شكل (١٨ − ١١) ومن ثم إرسم المستقيمات التالية :



شكل [١٨ ـ ١١]

(ا) ص = ٢ س − ٣

(ب) ص − س = ٨

(جـ) ص = ٤ − س

(د) ص = ٣ س + ٢

(هـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٧

(و) ص = ٤ س − ٢

[١٨ ـ ٨] رسم خط مستقيم بيانياً :

لرسم خط مستقيم بيانياً بدقة كافية ، يلزم استخدام ورق رسم بيانى وقلم رصاص (بسن رفيع) ومسطرة مدرجة ويفضل أن تكون بطول ٣٠ سم .

بعد ذلك يلزم إيجاد إحداثيات بعض النقط على المستقيم ولهذا فإننا نقوم بفرض الإحداثى السينى لنقطة ونعوض فى معادلة المستقيم لنحصل على الإحداثى الصادى المناظر للقيمة المفروضة ثم نفرض قيم أخرى لـ : س ونوجد ص المناظرة لها ويفضل أن يتم تدوين قيم س ، ص فى جدول .

ثم نرسم محورى الإحداثيات ومع اختيار مقياس رسم مناسب لكل من المحورين .

ويجب توفر الآتى عند اختيار مقياس الرسم :

(ا) يجب التأكد من أن المقياس على كل محور من المحاور بحيث ، يتم تمثيل كميات متساوية بمسافات متساوية .

(ب) اختيار مقياس لكل محور يضمن تمثيل كل البيانات كاملة (حتى وإن اختلف المقياس لمحور عن الآخر) .

وتجدر الإشارة إلى أن محاولة استغلال مساحة الصفحة فى الرسم البيانى كاملة يؤدى لزيادة الدقة فى الرسم .

● مثال (١) :

مثل بيانياً المعادلة :

ص = ٢ س + ٤

وذلك لقيم س فيما بين −٤ ، +٤ أى [٤ ≤ س ≤ −٤]

● الحـــل :

فنبدأ أولاً برسم جدول للنتائج ، انظر جدول [١٨ — ١]

قيم س	-٤	-٣	-٢	-١	صفر	+١	+٢	+٣	+٤
٢ س	-٨	-٦	-٤	-٢	صفر	٢	٤	٦	٨
+ ٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤
قيم ص ص = ٢ س + ٤	-٤	-٢	صفر	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢

جدول (١٨ ـ ١)

ومن الجدول :

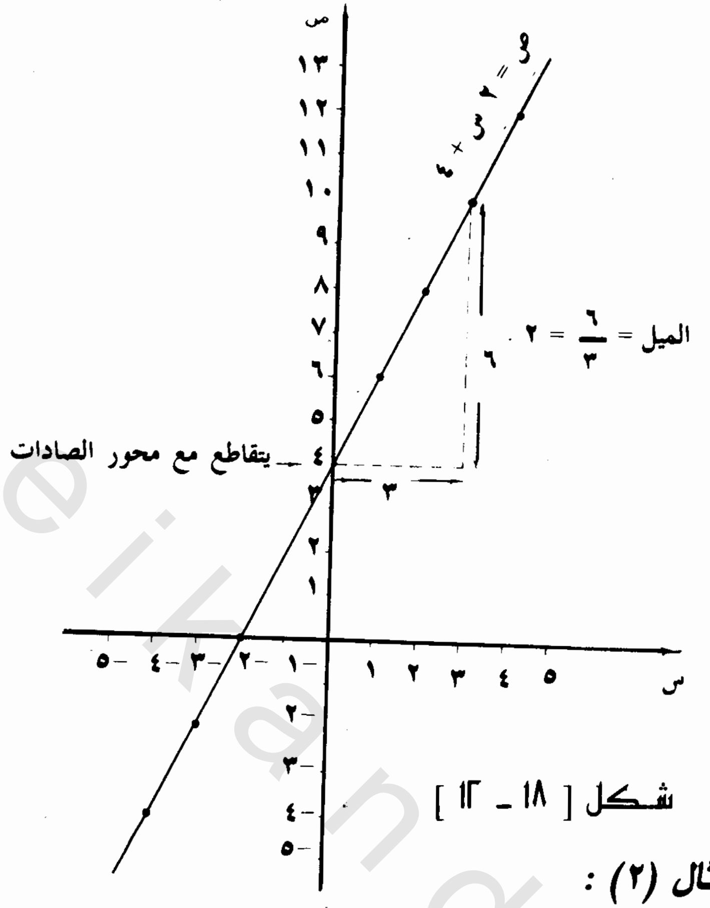
عندما س = -٤ ص = -٤ أي (-٤ ، -٤)

، عندما س = -٣ ص = -٢ أي (-٣ ، -٢)

وهكذا لباقي القيم .

ونختار مقياس رسم مناسب لكل من المحورين وأنسب مقياس هو ١ سم لكل وحدة على المحورين س ، ص

مثل النقط المستخرجة من الجدول كما سبق ثم صل بينها لتحصل على المستقيم ص = ٢ س + ٤



شكل [١٨ ـ ١٣]

● مثال (٢) :

مثل بيانياً المعادلة :

ص + س = ٤ وذلك لقيم س : ٥ ≥ س ≥ −٣

● الحـــل :

للبدء فى حل هذه المسألة ، يجب أن نعيد ترتيبها على صورة المعادلة العامة للمستقيم السابقة وهى ص = م س + جـ

فتصبح : ص = − س + ٤

ثم نكون جدولاً لتدوين القيم المختلفة لـ س ، ص ، جدول [١٨ − ٢]

قيم س	−٣	−٢	−١	صفر	١	٢	٣	٤	٥
−س	٣	٢	١	صفر	−١	−٢	−٣	−٤	−٥
+٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤	٤
ص	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	صفر	−١

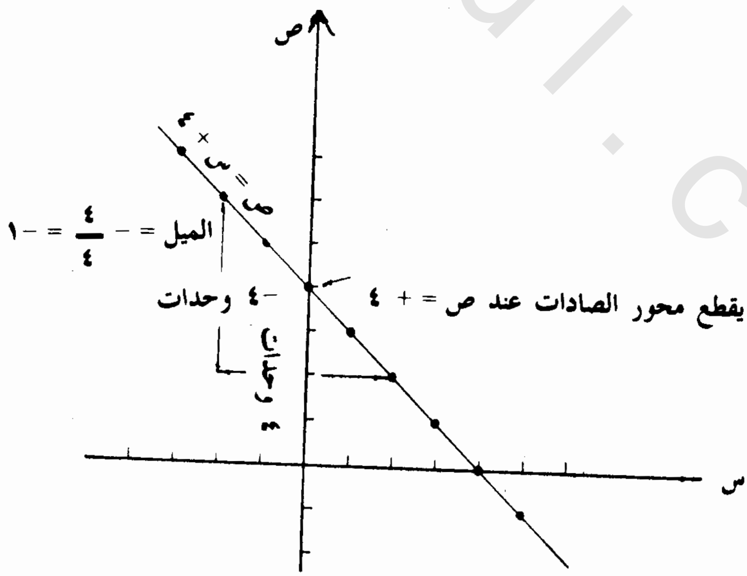
جدول (١٨ ـ ٢)

ومن المناسب هنا اختيار مقياس رسم ١ سم لكل وحدة على كلا المحورين س ، ص

حيث تتراوح قيم س بين ٥ ≤ س ≤ −٣

وتتراوح قيم ص المناظرة بين ٧ ≤ ص ≤ −١

انظر شكل (١٨ ـ ١٣).



شكل [١٨ ـ ١٣]

● مثال (٣) :

مثل بيانياً معادلة المستقيم : ٢ ص = ٣ س − ٤

لقيم س الواقعة بين −٤ ، ٣   −٤ ≤ س ≤ ٣

● الحـــل :

يجب وضع المعادلة فى الصورة ص = م س + جـ

ولــذلك فإننــا نــقسم طرفــى المعادلــة علــى ٢ :

∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٢

ثم نسجل قيم س ، ص فى جدول كما سبق ، جدول [١٨ − ٣] .

قيم س	−٤	−٣	−٢	−١	صفر	+١	+٢	+٣
$\frac{٣}{٢}$ س	−٦	−٤ $\frac{١}{٢}$	−٣	−١ $\frac{١}{٢}$	صفر	١ $\frac{١}{٢}$	٣	٤ $\frac{١}{٢}$
−٢	−٢	−٢	−٢	−٢	−٢	−٢	−٢	−٢
قيم ص	−٨	−٦ $\frac{١}{٢}$	−٥	−٣ $\frac{١}{٢}$	−٢	− $\frac{١}{٢}$	١	٢ $\frac{١}{٢}$

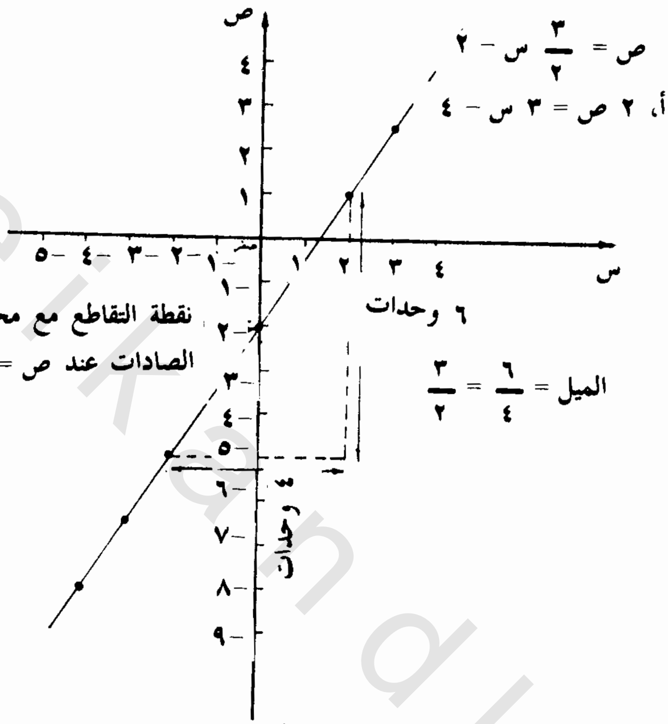
جدول (١٨ ـ ٣)

ويكون الاختيار الأمثل لمقياس الرسم هو ١ سم لكل وحدة على كلا المحورين :

وتنحصر قيم س بين −٤ ≤ س ≤ ٣

وتنحصر قيم ص بين −٨ ≤ ص ≤ ٢ $\frac{١}{٢}$

ملاحظة : يكتفى من الآن فصاعداً ، بعد رسم المحورين أن نعين الإحداثيات الكرتيزية لنقطتين اثنتين فقط ، له ، خاصة عند طرفيه كما يستحسن كذلك أخذ إحداثيات نقطة ثالثة عند أو قرب منتصف المستقيم للتحقق من صحة الرسم .



شكل [١٨ ـ ١٤]

[١٨ ـ ٩] تدريبـــات :

باستخدام تدريج مناسب لمحورى الإحداثيات ، ارسم المستقيمات التالية ، ثم تحقق من صحة رسم كل منها بتعيين ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات .

(١) من جدول (١٨ ـــ ٤) ، الذى يوضح قيم س ، ص للمعادلة ص = ٢ س + ١ ، ارسم المستقيم واحسب الميل ونقطة التقاطع .

س	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣		
ص	-٥	-٣	-١	١	٣	٥	٧		

جدول (١٨ ـ ٤)

(٢) لقيم ٤ ≧ س ≧ -٤ ، أكمل الجدول التالى ، جدول [١٨ ــ ٥]

للمعادلة ص= ٢ س − ٥

س	-٤	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣	٤
ص	-١٣		-٩				-١		٣

جدول (١٨ ـ ٥)

(٣) من جدول (١٨ ــ ٦) ، لقيم س ، ص بالمعادلة ص = ٣ س − ٣

س	-٤	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣	٤
ص	-١٥	-١٢	-٩	-٦	-٣	صفر	٣	٦	٩

(٤) لقيم + ٤ ≤ س ≤ -٤ ، أكمل الجدول التالى ،لقيم س ، ص للمعادلة ، ص = ٤ س + ٤

س	-٤	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣	٤
ص	-١٢	-٨	-٤	صفر	٤	٨	١٢	١٦	٢٠

جدول (١٨ ـ ٧)

[١٨ ـ ١٠] الرسم البيانى لأنواع أخرى من المعادلات :

إن عملية الرسم البيانى لأى معادلة ، هى نفسها فى رسم معادلة الخط المستقيم ، كما سبق .

● **مثال :**

ارسم بيانياً المعادلة ص = س^{٢} + ٣ س + ٣

لقيم س بين ٢ ≥ س ≥ −٣

● **الحـــل :**

(ا) جدول (١٨ ـ ٨) لقيم س ، ص للمعادلة ،

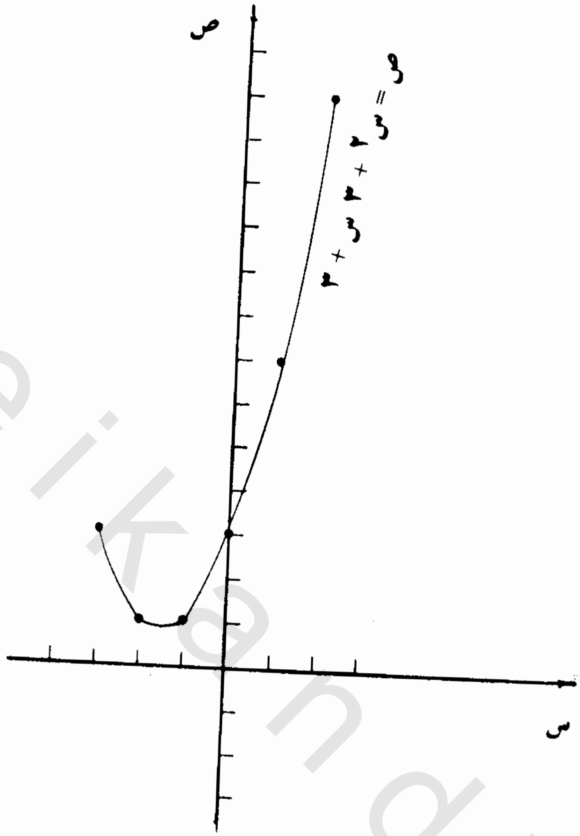
س	−٣	−٢	−١	صفر	١	٢			
س^{٢}	٩	٤	١	صفر	١	٤			
+ ٣ س	−٩	−٦	−٣	صفر	٣	٦			
+ ٣	٣	٣	٣	٣	٣	٣			
ص	٣	١	١	٣	٧	١٣			

جدول (١٨ ـ ٨)

من الجدول قيم س : ٢ ≥ س ≥ −٣

، قيم ص : ١٣ ≥ ص ≥ ٣

انظر الرسم شكل (١٨ – ١٥) .



شكل [١٨ – ١٥]

ويلاحظ أن توصيل النقط ببعضها يستلزم مهارة ودقة عالية .

[١٨ – ١١] الرسم البيانى لمستقيمين أو لمنحنيين أو لمستقيم ومنحنى :

يمكن رسم أكثر من معادلة على نفس ورقة الرسم البيانى ويفيد هذا فى معرفة نقاط تقاطع المستقيمات أو المنحنيات بعضها ببعض وتعنى نقطة التقاطع أنها النقطة التى تقع على كلاً من المنحنيين أو المستقيمين وتحقق معادلتهما .

● مثـــال :

ارسم بيانياً المعادلتين الآتيتين :

ص = س^{٢} − ٤ + ٧ وهى تمثل معادلة منحنى

، ص = س + ٢ وهى تمثل معادلة خط مستقيم

ثم اكتب إحداثيات نقط التقاطع للمنحنى مع المستقيم

خذ قيم س فيما بين ٥ ≥ س ≥ صفر .

● الحـــل :

نُسجل قيم س ، ص للمنحنى فى الجدول [١٨ ـــ ٩] .

س	صفر	١	٢	٣	٤	٥			
س^{٢}	صفر	١	٤	٩	١٦	٢٥			
−٤ س	صفر	−٤	−٨	−١٢	−١٦	−٢٠			
+ ٧	٧	٧	٧	٧	٧	٧			
ص	٧	٤	٣	٤	٧	١٢			

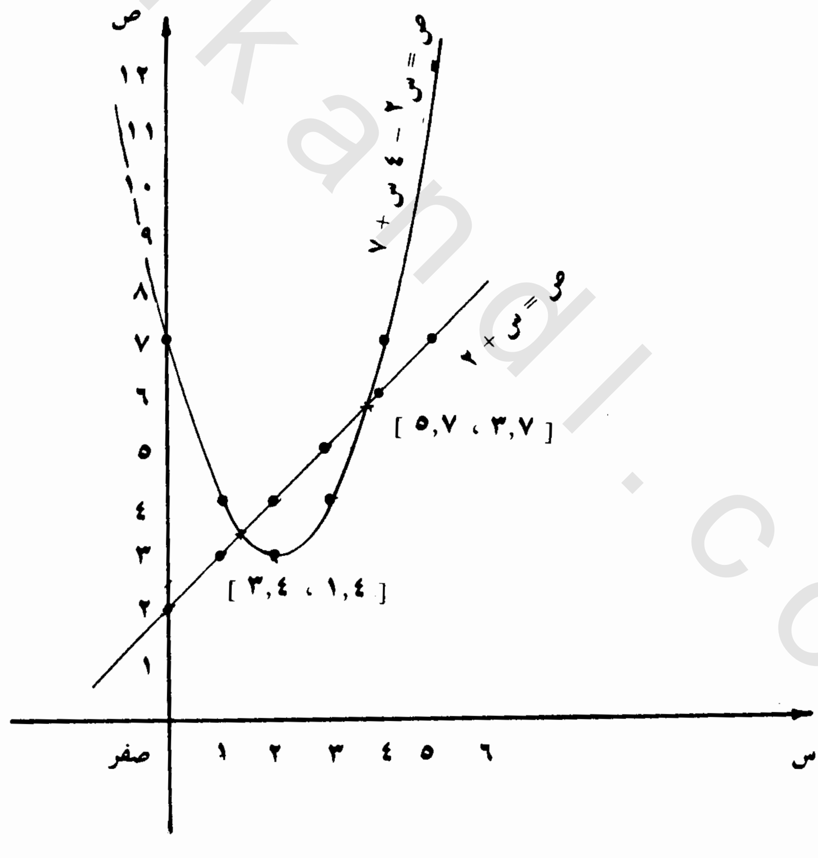
ثم نسجل قيم س ، ص ، للمستقيم فى الجدول [١٨ ـــ ١٠] .

س	٠	١	٢	٣	٤	٥			
+ ٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢			
ص	٢	٣	٤	٥	٦	٧			

جدول (١٨ ـ ٩)

من الجدولين نلاحظ أن قيم س تنحصر فيما بين ٥ ≥ س ≥ صفر
، أن قيم ص تنحصر فيما بين ١٢ ≥ ص ≥ ٢

وباستخدام مقياس رسم مناسب ، ١ سم لكل وحدة لكلا من المحورين نقوم بتمثيل النقط فى كلاً من الجدولين ونصل بين كل مجموعة منها فنحصل على الشكل (١٨ ـ ١٦) .



شكل [١٨ ـ ١٦]

[١٨ ـ ١٢] تدريبات متنوعة :

(١) لقيم س المحصورة بين ٣ ≥ س ≥ صفر ، دون القيم المختلفة لـ س ، ص فى جدول ثم ارسم المعادلة التالية بيانياً :

ص = ٣ س − ٣

وعلى نفس ورقه الرسم ارسم المعادلة :

ص = س + ١

ثم حدد إحداثيات نقاط التقاطع .

(٢) ارسم كل من المعادلتين :

ص = ٣ − س ، ص = س + ٣

ثم حدد إحداثيات نقط التقاطع ، وذلك لقيم س المحصورة بين ٢ ≥ س ≥ −٢

(٣) فى الجدول التالى ، جدول [١٨ ـــ ١١] ، للمعادلة ص = س^{٢} + ٣ ، ارسم المنحنى بإيصال النقاط ببعضها بدقة على قدر الإمكان .

س	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣		
س^{٢}	٩	٤	١	صفر	١	٤	٩		
+ ٣	٣	٣	٣	٣	٣	٣	٣		
ص	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢		

جدول (١٨ ـ ١١)

(٤) أكمل الجدول التالى لقيم س ، ص للمعادلة :

ص = ٢ س^{٢} − ١ ، لقيم ٢ ≤ س ≤ -٢

ثم اختر مقياس رسم مناسب وارسم المنحنى وحدد إحداثيات نقط التقاطع .

س	٢	١	صفر	-١	-٢				
٢ س^{٢}	٨	٢	صفر	٢	٨				
-١	-١	-١	-١	-١	-١				
ص	٧	صفر	-١	١	٧				

جدول (١٨ ـ ١٢)

(٥) إذا فرضنا أن النقط التالية : (٢ ، ا) ، (-١ ، ب) ، (جـ ، ٥) تقع على المستقيم ص = ٣ س + ٢

فأوجد قيم ا ، ب ، جـ

(٦) اكتب ميل المستقيمات التالية وإحداثيات نقط تقاطعها مع محور الصادات :

(ا) ص = ٣ س - ٦ (جـ) ٢ ص - ٣ س = ٦

(ب) ص = ١٠ - ٤ س (د) ٢ ص = ٣ س - ٨

(٧) ارسم المستقيمات التالية :

س = ٣ ، ص = ٤ ، ٢ ص = س

لقيم س فيما بين ٨ ≥ س ≥ صفر

ثم احسب إحداثيات نقط التقاطع واحسب كذلك مساحة المثلث القائم الناشىء من تقاطع الثلاث خطوط .

(٨) اكتب معادلات المستقيمات التى لها الميل وطول الجزء المقطوع من المحور الصادى كما يلى :

(ا) م = ٣ ، ص = ٣

(ب) م = $\frac{١}{٣}$ ، ص = -١

(جـ) م = -٢ ، ص = ٥

(٩) ارسم المستقيمين الآتيتين وحدد إحداثيات نقاط تقاطعهم

ص = ٤ - ٢ س ، ص = ٢ س + ١

(١٠) لقيم س المحصورة بين ٣ ≥ س ≥ -٣

ارسم المنحنى ص = س^{٢} + ٣

ثم ارسم المستقيم ص = ٢ س + ٤

ومن ثم احسب إحداثيات نقاط التقاطع للمستقيم والمنحنى .

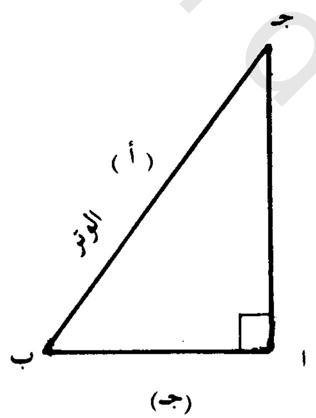
الدرس التاسع عشر

المثلث القائم الزاوية

The right angled triangle

[١٩ ـ ١] تعاريف :

المثلث القائم الزاوية ، عبارة عن مثلث ، إحدى زوياه الداخلة قائمة = ٩٠° .



شكل [١٩ ـ ١]
المثلث القائم الزاوية

ويُسمى ضلع المثلث المقابل للزاوية القائمة (وهو فى نفس الوقت أطول ضلع فى المثلث) ، بالوتر **hypotenuse** .

ولو رمزنا للضلع المقابل لزاوية $\hat{ا}$ بالضلع ا
، ولو رمزنا للضلع المقابل لزاوية $\hat{ب}$ بالضلع ب
، ولو رمزنا للضلع المقابل لزاوية $\hat{جـ}$ بالضلع جـ

وإذا قمنا بقياس أطوال أضلاع المثلث بالشكل سنجد أنها ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم (أو بنسبة ٣ : ٤ : ٥) .

وبتسجيل البيانات التالية فى جدول كالتالى ، جدول (١٩ ـ ١)

طول الضلع			مربعات الأضلاع ومجموعها			
ا	ب	جـ	$ا^{٢}$	$ب^{٢}$	$جـ^{٢}$	$ب^{٢}+جـ^{٢}$
٥	٣	٤	٢٥	٩	١٦	٢٥

جدول (19 ـ 1)

ومما سبق نلاحظ أن : ٢٥ = ٩ + ١٦

أى أن $ا^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$

[١٩ ـ ٢] نظرية فيثاغورث *Pythagoras Theorem*:

من العلاقة السابقة : $ا^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$

نجد أن هناك صلة بين طول الوتر وطول كل من الضلعين الآخرين للمثلث القائم .

وقد اكتشف هذه العلاقة عالم الرياضيات الأغريقى فيثاغورث ، فى القرن السادس قبل الميلاد أى منذ حوالى ٢٥٠٠ سنة ،

وقد سميت هذه العلاقة بنظرية فيثاغورث ، نسبة له ، للمثلث القائم الزاوية ، ونصها كالتالى :

فى أى مثلث قائم الزاوية فإن مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين وتصاغ رياضياً كالتالى :

$$ا^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$$

وهـذه النظرية على بساطتها إلا أنها فى غاية الأهمية وتُستعمل كثيراً فى الرياضيات ،

[١٩ ـ ٣] تطبيقات على نظرية فيثاغورث :

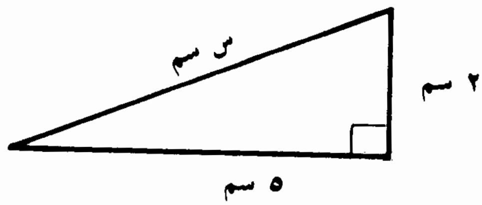
لنظرية فيثاغورث تطبيقات كثيرة فى حياتنا العملية ، ومن أمثلة ذلك طول القطر فى المربع والمستطيل وحالة السلم المرتكز على حائط .

والمسافة بين نقطتين على ورق الرسم البيانى والأبعاد الهندسية للأسقف المائلة .

ويمكن إستعمال هذه النظرية فى أى حالة يكون معروفاً فيها طول ضلعين اثنين من مثلث قائم الزاوية ، ومطلوب معرفة طول الضلع الثالث .

● مثـال (١) :

أوجد قيمة س فى الشكل التالى :



شكل [١٩ ـ ٢]

● الحـل :

فى هذه الحالة ، وبتطبيق نظرية فيثاغورث

$\therefore$ س^{٢} = ٢^{٢} + ٢٥

= ٤ + ٢٥ = ٢٩

وبأخذ الجذر التربيعى للعدد ٢٩ نحصل على

س = $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = $\sqrt{٢٩}$ = ٥,٣٨٥١

= ٥,٤ تقريباً

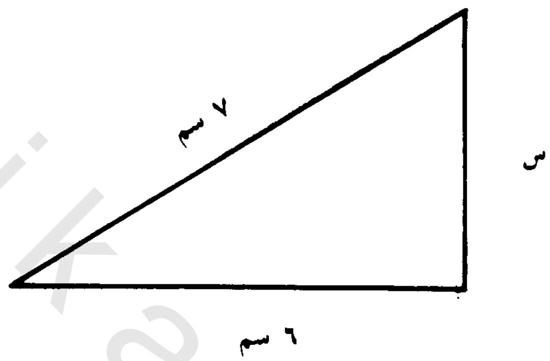
ويمكن إيجاد قيمة الجذر التربيعى لأى عدد باستخدام جداول خاصة بذلك أو باستخدام الآلة الحاسبة ، وذلك بتسجيل الرقم ثم الضغط على زر الجذر فنحصل مباشرة على قيمة الجذر .

وسوف نتعرض بالتفصيل للجذور فى الجزء القادم بالكتاب التالى لهذه السلسلة .

وقد تم تقريب الإجابة لأقرب عدد عشرى وذلك لصعوبة قياس أجزاء المليمتر على المسطرة .

● مثال (٢) :

فى شكل (١٩ ـ ٣) ، أوجد قيمة س بالسنتيمتر .



شكل [١٩ ـ ٣]

● الحــل :

فى هذه المسألة ، لدينا طول الوتر ، وبتطبيق نظرية فيثاغورث .

∴ $٧^{٢} = ٦^{٢} + س^{٢}$

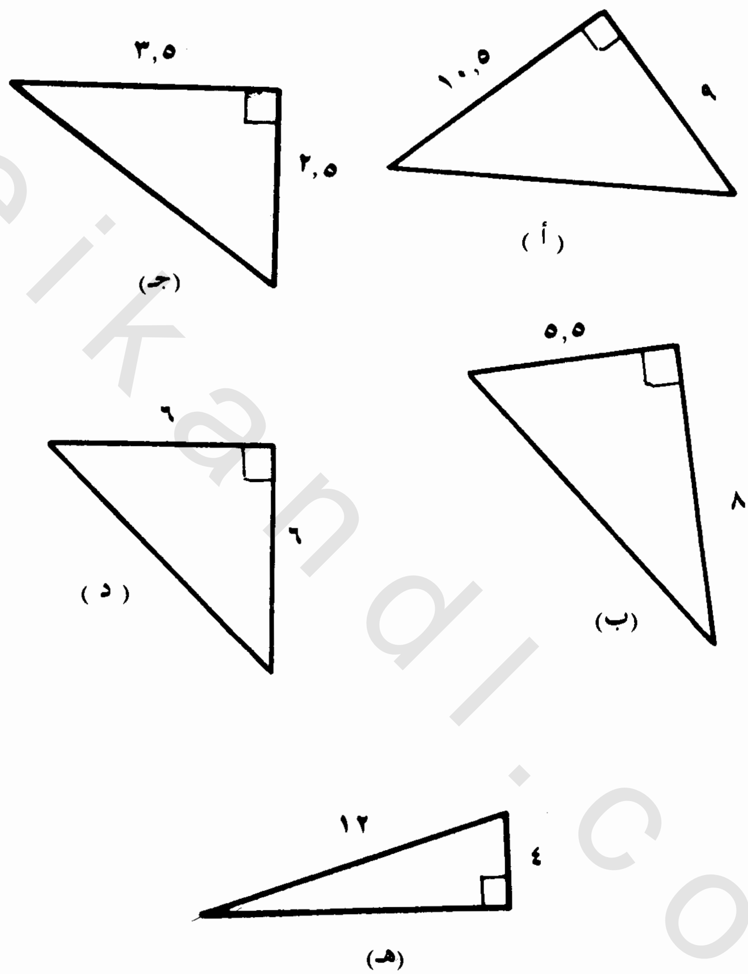
∴ $س^{٢} = ٤٩ - ٣٦ = ١٣$

∴ س = $\sqrt{١٣}$ = ٣,٦٠٥٥ = ٣,٦ سم تقريباً

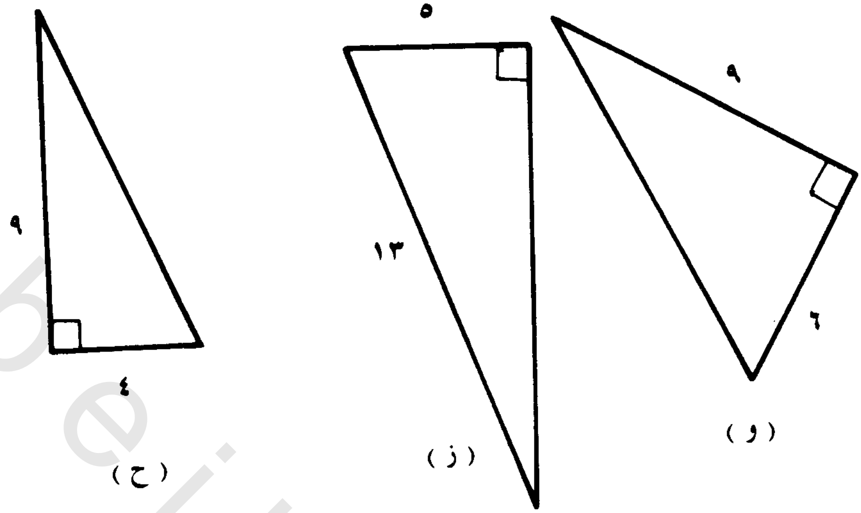
[١٩ ـ ٤] تدريبـــات :

(١) فى المثلثات القائمة التالية ، أوجد طول الضلع الناقص مقرباً إجابتك لأقرب رقمين عشريين ، شكل (١٩ ــ ٤) .

[، الرسوم ليست كلها بمقياس رسم ١ : ١]



شكل [١٩ ـ ٤]
الأبعاد كلها بالسنتيمتر



شكل [١٩ ـ ٤]
الأبعاد كلها بالسنتيمتر

(٢) فى المثلث ا ب جـ ، زاوية جـ = ٩٠° ، ا جـ = ٥ سم ، جـ ب = ٨ سم فأوجد طول ا ب .

(٣) فى المثلث د هـ و ، زاوية هـ = ٩٠° ، د هـ = ٧ سم ، هـ و = ١٢ سم فأوجد طول د و .

(٤) فى المثلث س ص ع ، زاوية ص = ٩٠° ، س ص = ١٢ سم ، ص ع = ٦ سم فأوجد طول س ع .

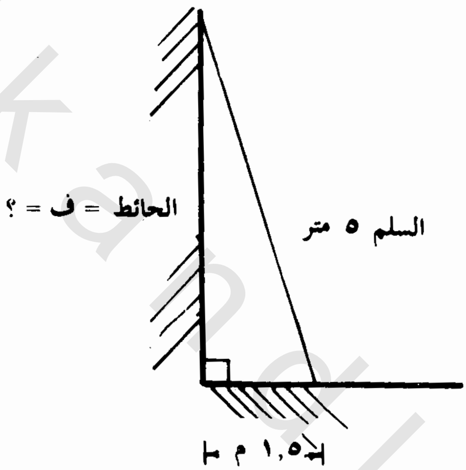
(٥) فى المثلث ل م ن ، زاوية ل = ٩٠° ، ل م = ٣ سم ، ل ن = ٧ سم فأوجد طول م ن .

[١٩ ـ ٥] أمثلة عملية على نظرية فيثاغورث :

● مثال (١) :

سلم طوله (٥) م يرتكز على حائط ، مائلاً بحيث تبعد قاعدته عن الحائط بمقدار (١,٥) متر .

فإذا كان الحائط يضع زاوية قائمة مع الأرض ، فأوجد إرتفاع الحائط حينئذ ، انظر الشكل [١٩ ـ ٥] .



شكل [١٩ ـ ٥]

● الحـــل :

نفرض ارتفاع الحائط حتى قمة السلم = ع متراً

وبذلك يكون لدينا مثلث قائم الزاوية فيه طول الوتر = طول السلم = ٥ م

وبتطبيق نظرية فيثاغورث :

∴ ٢٥ = (١,٥)^{٢} + ع^{٢}

∴ ٢٥ = ٢,٢٥ + ع^{٢}

∴ ع^{٢} = ٢٥ − ٢,٢٥ = ٢٢,٧٥

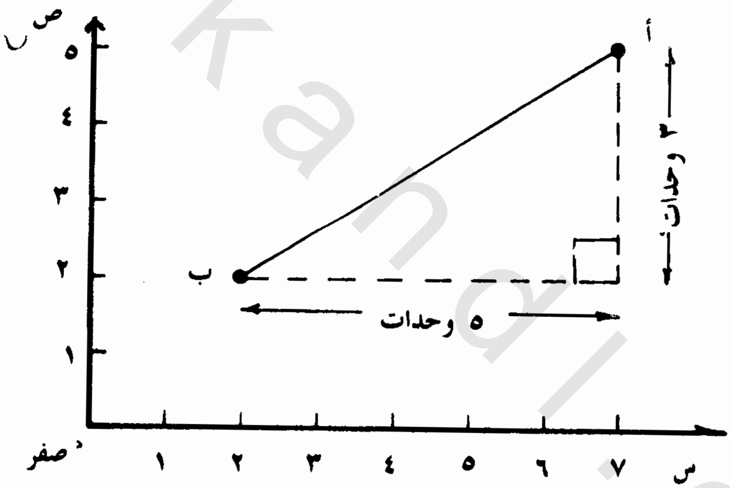
∴ ع = ٤,٧٦٩٦ متراً

٤,٧٧ متراً .

وبذلك فإن السلم يصل إلى ارتفاع ٤,٧٧ متراً على الحائط .

● مثال (٢) :

مثل بيانياً النقطتين ا (٣ ، ٢) ، ب (٧ ، ٥) ثم احسب البعد بينهما باستخدام نظرية فيثاغورث ، انظر الشكل (١٩ ــ ٦) .



شكل [١٩ ـ ٦]

● الحــل :

نفرض أن المسافة ا ب = ف سم

وبتطبيق نظرية فيثاغورث :

∴ ف^{٢} = ٤^{٢} + ٣^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ ف = ٥ سم

وهو البعد المطلوب حسابه .

[١٩ ـ ٦] تدريبـــات :

(١) سلم يرتكز على حائط رأسى ، وترتفع مقدمته عمودياً عن سطح الأرض بمقدار ٥ م وتبعد قاعدته عن الحائط بمقدار ١,٧ م . فأوجد طول السلم .

(٢) سلم طوله ٥ م ، يرتكز على حائط رأسى ، فإذا كانت قاعدة السلم تبعد بمسافة ١,٨ م عن أسفل الحائط ، فما طول جزء الحائط الذى تصل له قمة السلم .

(٣) حمام سباحة طوله (٥٠) متراً وعرضه (٢٠) متراً أوجد البعد بين ركنية المتقابلين .

(٤) ساعة حائط ، طول عقرب الساعات بها ١٠ سم بينما طول عقرب الدقائق ١٤ سم ، فكم تبلغ المسافة بين طرفى العقربين عند تمام الساعة الثالثة .

(٥) يقف رجل بأعلى عمارة إرتفاعها ٦٠ متراً ، شاهد رجلاً آخر يبعد مسافة مقدارها ٤٠ متراً عن أسفل العمارة مباشرة .

فأوجد المسافة المباشرة بين الرجلين .

(٦) حبل طوله ٢٥ متراً ، ربط أحد طرفيه فى قمة عمود مثبت رأسياً بارتفاع ١٨ متراً بينما يثبت الطرف الآخر منه بالأرض فكم يبعد هذا الطرف عن قاعدة العمود .

(٧) أوجد طول المستقيم الواصل بين نقطتين إحداثياتهما هى :

ا (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٨) .

(٨) إذا كانت المدنية ب تقع شرق المدينة ا بمسافة ٢٥ كم وكانت المدينة جـ تقع إلى الشمال مباشرة من مدينة ا بمسافة قدرها ١٦ كم ، فاحسب المسافة بين المدينتين ب ، جـ .

(٩) أبحرت سفينة شمال أحد الموانىء لمسافة مقدارها ١٠ كم ثم شاهدت سفينة تقع شرقها تماماً بمسافة قدرها ٢٠ كم ، فكم تبلغ المسافة بين السفينة الثانية والميناء .

(١٠) أوجد طول المستقيم الواصل بين كل نقطتين فيما يلى :

(ا) (صفر ، ١) ، (٤ ، ٦) .

(ب) (٣ ، ٢) ، (−٣ ، ٥) .

(جـ) (−١ ، −١) ، (٤ ، ٢) .

(د) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٣}$) ، ($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) .

(هـ) (صفر ، صفر) ، (−٣ ، −٦) .