الجــزء الثالــث

الجبر

ALGEBRA

الدرس العاشر

الضرب الجبرى

Algebra – Multiplication

[١٠ ـ ١] تبسيط عمليات الضرب :

عمليات الضرب الجبرى تشبه تماماً عمليات ضرب الأعداد ويطلق على الناتج بحاصل الضرب .

● مثــال :

حاصل ضرب ٥ × ٧ = ٣٥

وكذلك حاصل ضرب ٥ × س = ٥ س

= س + س + س + س + س

وعملية الضرب هنا تعنى أن س مكررة خمس مرات وتكتب ٥ × س أ، س × ٥ أ، ٥ س بعد استبعاد إشارة الضرب .

● مثال (١) :

بسط الصيغة الجبرية ٧ × س

٧ × س = ٧ س

● مثال (٢) :

ارجع الناتج ٣ ص إلى صيغته الأصلية

٣ ص = ٣ × ص

● مثال (٣) :

بسط المقدار جـ × ٧

جـ × ٧ = ٧ × جـ = ٧ جـ

وإذا كان هناك أكثر من عدد بينهم إشارة ضرب فإن أبسط طريقة هو إيجاد حاصل ضرب الأعداد مع بعضها .

فإذا طلب تبسيط الصيغة (أو وضعها فى أبسط صورة) : ٥ × ٦ × س

ففى هذه الحالة ، نبدأ بإيجاد حاصل ضرب الأعداد ومن ثم نتخلص من إشارة الضرب بين الأعداد والرموز الجبرية .

∴ ٥ × ٦ × س

= ٣٠ × س

= ٣٠ س

● مثـــال (٤) :

ضع الصيغة التالية فى أبسط صورة .

٣ × س × ٧

● الحـــل :

٣ × س × ٧ = ٣ × ٧ × س = ٢١ × س = ٢١ س

● مثـــال (٥) :

ضع الصيغة التالية فى أبسط صورة :

٥ × س × ٦ × ٢

● الحـــل :

٥ × س × ٦ × ٢ = ٥ × ٦ × ٢ × س = ٦٠ × س = ٦٠ س

● مثـــال (٦) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة : ٧ × ٣ ا

● الحـــــل :

٧ × ٣ ا = ٧ × ٣ × ا = ٢١ × ا = ٢١ ا

وكما نلاحظ فإنه عند ضرب عدد فى رمز جبرى مثل (٥ × س) فإن الناتج يصبح ٥ س ، وبالمثل فإن حاصل ضرب رمزين جبريين مثل :

س × ص = س ص أو ص س بدون إشارة الضرب .

∴ س ص = س × ص = ص × س = ص س

أما إذا كان هنالك ثلاثة رموز جبرية أو أكثر وكان المطلوب إيجاد حاصل ضربهم ، فإن القانون المستخدم هو :

س × ص ع = س ص ع = ع ص س = ص ع س = ص س ع

● مثال (٧) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

٢ × ٦ × س × ص

● الحـــــل :

٢ × ٦ × س × ص = ١٢ × س × ص = ١٢ س ص

● مثـــال (٨) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

٤ × ا × ٥ × ب

● الحـــل :

٤ × ا × ٥ × ب = ٤ × ٥ × ا × ب

= ٢٠ × ا × ب

= ٢٠ × ا ب

= ٢٠ ا ب .

● مثـــال (٩) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

٣ ا × ٥ بْ

● الحـــل :

٣ ا × ٥ ب = ٣ × ا × ٥ × ب

= ٣ × ٥ × ا × ب

= ١٥ × ا × ب

= ١٥ × ا ب

= ١٥ ا ب

[١٠ ـ ٢] تدريبـــات :

ضع كلاً مما يأتى فى أبسط صورة لها :

(١) ٤ × ٥ ا

(٢) ٣ × ٤ ب

(٣) ٣ × ٧ ا

(٤) ٦ × س

(٥) ٧ × ع

(٦) ٤ × ٨ ن

(٧) س × ص

(٨) م × ن

(٩) ا × س

(١٠) ٣ × ٢,٥ س

(١١) ٣ ا × ٤ ب

(١٢) ٢ س × ٣ ص

(١٣) ك × ٣ ن

(١٤) ٣ س × ٤ ص

(١٥) ٢ س × ٤ ص × ٥ ع

(١٦) ٧ م × ٤ ن × ٢ هـ

(١٧) ٦ س ص × ع

(١٨) ا × ٢ ب × ٣ جـ

(١٩) س × ص × $\frac{١}{٢}$ ع

(٢٠) ١,٥ ا × ٣ ب × ٤ جـ

(٢١) ٢ ا × ٣ ب × ٥ جـ

(٢٢) ٧ س × ٣ ص × ٥ ع

(٢٣) ٣ ا ب × ٤ جـ

(٢٤) ٢ س ص × ٣ م ن × ٤ ا ب

(٢٥) ٧ ب × ٦ × ٣ ا جـ

(٢٦) ٨ س ص × ٦ ب × ٣ ا ع

(٢٧) ٣ ا × ٣ × ٢ جـ

(٢٨) ٣ س ص × ٢ ا ب × ٦

(٢٩) ٢,٥ س ص × ٤ ع م × ٢

(٣٠) ٣ ا جـ × ٢ ب د × ١,٥ م ن

[١٠ ـ ٣] الإشـــارات :

انظر الجزء الأول (الكتاب الأول) ، وكما فى جدول (١٠ ـ ١) .

+	×	+	=	+	موجب
+	×	−	=	−	سالب
−	×	−	=	+	موجب
−	×	+	=	−	سالب

جدول [١٠ ـ ١]

وتُطبق القواعد بجدول (١٠ ـ١) على عمليات الضرب الجبرية كما يلى :

+ ٢ × +س = + ٢ س

− ٢ × +س = − ٢ س

− ٢ × − س = + ٢ س

+ ٢ × − س = − ٢ س .... وهكذا .

ويلاحظ أن حاصل ضرب مجموعة زوجية من الأعداد السالبة هو عدد زوجى أى أن حاصل ضرب عددين سالبين أو أربعة رموز جبرية سالبة أو ستة عناصر سالبة هو ناتج موجب ،

بينما حاصل ضرب مجموعة فردية من الأعداد السالبة هو عدد سالب أو مقدار سالب ،

فحاصل ضرب ثلاثة مقادير جبرية سالبة أو خمسة عناصر جبرية سالبة هو ناتج سالب .

● مثال (١) :

٦ × −٢ × −٣

= −١٢ × −٣ = ٣٦

(حاصل ضرب عددين سالبين يعطى ناتج موجب) .

● مثال (٢) :

٦ × ٢ × −٣

= ١٢ × −٣ = −٣٦

● مثال (٣) :

٣ × −٤ × −٥ × ٧

= −١٢ × −٥ × ٧

= ٦٠ × ٧ = ٤٢٠

● مثال (٤) :

٣ × −٤ × −٦ × −٥

= −٣٦٠

● مثال (٥) :

−٣ × −٤ × −٦ × −٥

= ٣٦٠

والآن سنطبق نفس القواعد كما فى الأمثلة السابقة ، فى الضرب الجبرى .

● مثال (٦) :

٧ × – ٥ × س

= – ٣٥ × س

= – ٣٥ س

● مثال (٧) :

٧ × – ٥ × – س

= – ٣٥ × – س

= ٣٥ س

● مثال (٨) :

– ٣ ا × – ٦ ب × ٤ جـ

= – ٣ × – ٦ × ٤ × ا × ب × جـ

= ٧٢ × ا × ب × جـ

= ٧٢ ا ب جـ

● مثال (٩) :

– ٣ ا × – ٦ ب × – ٤ جـ

= – ٣ × – ٦ × – ٤ × ا × ب × جـ

= – ٧٢ × ا × ب × جـ

= – ٧٢ ا ب جـ

ويفضل وضع الحروف مثل ا ، جـ ، س ، ب فى الجواب بترتيب الحروف الأبجدية وتذكر كذلك أن :

ا ب ج = ا جـ ب = ب ا جـ = ب جـ ا = جـ ا ب = جـ ب ا

الدرس الحادى عشر

قسمة الأعداد الجبرية

Algebra division

[١١ ـ ١] تقـــديـــم :

نفترض أنه طلب تقسيم ١٠ جنيهات على خمسة أفراد بالتساوى فإنه من الطبيعى أن يكون نصيب كل فرد جنيهان ، ويمكن لهذه الحالات استخدام الرموز الجبرية لتوضيح ذلك رياضياً .

فإذا اعتبرنا حرف جـ هو رمز الجنيه (أ، حرف س) .

∴ ١٠ جـ ÷ ٥ = ٢ جـ

ويمكن كتابة هذه الصيغة الرياضية فى صورة كسر .

∴ ١٠ جـ ÷ ٥ = $\frac{\text{١٠ جـ}}{\text{٥}}$ = ٢ جـ

ولا تختلف عملية القسمة عن عملية الضرب ، فيجب فى كلتا العمليتين الاهتمام بالإشارات كما فى الجدول (١١ ـ ١) .

+	÷	+	=	+	(موجب)
+	÷	−	=	−	(سالب)
−	÷	−	=	+	(موجب)
−	÷	+	=	−	(سالب)

جدول (١١ ـ ١)

● مثـــال (١) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

$-\text{٣٥ س} \div \text{٧}$

$$= -\frac{\text{٣٥ س}}{\text{٧}} = -\frac{\text{٥ س}}{\text{١}} = -\text{٥ س}$$

● مثـــال (٢) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

$-\text{١٦٠ ن} \div -\text{٣٠}$

$$= \frac{-\text{١٦٠ ن}}{-\text{٣٠}} = \frac{-\text{١٦ ن}}{-\text{٣}} = \frac{\text{١٦ ن}}{\text{٣}} = \text{٥}\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{ ن}$$

● مثـــال (٣) :

ضع الصيغة الجبرية التالية فى أبسط صورة :

$\text{٥٤ ب} \div -\text{٦٣}$

$$= \frac{\text{٥٤ ب}}{-\text{٦٣}} = \frac{\text{٦ ب}}{-\text{٧}} = \frac{-\text{٦}}{\text{٧}}\text{ ب}$$

● مثـــال (٤) :

اختصر $\text{٦٣ م} \div \text{٩ م}$

$$= \frac{\text{٦٣ م}}{\text{٩ م}} = \frac{\text{٧} \times \text{١}}{\text{١} \times \text{١}} = \frac{\text{٧}}{\text{١}} = \text{٧}$$

● مثـــال (٥) : اختصر : $\dfrac{-\text{٤٢ س ص}^{\text{١}}}{\text{٧ ص}^{\text{١}}}$

$$= \frac{-\text{٤٢ س ص}^{\text{١}}}{\text{٧ ص}^{\text{١}}} = -\frac{\text{٦ س}}{\text{١}} = -\text{٦ س}$$

[١١ ـ ٢] تدريبـــات :

[ا] ضع الصيغ الجبرية التالية فى أبسط صورهـا

(١) ١٨ ÷ ٣

(٢) ١٨ س ÷ ٣

(٣) ١٨ س ÷ ٣ س

(٤) س ÷ ص

(٥) ب ÷ جـ

(٦) ٧ س ÷ ٧ س

(٧) ٨ ا ÷ ٤ ب

(٨) ٣٠ م ÷ ٦ ن

(٩) ٤٩ هـ ÷ ٧ هـ

(١٠) ٤٢ ص ÷ ٦ ص

(١١) ٨ س ص ÷ ٤ س

(١٢) ٨ ا ب ÷ ٢ ب

(١٣) ١٦ س ص ÷ ٨ س ص

(١٤) ٢٧ س ص ÷ ٣ ص

(١٥) ٤٢ س ص ع ÷ ١٤ ص ع

(١٦) (٣ ا × ٤ ب) ÷ ٦ جـ

(١٧) ١٢ ا ب جـ ÷ ٣ ا جـ

(١٨) ٤٥ س ص ع ÷ ٥ ص

(١٩) ٥٦ س ص ع ÷ ٨ س ع ص

(٢٠) (٣ ا × ٨ ب) ÷ ٦ ا ب

(٢١) (٤ ا × ٧ س) ÷ ١٤ س

(٢٢) (٣ ا ص × ٦) ÷ ٩ ص

(٢٣) (٤ س × ٥ ص) ÷ ٢ ع

(٢٤) ٣٠ س ص ا ÷ ٥ س ا

(٢٥) ٣٠ س ص ÷ ٦ س ص ا

(٢٦) (٢٧ س × ١/٣ ص) ÷ ١٨ ص

(٢٧) (٧ س × ص/٩) ÷ س/٢

(٢٨) س ص/٨ ÷ ١٦ ص ا

(٢٩) ١٢ ا ب ÷ ٣ س/ا ب

(٣٠) ٥٠/س ص ÷ ٥/س ص

[ب] ضع ما يلى فى أبسط صورة :

(١) ٣ × − ب

(٢) − ٥ × س

(٣) − ٤ × − ا

(٤) ٦ × − م

(٥) − ٨ × − ن

(٦) ٢ × − ١٧

(٧) − ٥ × − ٣ ص

(٨) ٧ × − ١٣ م

(٩) − ٢ × س × م

(١٠) ٤ ا × − ٣ س × − ٢

(١١) − ٢ ا × − ٤ س × −

٣ ص

(١٢) − ا ÷ س

(١٣) ا ÷ − ص

(١٤) − م ÷ − ن

(١٥) − ١٦ ن ÷ ٢

(١٦) − ١٠ هـ ÷ ٢ ن

(١٧) ٢٥ ا ÷ − ٥ ب

(١٨) − ا × − ب × − م

(١٩) −س × −٣ص × −٢ن

(٢٠) ٢٠ هـ ÷ − ١٥ ن

(٢١) − ٤٥ س ÷ − ٩ ص

(٢٢) − ٥٠ ا ب ÷ ٩ ب

(٢٣) ٢٨ ا ب ÷ − ١٦ ب

(٢٤) ٣ ا × ٢ ب × − ٥ جـ هـ

(٢٥) − ١٨ س ص ع ÷ − ١٢س ع

(٢٦) ٤٢ س ص م ÷ − ٢٨ م

(٢٧) (− ٢ ا × − ٣ ب) ÷ − ٤ ن

(٢٨) ٣٠س ص هـ ÷ (−٥هـ × −٣ص)

(٢٩) ٧٢ا ب جـ ÷ (−٩ب × ٢جـ)

(٣٠) ١٠٠س ص ع ÷ (−٥ × −٤ص ع)

الدرس الثانى عشر

قوانين الأسس

The laws of indices

[١٢ ـ ١] ضرب الأســس :

إذا كان لدينا العدد ١٦ مثلاً فإنه يمكن كتابته على الصورة $٢^{٤}$ وتنطق ٢ أُس ٤ أو اثنين مرفوعة للقوة الرابعة . ويطلق على العدد ٢ بالأساس بينما العدد ٤ بالأُس .

ويمكن ضرب الأعداد المرفوعة إلى القوى المختلفة إذا كان الأساس واحد أى بنفس القيمة بمعنى أنه يمكن ضرب $٢^{٦} \times ٢^{٣}$ مثلاً أو $س^{٤} \times س^{٥}$ ويتضح ذلك من الأمثلة التالية :

● مثـــال (١) :

$٣٢ = ٢^{٥}$ ، $٤ = ٢^{٢}$

ولكن $٣٢ \times ٤ = ١٢٨ = ٢^{٧}$

$\therefore ٢^{٥} \times ٢^{٢} = ٢^{٧} = ١٢٨$

معنى ذلك أن $٢^{٥} \times ٢^{٢} = ٢^{(٥ + ٢)} = ٢^{٧}$.

وعليه فإنه عند ضرب الأسس للأعداد المتساوية (٢ فى المثال) فإننا نقوم بجمع الأسس أى :

$$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{(م+ن)}$$

[١٢ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) أوجد قيمة ما يلى :

(أ) $٢^{٢}$

(ب) $٥^{٤}$

(جـ) $١٠^{٣}$

(د) $٧^{٢}$

(هـ) $٢^{٦}$.

(و) $١^{٣}$.

(ك) $٩^{٢}$.

(ل) $٥^{٣}$.

(٢) أعد كتابة ما يلى مستخدماً الأسس كوسيلة تعبير رياضية :

(أ) س × س × س

(ب) ص × ص × ص × ص × ص × ص

(جـ) ن × ن × ن

(د) ٦ × ٦ × ٦ × ٦

(هـ) جـ × جـ × جـ × جـ × جـ × جـ × جـ

(و) ٨ × ٨ × ٨ × ٨ × ٦٤

(٣) أوجد قيمة ما يلى :

(أ) $٢^{٢} \times ٢^{٣}$

(ب) $٢^{٥}$

(جـ) $٣^{٣} \times ٣^{٤}$

(د) $٣^{٧}$

(م) $١٠^{٢} \times ١٠^{٢}$

(هـ) $٤^{٣} \times ٤^{٢}$.

(و) $٤^{٥}$.

(ك) $٥^{٣} \times ٥^{٢}$.

(ل) $٥^{٥}$.

(ن) $١٠^{٤}$.

(٤) ضع ما يلى فى أبسط صوزة أسية :

(أ) $٢^{٤} \times ٢^{٣}$

(ب) $٦^{٣} \times ٦^{٥}$

(جـ) $٣^{٣} \times ٣^{٨}$

(د) ٥×٥^{٤}

(هـ) س^{٣} × س^{٤} .

(و) م^{ن} × م^{هـ} .

(ك) $١^{٤} \times ١^{٦}$.

(ل) ب^{٥} × ب^{٣} .

(٥) ضع ما يلى فى أبسط صورة أسية :

(أ) $\text{س}^{2} \times \text{س}^{3} \times \text{س}^{4}$

(ب) $\text{ص}^{2} \times \text{ص}^{4} \times \text{ص}^{6}$

(جـ) $\text{جـ}^{3} \times \text{جـ}^{4} \times \text{جـ}^{5}$

(د) $\text{م} \times \text{م}^{2} \times \text{م}^{3}$

(هـ) $\text{ن}^{4} \times \text{ن} \times \text{ن}^{2}$

(و) $\text{ا} \times \text{ا}^{2} \times \text{ا}^{3} \times \text{ا}^{13}$.

(ك) $\text{س} \times \text{س} \times \text{س}^{2}$

(٦) اكتب ما يلى فى صورة أسية :

(أ) $\text{س} \times \text{س} \times \text{ص} \times \text{ص}$

(ب) $\text{جـ} \times \text{جـ} \times \text{جـ} \times \text{جـ} \times \text{د} \times \text{د} \times \text{د} \times \text{د}$

(جـ) $\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا} \times \text{ب}$

(د) $\text{س} \times \text{س} \times \text{ص} \times \text{ص} \times \text{س} \times \text{ص}$

(هـ) $\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا} \times \text{ب}$

(و) $\text{م} \times \text{ن} \times \text{ن} \times \text{م} \times \text{م} \times \text{ن}$

(٧) ضع ما يلى فى أبسط صورة أسية :

(أ) $\text{ا}^{2} \times \text{ب}^{4} \times \text{ا}^{5} \times \text{ب}^{3}$

(ب) $\text{ا} \times \text{جـ}^{2} \times \text{ا}^{3} \times \text{جـ}^{4}$.

(جـ) $\text{م}^{2} \times \text{ن}^{3} \times \text{م}^{4} \times \text{ن}^{7}$.

(د) $\text{س}^{7} \times \text{ص}^{5} \times \text{س}^{3} \times \text{ص}$.

(هـ) $\text{ا}^{2} \times \text{ب}^{3} \times \text{م}^{4} \times \text{ا}^{3} \times \text{ب}^{4}$ م^{5}

(و) $\text{ا} \times \text{ا}^{2} \times \text{ب} \times \text{ب}^{3} \times \text{جـ}$

(ك) $\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ا}^{2} \times \text{ب}^{3} \times \text{ا}$

(ل) $\text{جـ}^{13} \times \text{م} \times \text{جـ}^{7} \times \text{م}^{19}$

(م) $\text{س}^{20} \times \text{ص}^{15} \times \text{ص}^{6}$

(ن) $\text{س ص ع} \times \text{س ص ع} \times \text{س ص ع}$

[١٢ ـ ٣] قسمة الأسس :

كما فى الضرب فإنه يمكن قسمة الأعداد ذات الأسس وذلك إذا تساوت هذه الأعداد كما يتضح من الأمثلة التالية :

● مثـــال (١) :

$$٣٢ = ٢^{٥}$$

$$، ٤ = ٢^{٢}$$

$$، ٣٢ \div ٤ = ٨$$

$$\therefore ٢^{٥} \div ٢^{٢} = ٨ = ٢^{٣}$$

$$\therefore ٢^{٥} \div ٢^{٢} = ٢^{٣}$$

$$\therefore ٢^{٥} \div ٢^{٢} = ٢^{(٥-٢)} = ٢^{٣}$$

● مثـــال (٢) :

$$٢٤٣ = ٣^{٥} \text{ ، } ٢٧ = ٣^{٣} \text{ ، }$$

$$٢٤٣ \div ٢٧ = ٩ = ٣^{٢}$$

$$\therefore ٣^{٥} \div ٣^{٣} = ٣^{(٥-٣)} = ٣^{٢}$$

معنى ذلك أنه عند قسمة أعداد متشابهة مرفوعة لأُسس فإننا نقوم بطرح الأسس ، أى أن :

$$أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{(م+ن)}$$

● مثـــال (٣) :

$$س^{٧} \div س^{٣} = \frac{س^{٧}}{س^{٣}} = \frac{س\times س\times س\times س\times س\times س\times س}{س \times س \times س} = س^{٤}$$

[١٢ ـ ٤] تدريبـــات :

ضع ما يلى فى أبسط صورة أُسية :

(أ) $س^{٥} \div س$

(ب) $م^{١٣} \div م^{٣}$

(جـ) $ا^{٧} \div ا^{٢}$

(د) $ب^{٥} \div ب^{٤}$

(هـ) $جـ^{١٠٠} \div جـ^{٢٥}$

(و) $١٣^{٦} \div ١٣^{٥}$

(ك) $١٠٢^{٣} \div ١٠٢^{٢}$.

(ل) $س^{١٠٠} \div س^{٩٧}$

(م) $ص^{\frac{٣}{٢}} \div ص^{\frac{١}{٢}}$

(ن) $س^{\frac{٧}{٢}} \div س^{\frac{٥}{٢}}$

[١٢ ـ ٥] الأسس السالبة والأسس الصفرية :

عند إجراء عمليات طرح الأسس فإننا نتعرض كثيراً لأن يكون ناتج الطرح سالب أو مساوياً للصفر ، كما فى الأمثلة التالية :

● مثـــال (١) :

$$٢٧ \div ٢٤٣ = \frac{١}{٩}$$

أى $٣^{٣} \div ٣^{٥} = ٣^{(٣ - ٥)} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

ومنها $٣^{-٢} = \frac{١}{٩} = ٣\,\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣^{٢}}$

● مثـــال (٢) :

$$٣٢ \div ٣٢ = ١$$

أى $٢^{٥} \div ٢^{٥} = ٢^{(٥ - ٥)} = ٢^{\text{صفر}}$

$\therefore$ ٢ صفر = ١

وعموماً فإن أى رقم مرفوع لأس سالب يمكن كتابته كما يلى :

$$\text{س}^{-\text{ص}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{ص}}}$$

● مثـــال (٣) :

$$٥^{-٣} = \frac{١}{٥^{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$$

● مثـــال (٤) :

$$٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}} = \frac{١}{٤٩}$$

وقد سبق وعرفنا أن أى رقم مرفوعاً للأس صفر يساوى واحد فمثلاً ٢ صفر = ١ ، ٧ صفر = ١ ، ٧٠ صفر = ١ ، ٣٩٨ صفر = ١ ، مليون صفر = ١

[١٢ ـ ٦] تدريبـــات :

اكتب فى صورة كسر قيم ما يلى :

(١) ٤١ ÷ ٦١

(٢) $٥^{-٢}$

(٣) $٤^{-٣}$

(٤) $٣^{-٥}$

(٥) $١٠^{-٢}$

(٦) $\frac{١}{٣^{-٢}}$

(٧) $\frac{١}{٩^{\text{صفر}}}$

(٨) $٣^{-٥}$

(٩) $٧^{-٢}$

[١٢ ـ ٧] تبسيط الأسس فى عمليات الضرب والقسمة :

سوف نتفهم هذا جيداً من خلال الأمثلة المتعددة التالية :

● مثـــال (١) :

$س^{٣} \times س^{٤} = س^{٣ + ٤} = س^{٧}$

● مثـــال (٢) :

$ص^{٧} \div ص^{٣} = ص^{(٧ - ٣)} = ص^{٤}$

● مثـــال (٣) :

$٧ س \times ٣ س^{٢} = ٧ \times ٣ \times س \times س^{٢}$

$= ٢١ \times س^{١} \times س^{٢}$

$= ٢١ \times س^{(١ + ٢)} = ٢١ س^{٣}$

● مثـــال (٤) :

$$١٥\,\text{س}^{٧} \div ٣\,\text{س}^{٢}$$

$$= \frac{١٥\,\text{س}^{٧}}{٣\,\text{س}^{٢}} = ٥\,\text{س}^{(٧-٢)} = ٥^{٥}$$

● مثـــال (٥) :

$$-٥\,\text{س}^{٤} \times ٣\,\text{س}^{٢}$$

$$= -٥ \times ٣ \times \text{س}^{٤} \times \text{س}^{٢} = -١٥\,\text{س}^{(٤+٢)} = -١٥\,\text{س}^{٦}$$

● مثـــال (٦) :

$$-٣\,\text{ص} \times ٧ \times -٢\,\text{ص}^{٤}$$

$$= -٣ \times ٧ \times -٢ \times \text{ص} \times \text{ص}^{٤} = ٤٢\,\text{ص}^{(١+٤)} = ٤٢\,\text{ص}^{٥}$$

● مثـــال (٧) :

$$\frac{٢٧\,\text{س}^{٤}}{٩\,\text{س}^{٣}} = ٣\,\text{س}^{(٤-٣)} = ٣ \cdot \text{س}^{١} = ٣\,\text{س}$$

● مثـــال (٨) :

$$-٢٠\,\text{س}^{٣} \div ٣٠\,\text{س}^{٤}$$

$$= \frac{-٢٠\,\text{س}^{٣}}{٣٠\,\text{س}^{٤}} = -\frac{٢}{٣} \times \text{س}^{(٣-٤)} = -\frac{٢}{٣} \times \text{س}^{-١} = -\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\text{س}^{١}}$$

$$= \frac{-٢ \times ١}{٣ \times \text{س}} = \frac{-٢}{٣\,\text{س}}$$

[١٢ ـ ٨] تدريبات :

(١) ضع ما يلي فى أبسط صورة ممكنة :

(أ) $\frac{\text{س}^{6} \times \text{س}^{7}}{\text{س}^{5}}$

(ب) $\frac{\text{م}^{4} \times \text{م}^{6}}{\text{م}^{5}}$

(جـ) $\frac{\text{أ}^{2} \times \text{أ}^{3} \times \text{أ}^{6}}{\text{أ}^{7}}$

(د) $\frac{\text{ص}^{7}\text{ص} \times \text{ص}^{4}}{\text{ص}^{9}}$

(هـ) $\frac{\text{س}^{3} \times \text{س}^{5} \times \text{س}^{7}}{\text{س}^{9} \times \text{س}^{6}}$

(و) $\frac{\text{س}^{3} \times \text{ص}^{4} \times \text{س}^{5} \times \text{ص}^{6}}{\text{س}^{6} \times \text{ص}^{8}}$

(ل) $\frac{3\,\text{هـ}^{2} \times 6\,\text{هـ}^{3} \times 2\,\text{هـ}^{4}}{9\,\text{هـ}^{7}}$

(م) $7\,\text{ص}^{7} \times 5\,\text{ص}^{5} \times 3\,\text{ص}^{3}$

(٢) ضع ما يلى فى أبسط صورة أُسية ممكنة :

(أ) $\text{س}^{3} \times \text{س}^{-6}$

(ب) $\text{هـ}^{3} \times \text{هـ}^{-8}$

(جـ) $\text{جـ}^{5} \times \text{جـ}^{-6}$

(د) $4\,\text{س}^{3} \times 3\,\text{س}^{-8}$

(هـ) $2\,\text{ص}^{4} \times 3\,\text{ص}^{-5}$.

(و) $2\,\text{أ}^{-8} \times 3\,\text{أ}^{2} \times 7\,\text{أ}^{-3}$.

(ل) $\text{ب}^{-3} \times \text{ب}^{-15}$.

(م) $6\,\text{س}^{-5} \times 3\,\text{س}^{-15}$.

(٣) أوجد ناتج عمليات القسمة التالية :

(أ) $\text{س}^{3} \div \text{س}^{7}$

(ب) $\text{ص}^{2} \div \text{ص}^{3}$

(جـ) $\text{أ}^{5} \div \text{أ}^{6}$

(د) $8\,\text{س}^{3} \div 2\,\text{س}^{6}$

(هـ) $27\,\text{ص}^{4} \div 3\,\text{ص}^{7}$

(و) $42\,\text{ب}^{5} \div 14\,\text{ب}^{9}$.

(ل) $\text{س}^{4} \div \text{س}^{-2}$.

(م) $\text{ص}^{6} \div \text{ص}^{-6}$.

(ن) $\text{م}^{-7} \div \text{م}^{-3}$.

(ى) $\text{أ}^{-5} \div \text{أ}^{-3}$

[١٢ ـ ٩] أس الأس : Powers of Powers

إذا نظرنا إلى المقدار $(\text{س}^{٢})^{٣}$ ، فإن هذا يعنى تكعيب المقدار $\text{س}^{٢}$ أو $\text{س}^{٢}$ مكعبة .

$$\therefore \quad (\text{س}^{٢})^{٣} = \text{س}^{٢} \times \text{س}^{٢} \times \text{س}^{٢}$$

$$= \text{س}^{٢+٢+٢} = \text{س}^{٦}$$

وكذلك $(\text{س}^{٢})^{٣} = \text{س}^{٢\times٣} = \text{س}^{٦}$

وكقاعدة عامة فإن $(\text{س}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م} \times \text{ن}}$

فمثلاً $(٦^{٢})^{٤} = ٦^{٢ \times ٤} = ٦^{٨}$

، $(\text{س}^{-٤})^{٢} = \text{س}^{-٤\times٢} = \text{س}^{-٨}$

، $(\text{س}^{-٥})^{-\text{ب}} = \text{س}^{-٥\times-\text{ب}} = \text{س}^{٥\,\text{ب}}$.

الدرس الثالث عشر

التعويض البسيط

[١٣ ـ ١] تقديم :

تحدثنا فى الجزء الأول (الكتاب الأول) عن التعويض البسيط واكتفينا بالإشارة إلى أنه يمكن استبدال العدد الصحيح الموجب بحرف جبرى .

ونحن الآن بصدد استبدال الحروف الجبرية بالأعداد الصحيحة السالبة وبالأسس .

● مثال (١) :

إذا كانت س = −٣ ، ص = ٤ ، ع = −٥

فأوجد قيمة ما يلى :

(١) ٣ س (٢) ٢ ص + ع (٣) ٥ س − ٣ ع

● الحـــل :

(١) ٣ س = ٣ × س = ٣ × −٣ = −٩

(٢) ٢ ص + ع = (٢ × ص) + ع

= ٢ × ٤ + (− ٥) = ٨ − ٥ = ٣

(٣) ٥ س − ٣ ع = (٥ × س) −(٣ × ع)

= (٥ × −٣) − (٣ × −٥)

= (−١٥) − (−١٥) = −١٥ + ١٥ = صفر .

وقد استعنا فى حل (٢) ، (٣) فى المثال السابق بالأقواس وذلك لكى نحدد ترتيب العمليات الحسابية اللازم إجراؤها أولاً وذلك كما فى الكتاب الأول .

● مثـــال (٢) :

إذا كانت : ا = ٤ ، ب = −٥ ، جـ = −٣ ؛ د = صفر فأوجد قيمة ما يلى :

(١) ا جـ   (٢) ٤ ا جـ ب   (٣) ٦ ا ب جـ د

● الحـــل :

(١) ا جـ = ا × جـ = ٤ × (−٣) = −١٢

(٢) ٤ ا جـ ب = ٤ × (ا جـ) × ب = ٤ × (−١٢) × −٥
= ٤ × ٦٠ = ٢٤٠

(٣) ٦ ا ب جـ د = ٦ × (ا جـ ب) × د = ٦ × ٢٤٠ × صفر = صفر

● مثـــال (٣) :

إذا كان ا = −٣ ، ب = −٢

فأوجد قيمة ما يلى :

(ا) ا^{٣} (ب) ا ب^{٢} (جـ) ٤ ا^{٢} (د) (ا ب)^{٣}

● الحـــل :

(ا) ا^{٣} = ا × ا × ا = −٣ × −٣ × −٣ = ٩ × −٣ = −٢٧

(ب) ا ب^{٢} = ا × ب^{٢} = ا × ب × ب = −٣ × −٢ × −٢ = −١٢

(جـ) ٤ ا^{٢} = ٤ × ا^{٢} = ٤ × ا × ا = ٤ × −٣ × −٣ = ٤ × ٩ = ٣٦

(د) (ا ب)^{٣} = ا ب × ا ب × ا ب

= ا × ا × ا × ب × ب × ب

= ا^{٣} × −٢ × −٢ × −٢

= −٢٧ × −٨ = ٢١٦

● مثال (٤) :

إذا كانت ا = ٣ ، ب = −٤ ، س = ٣ ؛ ص = ٢

فأوجد قيمة ما يلى :

(١) ٣ ا^{٢س} (٢) − (ب ص)^{٢} (٣) (−٢ ا)^{س} (٤) −٤ (ا ب)^{ص}

● الحـــل :

(١) ٣ ا^{٢س} = ٣ × ا$^{٢×س}$ = ٣ × ٣$^{٢×٣}$ = ٣ × ٣^{٦} = ٣^{٧}

= ٢١٨٧

(٢) − (ب ص)^{٢} = − ب$^{ص × ٢}$ = − (−٤)$^{٢×٢}$ = −(−٤)^{٤}

= − (−٤ × −٤ × −٤ × −٤)

= − ٢٥٦

(٣) (−٢ا)^{س}=(−٢×٣)^{٣}=(−٦)^{٣}=−٦×−٦×−٦=−٢١٦

(٤) −٤ (ا ب)^{ص} = −٤ (٣ × −٤)^{٢} = −٤ × (−١٢)^{٢}

= −٤ × −١٢ × −١٢ = −٤ × ١٤٤ = −٥٧٦

[١٣ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) أكمل الجدول الآتى ، جدول (١٣ ـ ١) :

س	س٢ =	٣ س+٢ =	س٣ =	س٣ + س٢ + ٣ س =
٥				
٤				
٣				
٢				
١				
صفر				
−١				
−٢				
−٣				

جدول (١٣ ـ ١)

(٢) أكمل الجدول الآتى ، جدول (١٣ ـ ٢) :

ا =	٥ ا =	٥ ا + ٢ =	ا^{٢} =	ا^{٢} − ٤ =
−٤				
−١				
صفر				
٣				
٥				
٧				
٩				

جدول (١٣ ـ ٢)

(٣) إذا كانت ا = ٣ ، ب = ٥ ، جـ = −٤

فأوجد قيمة ما يلى :

(ا) ٢ ا + ب − جـ

(ب) ٣ ا ب جـ

(جـ) ٤ ا − ٥ ب

(د) ٢ ا ب + ٣ ب جـ

(هـ) ٧ ا ب

(و) ب^{٢} − جـ^{٢}

(ز) ا^{٢} + جـ^{٢}

(ح) ا^{٢} − ب^{٢} + جـ^{٢}

(ط) ٣ ب^{٢} جـ

(ى) ٢ ا^{٢} ب^{٢} جـ

(م) ا^{٢} ب^{٢} + جـ^{٣}

(ن) ا^{٢} + جـ + ب^{٣}

(٤) إذا كانت م = ١ ، ن = −٢ ، هـ = ٦

فأوجد قيمة ما يلى :

(ا) ٣ م + ٢ ن − ٥ هـ

(ب) م ن − ن هـ

(جـ) ٣ م هـ − ٢ م ن

(د) ٣ هـ^{٢}

(هـ) هـ^{٢} − ن^{٢}

(و) م هـ ÷ − ن

(ز) هـ^{٢} ÷ ن^{٢}

(ح) −٢ م ن هـ ÷ م^{٢}

(ط) ٣ ن^{٢} + ٥ هـ ÷ م هـ

(ى) $\frac{\text{ن}}{\text{م}} - \frac{\text{هـ}}{\text{ن}}$

(٥) إذا كانت س = − ٣ فأوجد قيمة ما يلى :

(ا) ٤ س

(ب) ٣ س^{٢}

(جـ) س^{٣}

(د) ٢ س^{٤}

(هـ) ٢ س^{٣} + س^{٢}

(و) س^{٣} ÷ س^{٢}

(٦) إذا كانت ا = −٢ ، ب = −١ ، جـ = ٤

فأوجد قيمة ما يلى :

(ا) − ا − ب − جـ

(ب) ٢ ا + ٣ ب − ٢ جـ

(جـ) ٣ ا ب − ٢ جـ

(د) ا^{٢} × ٢ ب^{٣}

(هـ) ٢ ا − ا^{٢}

(و) حـ^{٢} ÷ ا ب

(ز) ا^{٣} + ٢ جـ^{٢}

(ح) ا + ب + ٣ جـ ÷ ٣

(ط) $\frac{١}{\text{ا}} - \frac{١}{\text{ب}} + \frac{١}{\text{جـ}}$

(ى) $\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

(م) جـ ب^{٢}

(ن) ب^{٢} جـ^{٢} ÷ ا^{٢}

الدرس الرابع عشر

المعادلات البسيطة

Simple equations

[١٤ ـ ١] تقديم :

فى الكتاب الأول ، قمنا بحل المعادلات والتى كانت أجوبتها أعداداً صحيحة موجبة ، وفى هذا الكتاب سنقوم بحل المعادلات التى تعطى أجوبة سالبة أو حتى كسرية .

تذكر أن : لمعرفة قيمة س ، إذا كانت ٥ س = ١٥ فإننا نقسم طرفى المعادلة على ٥

$$\therefore \quad \frac{\text{٥ س}}{\text{٥}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٥}} \qquad \therefore \text{ س = ٣}$$

تذكر أن : إذا أردنا إيجاد قيمة س عندما ٣ س − ٥ = ١٣ فإننا نضيف ٥ إلى طرفى المعادلة :

∴ ٣ س − ٥ + ٥ = ١٣ + ٥

∴ ٣ س = ١٨ وبقسمة طرفى المعادلة على ٣

∴ س = ٦

● مثال (١) :

إذا كانت ٧ س = – ٦٣ فأوجد قيمة س

● الحـــل :

بقسمة طرفى المعادلة على ٧

$\therefore \; = \frac{\text{٧ س}}{\text{٧}} = \frac{\text{-٦٣}}{\text{٧}}$ ومنها $\therefore$ س = -٩

● مثـــال (٢) :

إذا كانت -٥ ا = ٣٥ فأوجد ا

● الحـــل :

بقسمة طرفى المعادلة على ـ ٥

$\therefore \; = \frac{\text{– ٥ ا}}{\text{– ٥}} = \frac{\text{٣٥}}{\text{– ٥}}$ ومنها $\therefore$ ا = -٧

● مثـــال (٣) :

إذا كانت :

– ٣ س = – ٢٧ فأوجد قيمة س

● الحـــل :

نقسم طرفى المعادلة على – ٣

$\therefore \; = \frac{\text{-٣ س}}{\text{-٣}} = \frac{\text{-٢٧}}{\text{-٣}}$

$\therefore$ س = ٩

● مثـــال (٤) :

إذا كانت : ٣ ا + ١٧ = ٢ فأوجد قيمة ا

● الحـــل :

بطرح ١٧ من طرفى المعادلة :

∴ ٣ ا + ١٧ − ١٧ = ٢ − ١٧

∴ ٣ ا = − ١٥ بقسمة طرفى المعادلة على ٣

∴ $\frac{\text{٣ ا}}{\text{٣}}$ = − $\frac{\text{١٥}}{\text{٣}}$ ومنها ∴ ا = − ٥

● مثـــال (٥) :

إذا كانت : ٨ − ٧ هـ = ٢٩

فأوجد قيمة : هـ

● الحـــل :

بطرح ٨ من طرفى المعادلة :

∴ ٨ − ٧ هـ − ٨ = ٢٩ − ٨

∴ −٧ هـ = ٢١ وبقسمة طرفى المعادلة على − ٧

∴ $\frac{\text{−٧ هـ}}{\text{−٧}} = \frac{\text{٢١}}{\text{−٧}}$

ومنها ∴ هـ = − ٣

● مثـــال (٦) :

إذا كانت ٧ س − ٨ = ١٠ س + ٤ فأوجد قيمة س .

● الحـــل :

بإضافة ٨ إلى طرفى المعادلة :

∴ ٧ س − ٨ + ٨ = ١٠ س + ٤ + ٨

∴ ٧ س = ١٠ س + ١٢

وبطرح ١٠ س من طرفى المعادلة

∴ ٧ س − ١٠ س = ١٠ س + ١٢ − ١٠ س

∴ −٣ س = ١٢

وبقسمة طرفى المعادلة على −٣

$$\therefore \frac{-\text{٣ س}}{-\text{٣}} = \frac{\text{١٢}}{-\text{٣}}$$

∴ س = − ٤

[١٤ ـ ٢] حل المعادلات ذات الكسور العشرية والكسور الاعتيادية :

● مثال (١) :

إذا كانت ٣ س = ٥ فأوجد قيمة س

● الحـــل :

نقسم طرفى المعادلة على ٣ :

$\therefore \frac{٣\,س}{٣} = \frac{٥}{٣} = ١\frac{٢}{٣}$

$\therefore$ س $= ١\frac{٢}{٣}$ (أ، س = ١,٦٦٦٦)

● مثال (٢) :

إذا كانت ٤ جـ = ٣ فأوجد قيمة جـ .

● الحل :

بقسمة طرفى المعادلة على ٤

$\therefore \frac{٤\,جـ}{٤} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore$ جـ $= \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

● مثال (٣) :

إذا كانت $\frac{ص}{٣} = ٧$ **فأوجد قيمة ص**

بضرب طرفى المعادلة فى ٣ :

$\therefore \frac{ص}{٣} \times ٣ = ٣ \times ٧$

$\therefore$ ص = ٢١

● مثال (٤) :

إذا كانت : −٥ س = ١٢ فأوجد قيمة س

● الحل :

بقسمة طرفى المعادلة على −٥ :

$\therefore \frac{-٥\,س}{-٥} = \frac{١٢}{-٥}$

$\therefore$ س $= -\frac{١٢}{٥} = -٢\frac{٢}{٥} = -٢,٤$

● مثـــال (٥) :

إذا كانت ٣ ا + ١٧ = ١٢ فأوجد قيمة ا

● الحـــل :

بطرح ١٧ من طرفى المعادلة :

∴ ٣ ا + ١٧ − ١٧ = ١٢ − ١٧

∴ ٣ ا = − ٥

وبقسمة طرفى المعادلة على ٣ :

∴ $\frac{\text{٣ ا}}{\text{٣}} = \frac{\text{− ٥}}{\text{٣}}$ ∴ ا = $\frac{\text{− ٥}}{\text{٣}}$ = − ١ $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

● مثال (٦) :

إذا كانت ٥٣ − ٥ س = ١٥ + س فأوجد قيمة ا

● الحـــل :

نجمع ٥ س لكل من طرفى المعادلة :

∴ ٥٣ − ٥ س + ٥ س = ١٥ + س + ٥ س

∴ ٥٣ = ١٥ + ٦ س

وبطرح ١٥ من طرفى المعادلة :

∴ ٥٣ − ١٥ = ١٥ + ٦ س − ١٥ ∴ ٣٨ = ٦ س

وبقسمة طرفى المعادلة على ٦ :

∴ $\frac{\text{٦ س}}{\text{٦}} = \frac{\text{٣٨}}{\text{٦}}$ ∴ س = ٦ $\frac{\text{٢}}{\text{٦}}$ = ٦ $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

[١٤ ـ ٣] تدريبـــات :

(١) حل المعادلات التالية :

(ا) ٣ س = ١٠
(ب) ٢ س = ١٣
(جـ) ٧ س = ٢٤
(د) ١٢ س = ٥
(هـ) ١٩ س = ٣٩
(و) ٢ س + ٣ = ١٤
(ز) ٤ س − ٥ = ٩
(ح) ٥ س − ٦ = ١٣
(ط) ٣ س + ٥ = ٩
(ك) ٨ س + ١ = ١٢

(٢) حل المعادلات التالية :

(ا) ٢ س + ٥ = س + ١٢
(ب) ٣ س − ٥ = ٢ س + ٨
(جـ) ٥ س + ٩ = ٣ س − ١٢
(د) ٤ س + ٨ − س + ٥ = ٢ س − ٣ + س − ٤
(هـ) ٧ س + ٣ − س + ٣ = ١٧ − ٣ س

(٣) ما هو العدد الذى إذا أضفنا له ٧ لأصبح الناتج ١٢ ، كوّن مما سبق معادلة جبرية وأوجد حلها لتحصل على العدد المطلوب ؟

(٤) ما هو العدد الذى إذا ضاعفناه وطرحنا من الناتج ٣ لكان الناتج ١١ ؟ كون المعادلة التى تُعبر عن الجملة السابقة ثم أوجد العدد المطلوب .

(٥) ما هو العدد الذى إذا كعبناه ثم ضاعفنا مكعبه ، ثم أضفنا للناتج ٥ لكان الناتج ٢١ ، كون المعادلة الجبرية التى تعبر عن الجملة السابقة ثم أوجد قيمة العدد المطلوب .

(٦) أوجد قيمة س للمعادلات التالية :

(ا) ٣ س − ٨ = ٣
(ب) س + ٢ س − ٤ = ٨
(جـ) ٣ − س = ٩ − ٤ س
(د) ٥ س − ٨ = ٢ س − ٦

(٧) أوجد قيمة س فيما يلى :

(ا) ١٠ س = − ٦٠

(ب) ٤ س = − ١٠٠

(جـ) ٣ س = − ٢٧

(د) ٧ س = − ٤٩

(هـ) ١٢ س = − ٣٦

(و) ١٠ س + ٧٠ = − ٦٠

(ز) ٤ س + ١٦٠ = − ١٠٠

(ح) ٣ س + ٥٤ = −٢٧

(ط) ٧ س + ٩٨ = − ٤٩

(ك) ١٢ س + ٤٨ = − ٣٦

(٨) حل المعادلات التالية :

(ا) ٢ س + ٩ = س − ٥

(ب) ٣ س − ٧ = ٢ س − ١٠

(جـ) ٢ − ٣ س = −٩ − ٤ س

(د) ٢٢ + س = ٤ − س

(هـ) ٨ س − ٦ = ٤ س − ٥

(و) ٣ س + ١ + ٢ س − ٣ = ٣ س − ٨

(٩) حل المعادلات التالية :

(أ) ٣ س − ٦ = ٢ س + ١٠

(ب) ٧ − ٢ س = ٣ س + ١٠

(جـ) ٤ س + ٣ − ٢ س + ٨ = س + ٧

(د) ٣ س − ٧ = س − ١٥

(هـ) ٥ س − ٢ − س = ٢ س − ٨ + س

(و) ٢ س − ٣ = ٣ س − ١٥

(ز) $\frac{٣}{٢}$ س − ٤ = ١١

(ح) $\frac{١}{٢}$ س + ٧ = ٤

الدرس الخامس عشر

الأقـــواس

Brackets

[١٥ ـ ١] فك الأقواس :

علينا أن نتذكر أن :

٢ س = س + س

وبنفس الطريقة فإن :

٢ (ا + ب) = (ا + ب) + (ا + ب)

= ا + ب + ا + ب

وبإعادة الترتيب :

∴ ٢ (ا + ب) = ا + ا + ب + ب = ٢ ا + ٢ ب

وكذلك فإن :

٣ (س − ص) = (س − ص) + (س − ص) + (س − ص)

= س − ص + س − ص + س − ص

وبإعادة الترتيب :

∴ ٣ (س − ص) = س + س + س − ص − ص − ص

= ٣ س − ٣ ص

يلاحظ من المثالين السابقين ، أن ما تم ما هو إلا عملية فك للأقواس وذلك بضرب كل عنصر داخل الأقواس (بإشارته) فى الرقم الموجود خارج القوس (بإشارته) وفيما يلى اختصار الخطوات التى تمت فيما سبق لفك الأقواس .

● مثال (١) :

٣ (س + ٤) = ٣ × س + ٣ × ٤

= ٣ س + ١٢

● مثال (٢) :

-٤ (س + ٢) = - ٤ × س + (-٤) × ٢

= - ٤ س - ٨

● مثال (٣) :

- ٢ (س - ص) = - ٢ × س - (-٢) × ص

= -٢ س + ٢ ص

● مثال (٤) :

٤ (٢ س - ٣ ص) = ٤ × ٢ س + ٤ × -٣ ص

= ٨ س - ١٢ ص

● مثال (٥) :

- (٥ س - ٣ ص) ، إن هذا القوس يمكن اعتباره كالتالى :

-١ × (٥ س - ٣ ص) ، ثم نتعامل معه كما سبق .

∴ -١ × (٥ س - ٣ ص) = - (٥ س - ٣ ص) = -١ × ٥ س -١ × - ٣ ص

= - ٥ س + ٣ ص = ٣ ص - ٥ س

● مثال (٦) :

٣ س (س + ٤) ،

= ٣ س (س + ٤) = ٣ س × س + ٣ س × ٤

= ٣ س^{٢} + ١٢ س

[١٥ ـ ٢] وضع المعادلات فى أبسط صورة :

إذا أردنا وضع المعادلة فى أبسط صورة لها ، فإننا نبدأ أولاً بفك الأقواس فى المعادلة ،

وبعد ذلك نبدأ فى الجمع الجبرى للعناصر المتشابهة مع بعضها فنحصل على أبسط صورة .

● مثال (١) :

اختصر المقدار : ٣ (س + ص) − ٢ س

● الحـــل :

١ ـــ نفك القوس : ∴ المقدار = ٣ س + ٣ ص − ٢ س

٢ ـــ نعيد ترتيب الحدود : ∴ المقدار = ٣ س − ٢ س + ٣ ص

٣ ـــ نجمع العناصر المتشابهة : ∴ المقدار = س + ٣ ص

● مثال (٢) :

اختصر المقدار : ٤ (س + ص) − ٣ (س − ص)

● الحـــل :

١ ـــ نفك الأقواس : ∴ المقدار = ٤ س + ٤ ص − ٣ س + ٣ ص

٢ ـــ نعيد ترتيب الحدود : ∴ المقدار = ٤ س − ٣ س + ٤ ص + ٣ ص

٣ ــ نجمع العناصر المتشابهة : ∴ المقدار = ٣ س + ٧ ص

[١٥ ـ ٣] تدريبات « ١ » على الأقواس :

(١) فك الأقواس التالية :

(ا) ٤ (س + ٥)

(ب) ٣ (٣ س + ٢)

(جـ) ٢ (٣ س − ٣)

(د) ٥ (٢ س − ٧)

(هـ) ٦ (٤ س + ٢)

(و) ٧ (٢ س − ٥)

(٢) فك الأقواس التالية ثم اختصر المقدار لأبسط صورة :

(ا) ٣ (٢ س + ١) + ٢ (٥ − ٢ س).

(ب) ٤ (٣ س − ٢) + ٣ (س + ١) .

(جـ) ٢ (٤ س + ٣) − ٢ (٣ س − ٢) .

(د) ٨ (س − ٤) − ٦ (٢ س + ١) .

(هـ) ٢ (٥ − س) + ٣ (٢ + ٣ س) .

(و) ٥ (٢ س + ٣) + ٣ (٥ + ٢ س) .

(ز) ٦ (٢ س − ١) −٢ (٥ س + ٣)

(ح) ٣ (٣ س + ١) + ٤ (س + ٤)

(ط) ٥ (٣ س − ١) + ٣ (٢ س + ٧) .

(ى) ٣ (١−٢س) + ٤ (٣ س + ٢) .

[١٥ ـ ٤] تدريبـات « ٢ » على الأقواس :

(١) فك الأقواس التالية :

(ا) س (٢ + ٢ س)

(ب) س (٢ − س)

(جـ) س (٢ س − ٤)

(د) س (٦ − ٣ س)

(هـ) س (٣ + ٦ س)

(و) س (٥ − ١٣ س)

(٢) فك الأقواس التالية ثم اجمع العناصر المتشابهة مع بعضها كما فى المثال التالى :

● مثــال :

س (٣ + س) + س (٣ س − ٢)

= ٣ س + س^{٢} + ٣ س^{٢} − ٢ س

= ٤ س^{٢} + س

(أ) س (٢ س + ٢) + س (٣ س + ١) .

(ب) س (٢ + ٣ س) + س (١ − ٢ س) .

(جـ) س (٣ − س) + س (٦ س + ١) .

(د) س (٢ س − ٣) + س (س − ٥) .

(هـ) س (٢ س − ٤) + س (١ − ٣ س) .

(و) س (١ − ٢ س) + س (٣ س − ٤) .

(٣) فك الأقواس التالية :

(أ) ٢ س (س + ٤)

(ب) ٢ س (٢ س − ٥)

(جـ) ٥ س (٣ − س)

(د) ٣ س (٣ س + ٣) .

(هـ) ٥ س (س − ٩)

(و) ٧ س (٣ − ٤ س)

[١٥ ـ ٥] ضرب قوسين فى بعضهما :

إذا أردنا إيجاد حاصل ضرب قوسين فى بعضهما فإننا نبدأ أولاً فى ضرب كل عنصر من عناصر القوس الأول فى كل عنصر من عناصر القوس الثانى ، وبذلك نكون قد قمنا بفك الأقواس ثم نقوم بجمع العناصر المتشابهة معاً لتبسيط المقدار إلى أبسط صورة ممكنة ، والأمثلة التالية تُوضح ذلك .

● مثــال (١) :

ضع المقدار التالى فى أبسط صورة ممكنة :

(س + ٣) (س + ٤) .

● الحـــل :

كما سبق وأوضحنا ، علينا أن نضرب كل عنصر من عناصر القوس الأول في عنصرى القوس الثانى ، ولهذا فإننا نعيد ترتيب المقدار كما يلى :

(س + ٣) (س + ٤)

وتُقرأ س (س + ٤) + ٣ (س + ٤) .

ثم نقوم بفك الأقواس .

س (س + ٤) + ٣ (س + ٤) .

= س^{٢} + ٤ س + ٣ س + ١٢

= س^{٢} + ٧ س + ١٢

● مثـــال (٢) :

أوجد حاصل ضرب (ب − ٣) (ب − ١)

● الحـــل :

المقدار = ب (ب − ١) − ٣ (ب − ١)

= ب^{٢} − ب − ٣ ب + ٣

= ب^{٢} − ٤ ب + ٣

● مثال (٣) :

أوجد حاصل ضرب : (س − ٥) (س + ٤)

● الحـــل :

المقدار = س (س + ٤) − ٥ (س + ٤)

= س^{٢} + ٤ س − ٥ س − ٢٠

= س^{٢} − س − ٢٠

● **مثال (٤) :**

أوجد حاصل ضرب : (٢ جـ + ٣ س) (جـ − ٣ س)

● **الحــل :**

المقدار = ٢ جـ (جـ − ٣ س) + ٣ س (جـ − ٣ س)

= ٢ جـ^{٢} − ٦ جـ س + ٣ س جـ − ٩ س^{٢}

= ٢ جـ^{٢} − ٣ س جـ − ٩ س^{٢}

● **مثــال (٥) :**

أوجد حاصل ضرب (س − ٣)^{٢} .

● **الحــل :**

المقدار = (س − ٣) (س − ٣)

= س (س − ٣) − ٣ (س − ٣)

= س^{٢} − ٣ س − ٣ س + ٩

= س^{٢} − ٦ س + ٩

● **مثال (٦) :**

أوجد حاصل ضرب : (س + ص) (م + ن)

● **الحــل :**

المقدار = س (م + ن) + ص (م + ن)

= س م + س ن + ص م + ص ن .

[١٥ ـ ٦] تدريبات « ٣ » على الأقواس :

أوجد حاصل ضرب الأقواس التالية مع اختصار الناتج إلى أبسط صورة ممكنة :

(١) (س + ٢) (س + ١)
(٢) (س + ١) (س + ٤)
(٣) (س − ٣) (س − ٢)
(٤) (س − ٤) (س − ٥)
(٥) (س − ٢) (س + ٣)
(٦) (٢ س − ١) (٢ س + ٢)
(٧) (٣ س+٣) (٢س − ١)
(٨) (٥ س − ١) (٣ س − ٢)
(٩) (٤ س + ٤) (٣ س − ٣)
(١٠) س − ٤) (س + ٤)
(١١) (٤ س + ١) (٤ س − ١)
(١٢) (٢ − س) (٢ + س)
(١٣) (٢ − ٣ س) (٢ + س) .
(١٤) (٣ س − ٥) (٥ س − ٣)
(١٥) (٤ س + ٢) (٢ س + ٤)
(١٦) (٥ − ٢ س) (٣س + ٣)
(١٧)(س + ص) (س − ٢ ص)
(١٨) (٢ س − ص) (س + ٣ ص)
(١٩) (٢ س−٢ ص)(٢ س+٣ ص)
(٢٠) (م − ٥ ن) (٢ م + ن)
(٢١) (٣ س − ٧) (٧ − ٣ س)
(٢٢) ٢ (٢ س − ٣) (٤ س − ٣)
(٢٣) ٣ (٣ س − ١) (١ − ٤ س)
(٢٤) ٤ (س − ٤) (٢ − ٢ س)
(٢٥) ٥ (س − ٥) (س + ٥)

[١٥ ـ ٧] التعويض فى المعادلات :

يمكننا الآن حل المعادلات التى تحتوى على أقواس بإحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى : نبدأ بفك أقواس المعادلة ، ثم نضعها فى أبسط صورة لها وأخيراً نعوّض عن رموزها الجبرية بالقيم المُعطاه ، فنحصل على الناتج .

الطريقة الثانية : نبدأ بالتعويض عن رموز الأقواس والمعادلة بالقيم المعطاة ثم بعد ذلك نفك الأقواس والأمثلة التالية توضح طرق حل المسائل بالطريقتين :

● مثال (١) :

إذا كانت س = ٢ ، ص = −١

فأوجد قيمة المقدار : ٣ (س + ص) .

● الحل :

بالطريقة الأولى :

(١) نبدأ بفك الأقواس :

∴ ٣ (س + ص) = ٣ س + ٣ ص

(٢) ثم نعوض عن الرموز الجبرية :

وذلك بوضع س = ٢ ، ص = −١ فى المقدار

∴ ٣ س + ٣ ص = ٣ × ٢ + ٣ × −١ = ٦ − ٣ = ٣

● مثال (٢) :

إذا كانت س = − ٣ ، ص = ٤

فأوجد قيمة المقدار : س (٢ س − ص)

● الحل بالطريقة الثانية :

المقدار : س (٢ س − ص) = − ٣ (٢ × −٣ −٤) .

= −٣ (−٦ −٤)

= −٣ × −١٠

= + ٣٠

وواضح أن الطريقة الثانية أسهل من الأولى وأسرع فى الحصول على الإجابة .

[١٥ ـ ٨] تدريبـــات :

(١) إذا كانت ا = ٣ ، ب = −٢ ، س = ٤ ، ص = −١

فأوجد قيمة ما يلى بالتعويض أولاً ثم فك الأقواس :

(أ) ا (س + ٢ ص) .

(ب) س (٣ ا − ٢ ب) .

(جـ) ص (٢ س − ٣ ا) .

(د) ب (٢ ا + ص − س) .

(هـ) س (ا − ب + ص) .

(٢) كرر إجابة السؤال السابق ولكن باستخدام فك الأقواس أولاً ثم بعد ذلك بالتعويض عن الرموز .

(٣) إذا كانت م = ٤ ، ن = − ٣ ، ج = ٢ ، د = صفر

فأوجد قيمة المقادير التالية بطريقة فك الأقواس أولاً ثم التعويض بالرموز :

(ا) (م + ٢) (م − ٣)

(ب) (ن + ٦) (ن + ٣)

(جـ) (جـ − ٥)^{٢}

(د) (م − ٣) (ن + ٤)

(هـ) (جـ + ٢) (د + ٥)

(و) (د − ٤)^{٢}

(ز) (ب + م) (٢ ب − ٢ م)

(ح) (٢ ب + ٧) (٣ − د)

(ط) (٢ ن − ٣ ب) (ب + ٢)

(ى) (م − ن) (جـ + د)

(٤) كرر إجابة السؤال السابق ولكن بالتعويض أولاً عن الرموز ثم فك الأقواس .

[١٥ ـ ٩] حل المعادلات المحتوية على أقواس :

بعد أن تعلمنا الطرق المختلفة لفك الأقواس ، فإنه يمكننا حل المعادلات التى بها أقواس وذلك بفك الأقواس أولاً ثم اتباع الخطوات المعتادة لحل أى معادلة :

● مثال (١) :

حل المعادلة الآتية : ٣ (س + ٤) = ٣٠

● الحـــل :

بفك الطرف الأيمن :

∴ ٣ س + ١٢ = ٣٠

∴ ٣ س = ٣٠ − ١٢

∴ ٣ س = ١٨

∴ س = $\frac{١٨}{٣}$ = ٦

● مثـــال (٢) :

حل المعادلة الآتية : ٣ (س − ٢) = ٤ (س − ٣)

● الحـــل :

بفك الأقواس فى الطرفين :

∴ ٣ س − ٦ = ٤ س − ١٢

∴ ٣ س − ٤ س = − ١٢ + ٦

∴ − س = − ٦

∴ س = ٦

وكقاعدة لحل مثل هذه المعادلات فإنه يمكن الاسترشاد بالجدول الآتى ، جدول (١٥ ـ ١) ،

س (ص + ع) = س ص + س ع
س (ص − ع) = س ص − س ع
− س (ص + ع) = − س ص − س ع
− س (ص − ع) = − س ص + س ع

جدول (١٥ ـ ١)

[١٥ ـ ١٠] تدريبات « ٤ » على الأقواس :

(١) فك الأقواس التالية :

(أ) س ص (س − ص)

(ب) س ص (٢ س − ٣ ص)

(جـ) ٢ س ص (٣ س − ٢ ص)

(د) س^٢ ص (س + ص)

(هـ) ا س ص^٢ (س^٢ − ا ص)

(و) ٣ ا ب س (٢ س^٢ − ا^٢ ب^٢)

(ز) ا^٢ ب^٢ (س^٢ + ٢ ص^٢)

(ح) ٢ س^٢ ص (٣ ا س − ٤ ا ص^٢) .

(٢) حل المعادلات الآتية :

(ا) ٣ (س + ٢) = ٢ (٢ س − ٣)

(ب) ٢ (٢ س − ٤) = ٣ (س − ٢)

(جـ) ٢ (٢ − ٢ س) = ٤ (٣ − ٤ س)

(د) ٤ (٢ س + ٣) = ٥ (٢ س − ٦)

(هـ) ٢ (م + ن) = ٤ (٢ م − ٣ ن)

(و) ٢ (ا + ٤ ب) = ٦ (٢ ا − ب)

(ز) ٦ (س − ص) = ٣ (٣ س − ٣ ص)

(ح) ٤ (٢ س + ص) = ٢ (٣ س − ٣ ص)

(٣) حل المعادلات الآتية بفك الأقواس أولاً ثم جمع العناصر المتشابهة :

(ا) ٢ (س + ٣) = ٣ (س + ٧)

(ب) ٥ (س − ١) = ٣ (س − ٩)

(جـ) ٢ (٣ س + ١) = ٥ (س − ٩)

(د) ٢ (٥ س + ٢) = ٣ (٣ س + ١)

(هـ) ٢ (٣ س − ١) + ٣ (س + ٤) = ٤ (٢ س − ٣)

(و) ٢ (٢ − س) + ٤ (س + ٣) = ٢ (١ − س)

(ز) ٥ (س + ٢) + ٢ (١ − ٢ س) = ٧ − س

(ح) ٣ (س − ٣) + ٢ (٢ س − ٢) = ٨ − ٦ س

(٤) المسائل التالية ليست سهلة كما يبدو لأول وهلة :

(ا) ٢ (٣ س + ٥) = − ١٣

(ب) ٣ (٣ − ٢ س) = ٤

(جـ) ٢ (س + ٥) = ٣ (٢ س − ٢)

(د) ٤ (س − ٣) = ٣ (٢ س − ٨)

(هـ) ٤ (٢ − ٣ س) = ١٦

(و) ٣ (٥ − ٣ س) = ٤ (٢ − ٣ س)

(ز) ٢ (٢ س + ٣) = ٤ (٢ − ٣ س)

(ح) (س + ٧) = ٢ (٢ س − ٥)

[١٥ ـ ١١] التحليل البسيط واستخدام الأقواس :

عند إجراء تحليل لمقدار جبرى فإننا نقوم بعملية عكسية لعملية فك الأقواس ، وذلك بالبحث أولاً عن أكبر عامل مشترك فى المقدار ثم إضافة الأقواس للمقدار .

فإذا نظرنا إلى المقدار ٢ س + ٤ ص ، نجد أن أكبر عامل مشترك هو ٢ ويتم إستخراج العدد خارج القوس ويوضع بداخله ما يتبقى ويصبح المقدار كالتالى :

٢ س + ٤ ص = ٢ (س + ٢ ص)

ويمكن التأكد من صحة العبارة الجديدة للمقدار الجبرى وذلك بإعادة فك الأقواس كالتالى :

٢ (س + ٢ ص) = ٢ × س + ٢ × ٢ ص

= ٢ س + ٤ ص = نفس المقدار الأصلى وبذلك يكون التحليل صحيحاً .

● مثال (١) :

حلل المقدار ا س + ٢ ا ص

● الحـــل :

أكبر عامل مشترك هو ا

∴ ا س + ٢ ا ص = ا (س + ٢ ص)

● مثال (٢) :

حلل المقدار (س + ٣ س^{٢})

● الحـــل :

أكبر عامل مشترك هو س

∴ س + ٣ س^{٢} = س (١ + ٣ س)

● مثال (٣) :

حلل ٥ س + ٥ س^{٣}

● الحـــل :

أكبر عامل مشترك هو ٥ س

∴ ٥ س + ٥ س^{٣} = ٥ س (١ + س^{٢}) .

● مثال (٤) :

حلل ٤ ا س − ١٢ ا ص

● الحـــل :

أكبر عامل مشترك هو ٤ ا

∴ ٤ ا س − ١٢ ا ص = ٤ ا (س − ٣ ص)

● أمثلة أخرى :

(ا) ٧ س − ١٤ ص = ٧ (س − ٢ ص)

(ب) ٣ س − ٢٧ ص = ٣ (س − ٩ ص)

(جـ) −٣ م + ٩ ن = − ٣ (م − ٣ ن) (أكبر عامل مشترك = − ٣)

(د) ٩ س ص^{٢} − ٨١ س^{٢} ص = ٩ س ص (ص − ٩ س)

[١٢ ـ ١٥] تدريبــات :

(١) أكمل الفراغات التالية :

(ا) ٣٠ ا + ٢٥ ب = ؟ × (٦ ا + ٥ ب)

(ب) ٤٢ ب − ٣٥ جـ = ؟ × (٦ ب − ٥ جـ)

(جـ) ١٥ س + ٥٠ ص = ؟ × (٣ س + ١٠ ص)

(د) س^{٢} + ٣ س = ؟ × (س + ٣)

(هـ) ٢٥ س^{٢} − ٥ س = ؟ × (٥ س − ١)

(و) ٣ س + ٢١ س^{٢} = ٣ س × (؟)

(ز) ٢ ص^{٢} + ٨ ص = ٢ ص × (؟)

(ح) ١٣ س + ٥٢ س^{٢} = ١٣ س × (؟)

(ط) ٨ س^{٢} − ١٢ س = ٤ س × (؟)

(ى) ٧ ص^{٢} − ٦٣ ص = ٧ ص × (؟)

(٢) حلل ما يأتى :

(ا) ٣ س + ٣ ص = ؟ (س + ص)

(ب) ٧ ا + ٧ ب =

(جـ) ٤ س + ٤ ص =

(د) ٣ جـ + ٩ ب =

(هـ) ٥ س + ١٥ ص =

(و) ٦ س − ٤٢ ص =

(ز) ٢٥ س + ٤٥ ص =

(ح) ٩ ا − ٧٢ ب =

(ط) ١٢ س + ٨٤ ص =

(ى) ٦ ب + ٢٤ جـ =

(٣) أوجد العامل المشترك فيما يلى :

(ا) س^{2} + ٣ س =

(ب) س^{3} − ٢ س^{2} =

(جـ) ٩ ب^{2} − ٣ ب^{3} =

(د) ٥ س ص − ٣٠ س =

(هـ) ٢٠ س ص + ٤ ص^{2} =

(و) ٣ س^{2} − ٢١ س =

(ز) ٦ س^{3} − ٤٨ س ص^{2} =

(ح) ٢٥ س^{2} + ٥ ص =

(ط) ٢٧ س − ٩ ص^{2} =

(ى) ١٦ س^{2} ص − ٢٤ س^{2} =

(٤) املأ الفراغات التالية بالعامل المشترك الصحيح :

(أ) س^{2} ص + ص^{2} س = ؟ × (ا + ب)

(ب) ٥ س ص − س = ؟ × (ص − ٦)

(جـ) ٩ ب^{2} حـ + ١٢ ب جـ^{2} = ؟ × (٣ ب + ٤ جـ)

(د) ٧ ا ب − ٤٢ ا^{2} ب = ؟ × (١ − ٦ ا)

(هـ) ٢ ا^{2} م + ٦ ا^{2} م^{2} = ؟ × (ا + ٣ م)

(٥) إملأ الأقواس الناقصة :

(ا) ا ب^{2} − ا^{2} ب = ا ب (   )

(ب) ٢ س^{2} ص ع + ٦ س ص ع = ٢ س ص ع (   )

(جـ) ٥ ا س^{2} ص − ١٠ ا^{2} س^{2} ص = ٥ ا س^{2} ص (   )

(د) ٥٠ س^{2} ص^{2} + ٢٥ س ص ع = ٢٥ س ص (   )

(هـ) ٣ س^{2} ص^{3} − ٩ س ص^{2} = ٣ س ص^{2} (   )

(٦) حلل ما يلى :

(ا) ٢ س^{3} + س ص

(ب) س ص^{2} − ٤ ص^{3}

(جـ) س^{2} ص^{3} − س^{3} ص^{2}

(د) س ص^{٢} ع^{٣} + س^{٣} ص^{٢} ع

(هـ) ٣ ا ب^{٢} − ٩ ا^{٢} ب

(و) ٧ ا ب جـ د + ٤٢ ب^{٢} د^{٢}

(ز) ٣ س^{٢} ص^{٢} ع^{٢} + ٨١ س ص^{٣} ع^{٢}

(ح) ٤ ا ب^{٢} جـ^{٣} − ١٢ ا^{٢} ب جـ^{٢}

(ط) ٩ س^{٣} ص^{٢} ع − ٣ س ص^{٢} ع^{٣}

(ى) ٥ ا س^{٣} ب^{٢} + ١٥ ا^{٢} س ب

الدرس السادس عشر

التماثـــل

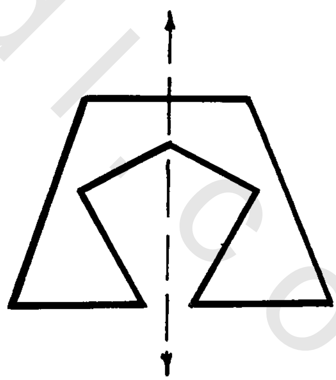
Symmetry

[١٦ ـ ١] مقدمــــة :

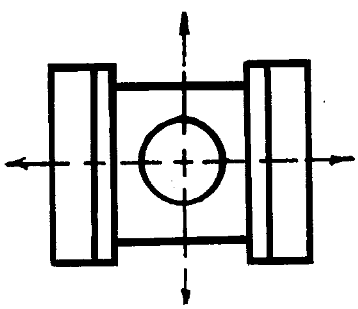
يوجد نوعان متميزان للتماثل ، موضوع دراستنا وهما التماثل الخطى والتماثل الدائرى .

[١٦ ـ ٢] التماثل الخطى *Line Symmetry* :

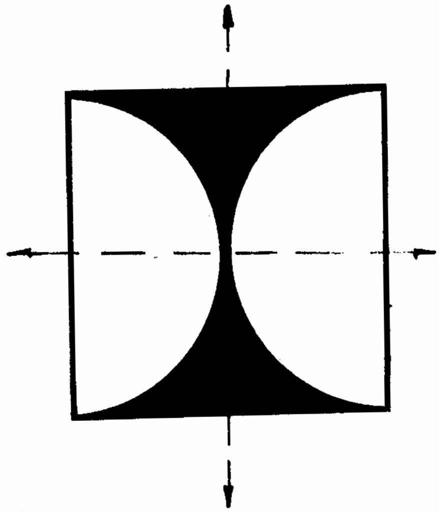
فى شكل (١٦ ـ١) ، إذا قمنا بقص الشكل وطويناه بطول الخط المنقط ، ستلاحظ أن نصفى الشكل ينطبقا على بعضهما تماماً .



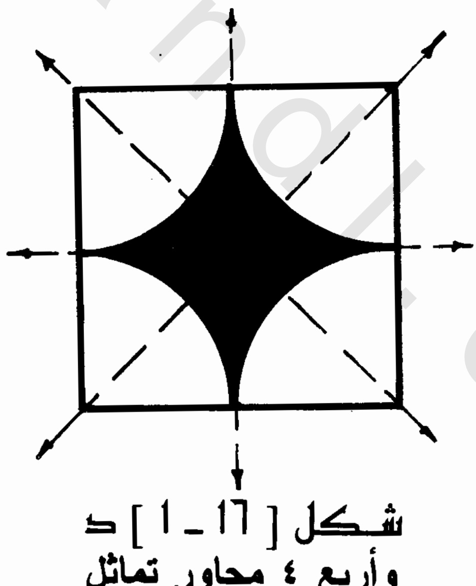
شكل [١٦ ـ ١] أ
محور تماثل واحد



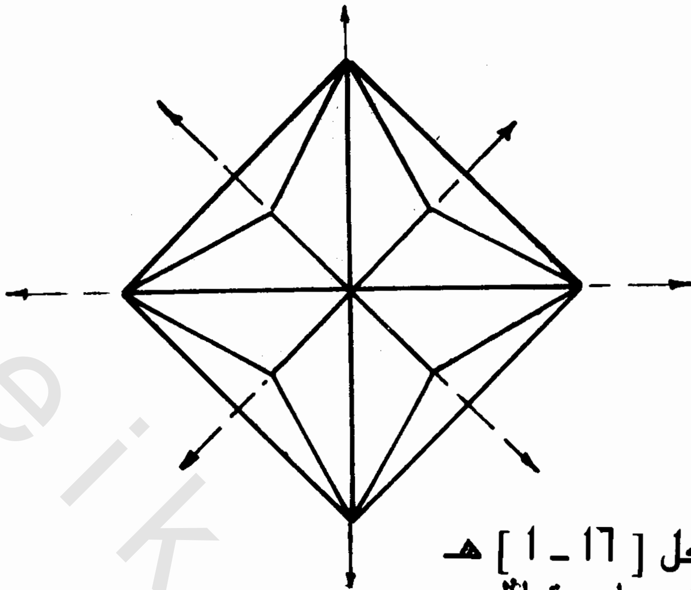
شكل [١٦ ـ ١] ب
ومحورى تماثل



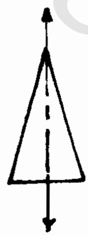
شكل [١٦ ـ ١] جـ
ومحورى تماثل

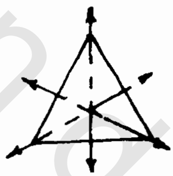


شكل [١٦ ـ ١] د
وأربع ٤ محاور تماثل



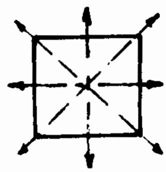
شكل [١٦ ـ ١] هـ
٤ محاور تماثل

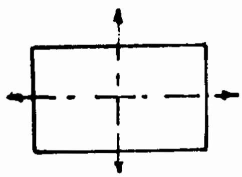




شكل [١٦ ـ ١] ز
٣ محاور تماثل

شكل [١٦ ـ ١] ح
محور تماثل واحد





شكل [١٦ ـ ١] ط
ومحوري تماثل

شكل [١٦ ـ ١] ك
٤ محاور تماثل

ويطلق على هذا الشكل بشكل متماثل ، أما الخط المنقط الذى انثنى بطوله الشكل ، فيسمى خط التماثل .

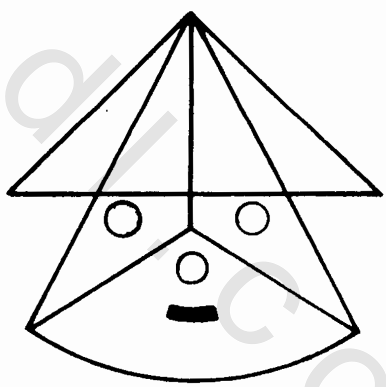
● محور التماثل :

هو خط طي وهمي بالشكل ، يؤدى إلى إنقسام الشكل إلى جزئين متطابقين بالتمام أو نصفين متماثلين .

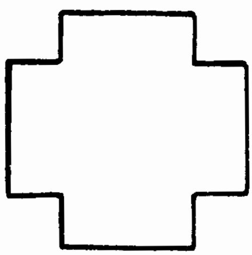
ويمكن اعتباره ، خط إنعكاس يمر بالشكل ، بحيث ينعكس فيه كل نصف من نصفى الشكل على النصف الآخر بالتمام .

[١٦ ـ ٣] تدريبات على التماثل الخطى :

(١) فى شكل (١٦ ـ ٢) ، مجموعة من الرسوم الهندسية ، عليك برسم خط التماثل لكل منها .

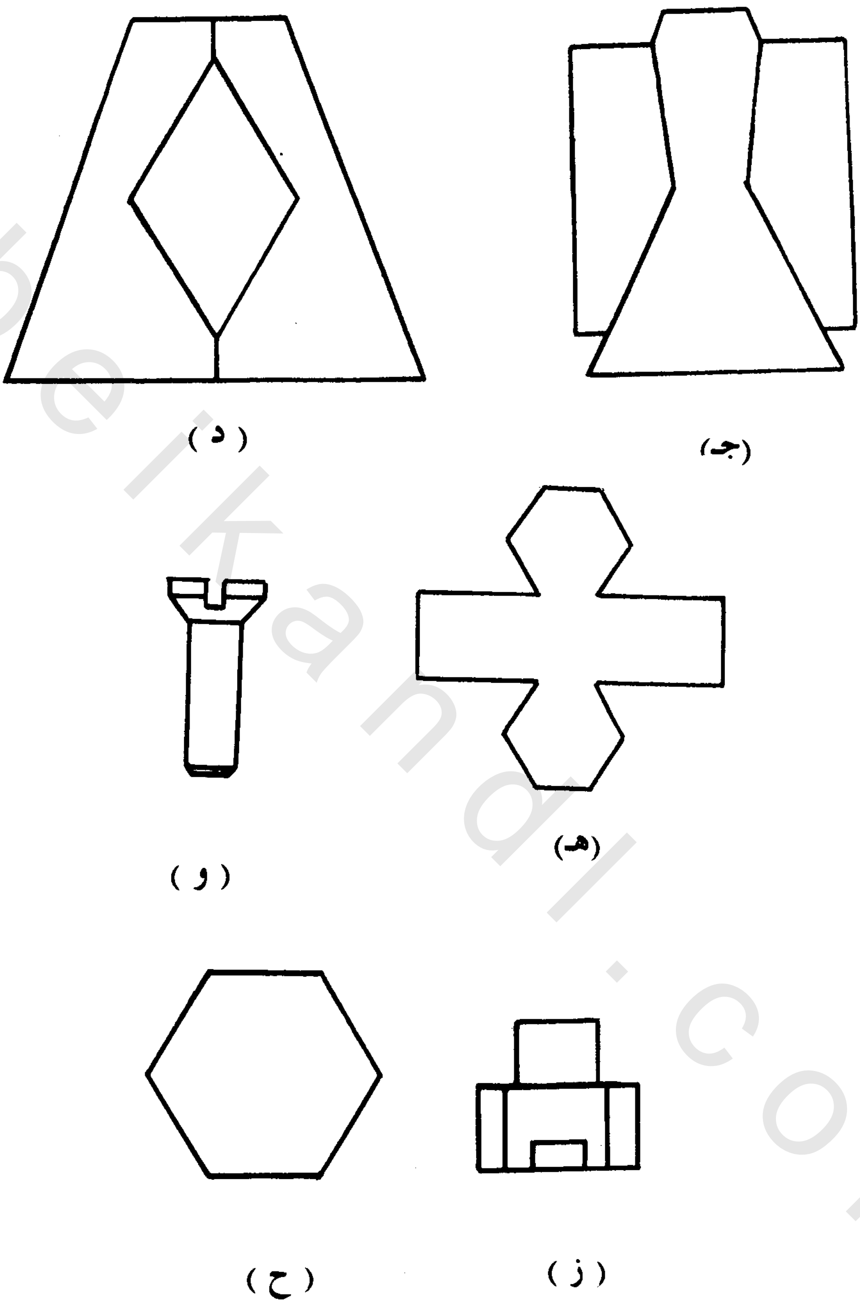


(أ)

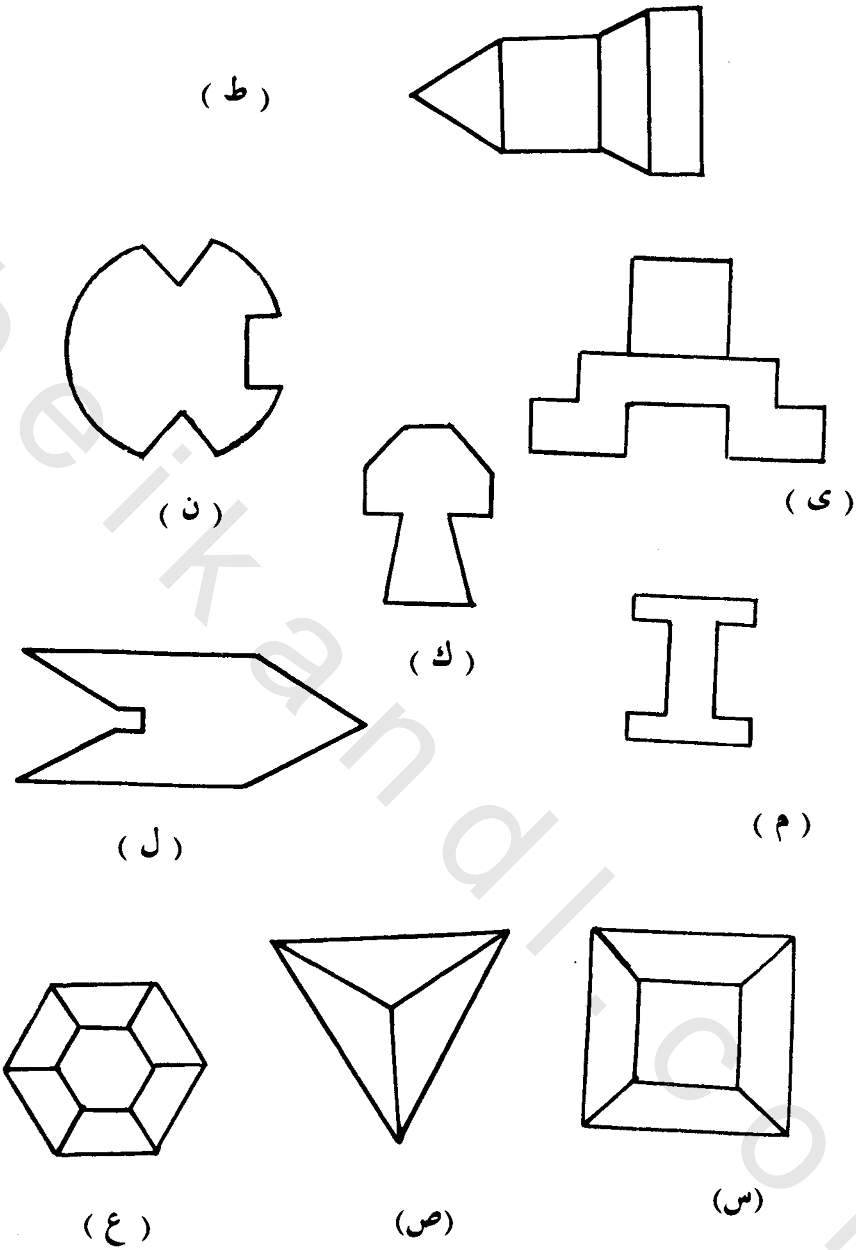


(ب)

شكل [١٦ ـ ٢]

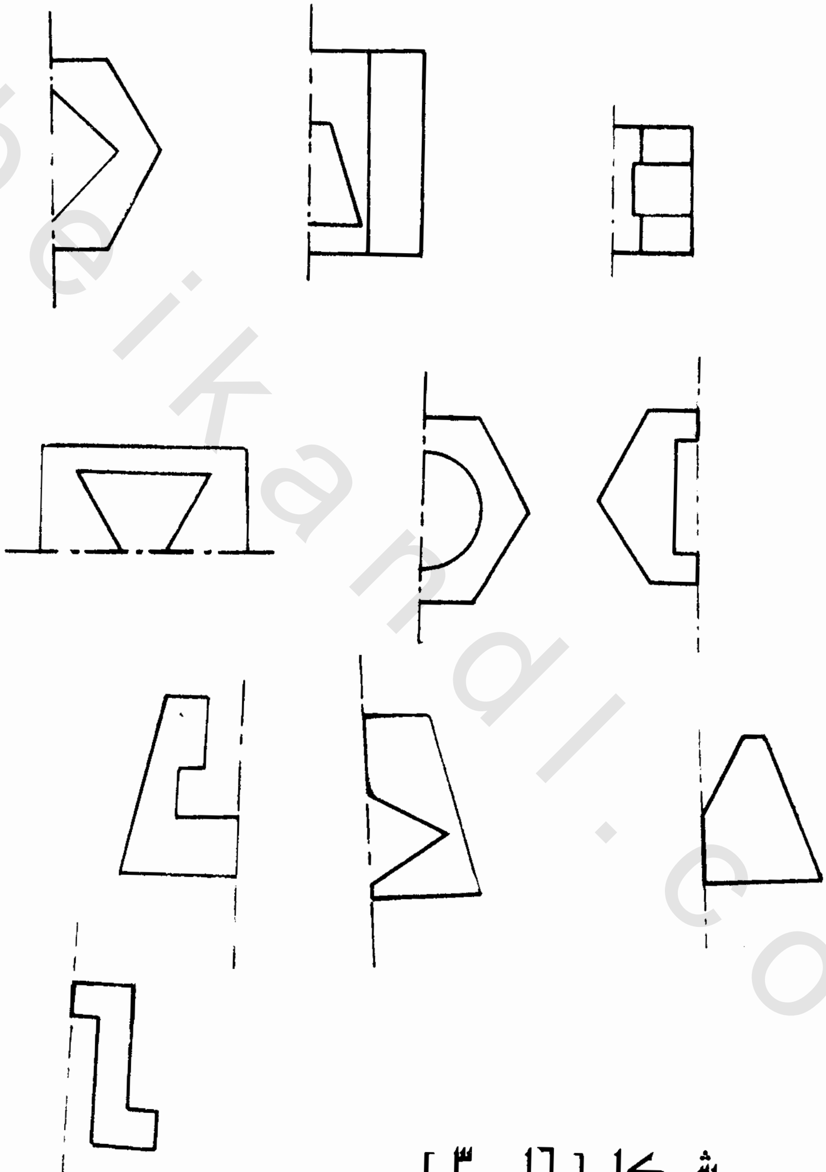


شكل [١٦ ـ ٢]



شكل [١٦ ـ ٢]

(٢) فى كل شكل من الأشكال الموضحة بشكل (١٦ ـ ٣) ، تم رسم نصف شكل وخط التماثل ، وعليك بإكمال كل رسم منها بحيث يكون متماثلاً حول خط التماثل :



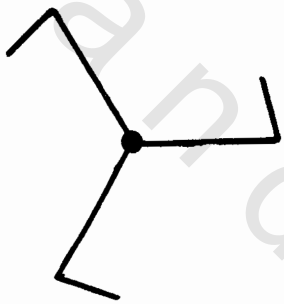
شكل [١٦ ـ ٣]

[١٦ ـ ٤] التماثل الدائرى Rotation al Symmetry :

انظر الرسم شكل (١٦ ـ ٤) ، نلاحظ منه عدم وجود خط تماثل للشكل ، إلا أننا لو قمنا بإدارة الشكل حول المركز بزاوية مقدارها

$$= \frac{٣٦٠}{٣} = \frac{\text{دورة كاملة}}{٣} = ١٢٠^{\circ}$$

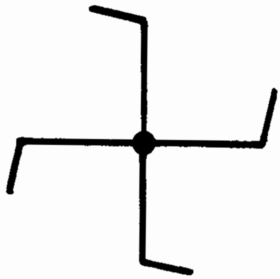
فإنه يبدو كما لو لم يتحرك الشكل أو بمعنى آخر بعد الدوران بمقدار ١٢٠° يصل الشكل إلى وضع البداية تماماً وفى مثل هذه الحالات ، نقول أن الشكل متماثل تماثل دائرى كما وأن مركز الشكل يعرف بمركز التماثل ، ويعرف هذا النوع من التماثل أحياناً بتماثل النقطة .



شكل [١٦ ـ ٤]

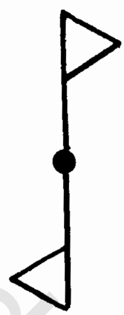
والأشكال (١٦-٥) ، (١٦-٦) ، (١٦-٧) ؛ (١٦-٨) ، (١٦ ـ ٩ ـ ا ، ب ، جـ) ذات تماثل دائرى .

فالشكل (١٦ ـ ٥) له تماثل دائرى وذلك لأنه لو دار بزاوية مقدارها ٩٠° حول مركزه لظهر كأنه لم يتحرك ،

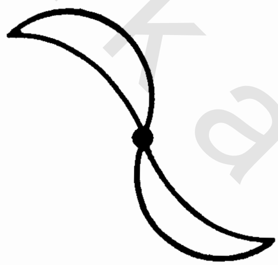


شكل [١٦ ـ ٥]

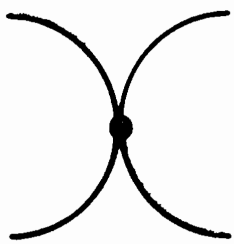
وبقية الأشكال لها تماثل دائرى وذلك لأنها لو دارت بزاوية ١٨٠° حول مركزها لبدت كأن لم تتحرك .



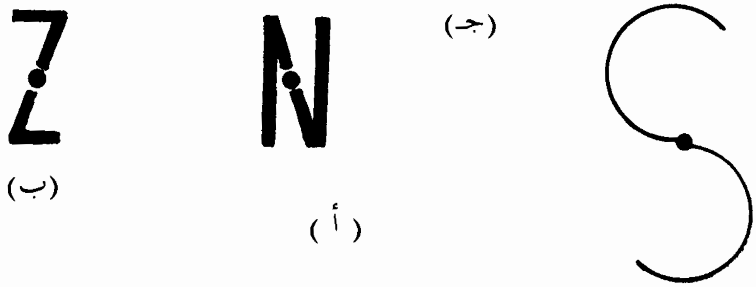
شكل [١٦ ـ ٦]



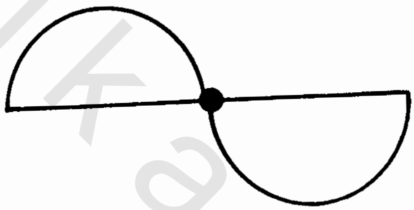
شكل [١٦ ـ ٧]



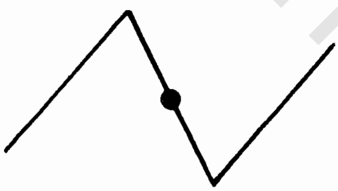
شكل [١٦ ـ ٨]



شكل [١٦ - ٩] أ ، ب ، جـ



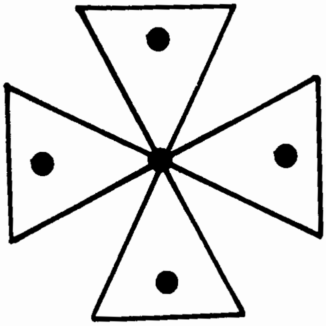
شكل [١٦ - ١٠]



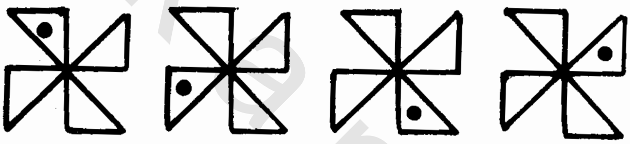
شكل [١٦ - ١١]

وشكل (١٦ ــ ١٢) يمثل مروحة لها تماثل دائرى بحيث لو دارت بزاوية ٩٠° بدت كما لو لم تتحرك .

، نفس الشىء للطاحونة الموضحة فى شكل (١٦ ــ ١٣) .



شكل [١٦ - ١٢]
المروحة



الطاحونة

شكل [١٦ - ١٣]

[١٦ ـ ٥] درجة التماثل ***Order of Symmetry*** :

إذا نظرنا إلى شكل (١٦ ـ ١ ط) ، نجد أن المستطيل الموضح له خطى تماثل ، ولذلك يطلق على المستطيل بأن له تماثل من الدرجة الثانية .

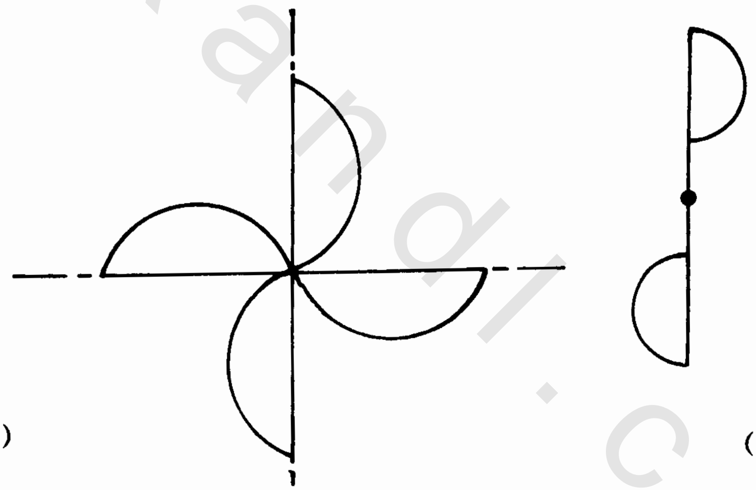
بينما فى حالة المربع الموضح فى شكل (١٦ ـ ١ ـ ى) ، نجد أن له

٤ محاور تماثل ، ولذلك يطلق على المربع بأنه له تماثل من الدرجة الرابعة وفى الأشكال (١٦ ـ ١٢) ، (١٦ ـ ١٣) ، فإن لها تماثل من الدرجة الرابعة ، لأنه بدورانها ٩٠° حول مركز التماثل فإن الشكل يبدو كما لو لم يتحرك .

والأشكال التى تدور ١٨٠° وتبقى كما لو كانت لم تتحرك يكون لها تماثل من الدرجة الثانية .

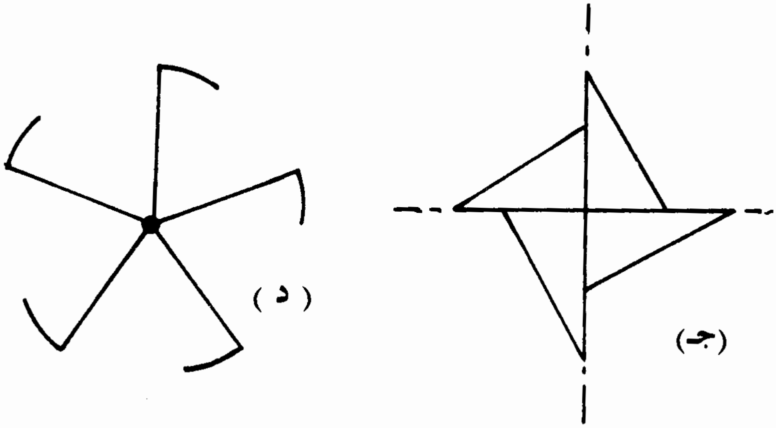
[١٦ ـ ٦] تدريبات على درجات التماثل :

(١) حدد درجة التماثل للأشكال الموضحة فى شكل (١٦ ـ ١٤) .



(ب) (أ)

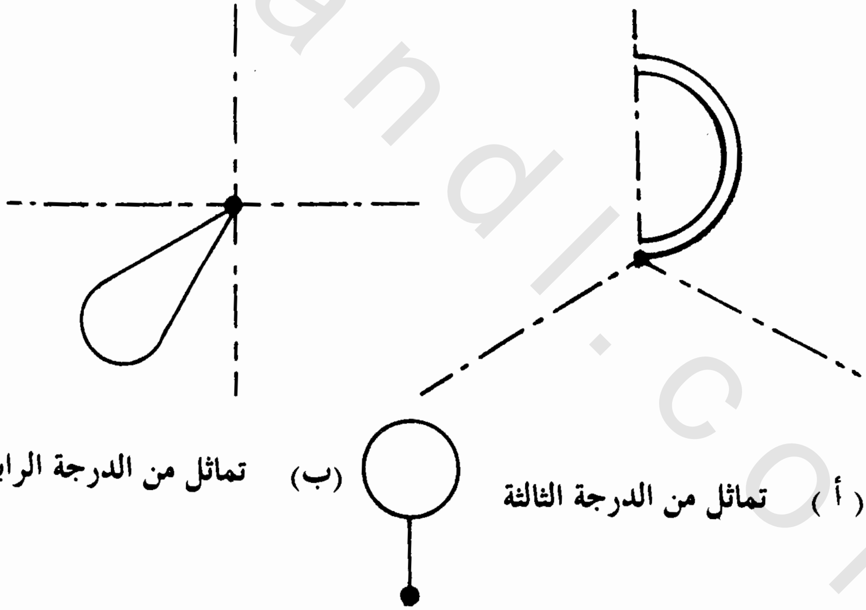
شكل [١٦ ـ ١٤]



(د) (جـ)

شكل [١٦ ـ ١٤] أ ، ب ، جـ د

(٢) فى شكل (١٦ ـ ١٥) مجموعة رسومات ذات محور تماثل دورانى من الدرجة المحددة بأسفل كل رسم ومحدد على الرسم مركز دوران الشكل ، أكمل الرسوم .



(أ) تماثل من الدرجة الثالثة

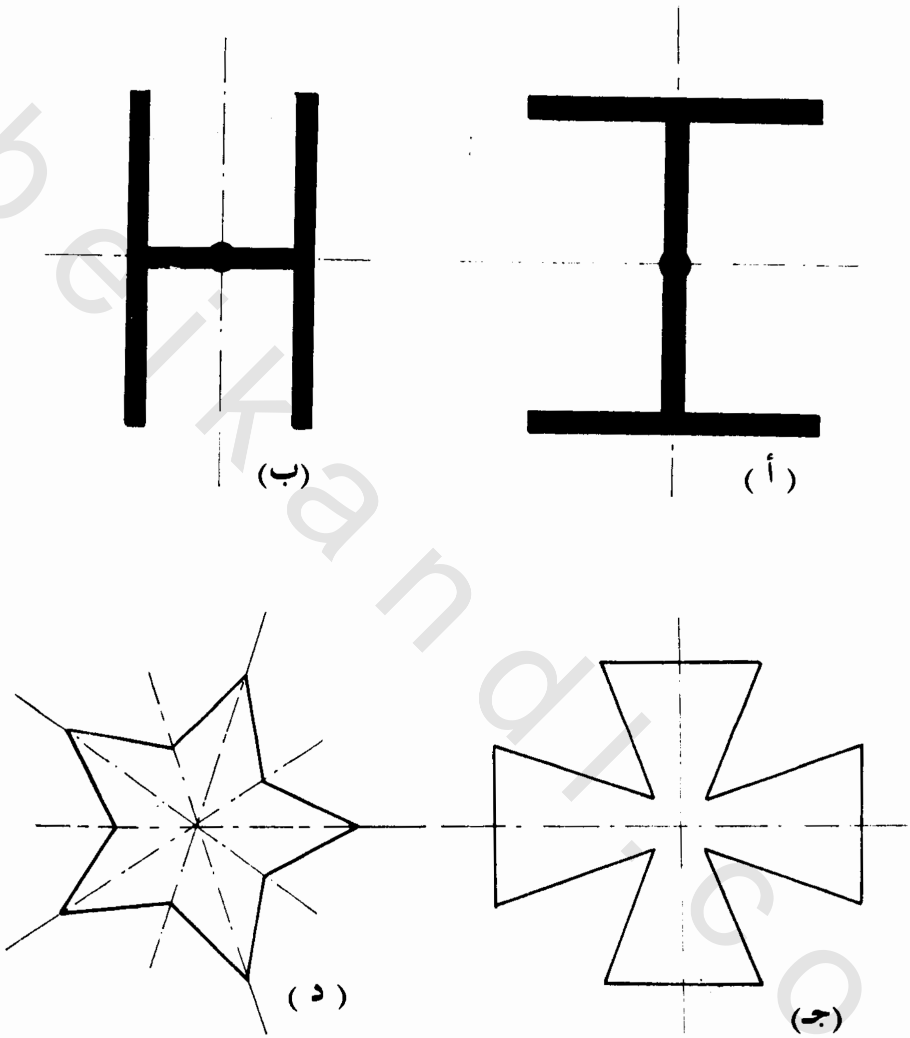
(ب) تماثل من الدرجة الرابعة

(جـ) تماثل من الدرجة الثانية

شكل [١٦ ـ ١٥] أ ، ب ، جـ

[١٦ ـ ٧] أشكال ذات تماثل خطى ودورانى :

هنالك بعض الأشكال لها تماثل خطى وتماثل دورانى فى آن واحد وشكل (١٦ ـ ١٦) ، يوضح بعض الأمثلة لهذه الأشكال :



شكل [١٦ ـ ١٦] أ ، ب ، جـ ، د

الدرس السابع عشر

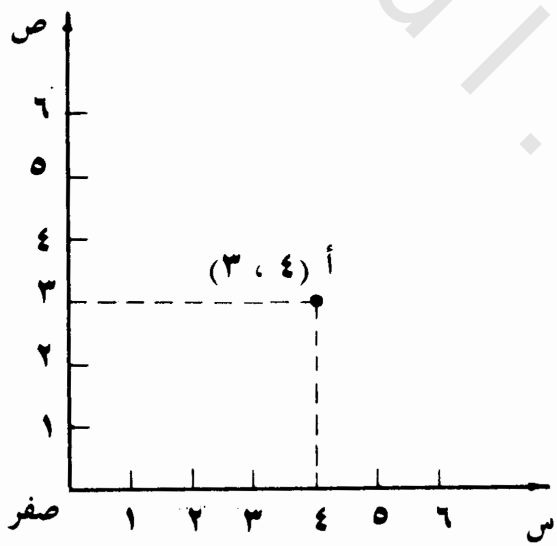
الإحداثيــات

Co – ordinates

[١٧ ـ ١] تعريـف :

لتمثيل أى نقطة قد ترمز إلى شيء ما فمثلاً نقطة على خريطة فهى قد تعنى مدينة أو موقع عسكرى أو ما شابه أو قد ترمز هذه النقطة إلى رأس مربع أو مركز دائرة أو نقطة تلاقى مستقيمين (أو شارعين مثلاً) ،

فإن النقطة يمكن تمثيلها أو بمعنى أدق تحديدها فى المستوى عن طريق استخدام مستقيمين متقاطعين ومتعامدين ، وتكون نقطة تقاطعهما [نقطة الأصل] ، هى نقطة القياس أو بداية القياس أو الأصل فى قياس إحداثيات أو موقع أى نقطة على المستوى ، كما يتضح من شكل [١٧ ـ ١] .



شكل [١٧ ـ ١]

حيث يُطلق على الخط الأفقى الممتد من اليسار لليمين بالمحور السينى بينما يطلق على الخط الرأسى الممتد من أسفل إلى أعلى بالمحور الصادى والنقطة ا المراد تمثيلها فى الشكل ، يُقال أن إحداثياتها هى [٤ ، ٣] حيث يرمز الرقم الأول « ٤ » إلى الإحداثى السينى للنقطة ا أو بمعنى آخر ، بعدها الأفقى عن نقطة الأصل [٠ ، ٠] بينما يرمز الرقم الثانى « ٣ » إلى الإحداثى الصادى للنقطة ا ، أو بمعنى آخر ، بُعدها الرأسى عن نقطة الأصل [٠ ، ٠] .

ويطلق على المجموعة [٤ ، ٣] بالإحداثيات الكرتيزية لنقطة ا [هنالك أنظمة إحداثيات كثيرة غير الكرتيزية ، خارج نطاق هذا الكتاب] .

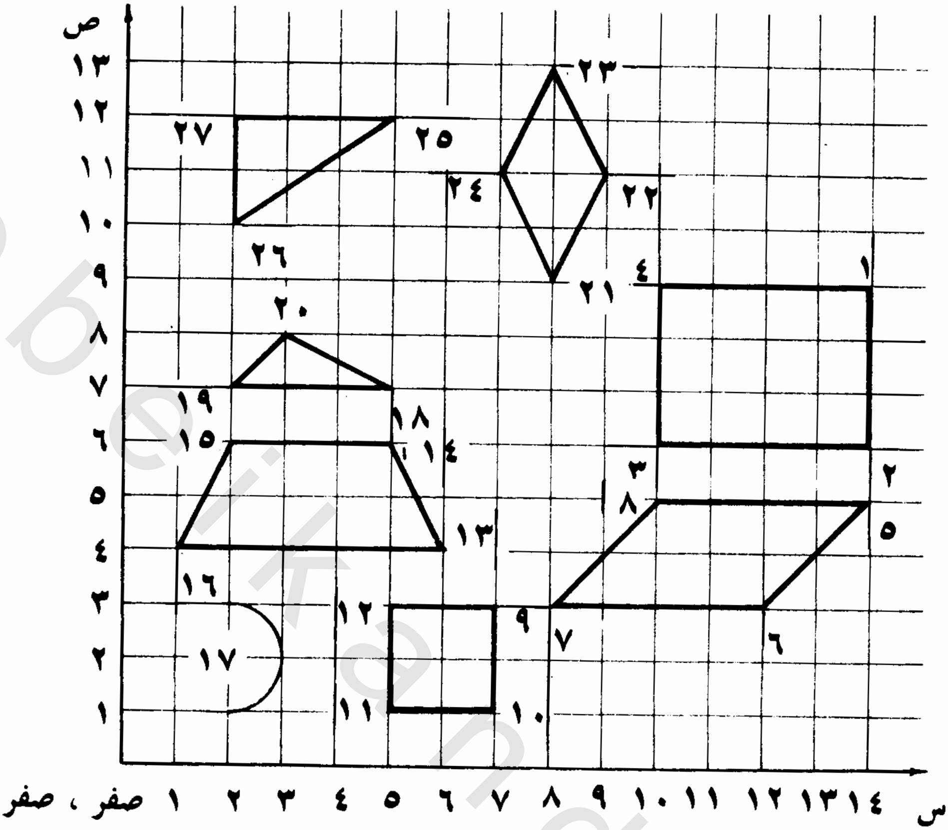
وعلى ذلك فإن إحداثيات أى نقطة تكون فى صورة زوج من الأرقام الرقم الأول رمز للبعد فى اتجاه محور السينات والآخر رمز للبعد فى إتجاه محور الصادارات ، أى فى الصورة [س ، ص] .

[١٧ ـ ٢] تدريبــات :

(١) فى شكل [١٧ ـ ٢] ، تظهر بعض الأشكال الهندسية ، قم بدراسة الشكل جيداً ثم أجب عن الأسئلة بعده ؛

كل زوج من أزواج الإحداثيات فيما يلى ، يحدد موضع أحد النقاط الموجودة على الرسومات المرقمة ، فاذكر الرقم الذى يعنيه كل زوج من الإحداثيات :

(ا) [٢ ، ٢]	(هـ) [١٠ ، ٥]
(ب) [٥ ، ٦]	(و) [١٤ ، ٥]
(جـ) [٨ ، ٩]	(ز) [١٤ ، ٩]
(د) [٧ ، ٣]	(ح) [٨ ، ١٣]



شكل [١٧ ـ ٢]

(٢) عين الإحداثيين الكرتيزيين لكل نقطة من النقاط التالية على الرسم السابق :

(١) النقطة رقم (٧)　　　　(٤) النقطة رقم (١٢)

(٢) النقطة رقم (٢٠)　　　(٥) النقطة رقم (٦)
(٣) النقطة رقم (٤)　　　(٦) النقطة رقم (٢٧) .

(٣) هات إحداثيات النقط الآتى وصفها من على الرسم السابق :

(أ) نقطة تقع شرق النقطة (١٣) تماماً وتبعد عنها بمقدار (٢) وحدة .

(ب) نقطة تقع جنوب النقطة (٢١) تماماً وتبعد عنها بمقدار (٧) وحدات .

(جـ) نقطة تقع شمال النقطة (١) وتبعد عنها بمقدار (٤) وحدات .

(د) نقطة تقع غرب النقطة (٨) وتبعد عنها بمقدار (٧) وحدات .

(٤) باستعمال مقياس رسم (١ سم لكل وحدة) ، ارسم محورى الإحداثيات س ، ص مع تدريج محور السينات من صفر إلى ١٧ ، ومحور الصادرات من صفر إلى ١٧ كذلك .

ثم حدد على الرسم مجموعة النقاط المشتمل عليها كل سؤال مما يلى مع توصيل كل مجموعة على حدة .

(ا) (١٣ ، ٧) ، (١١ ، ٩) ، (٧ ، ٥) ، (٩ ، ٣) .
(ب) (١٧ ، ١٠) ، (١٣ ، ١٢) ، (١١ ، ١١) ، (١٥ ، ٩) .
(جـ) (١٧ ، ١٥) ، (١٥ ، ١٦) ، (١٢ ، ١٥) ، (١٥ ، ١٤) .
(د) (٨ ، ٧) ، (٧ ، ٨) ، (٥ ، ٨) ، (٤ ، ٧) .
(هـ) (٦ ، ٠) ، (٤ ، ٣) ، (٢ ، ٠) .
(و) (٤ ، ١١) ، (٣ ، ١٣) ، (١ ، ١٣) ، (٠ ، ١١) ، (١ ، ٩) ، (٣ ، ٩)

(ز) (٩ ، ١٥) ، (٩ ، ١٦) ، (٨ ، ١٧) ، (٧ ، ١٧) ، (٦ ، ١٦) ، (٦ ، ١٥) ، (٧ ، ١٤) ، (٨ ، ١٤) .

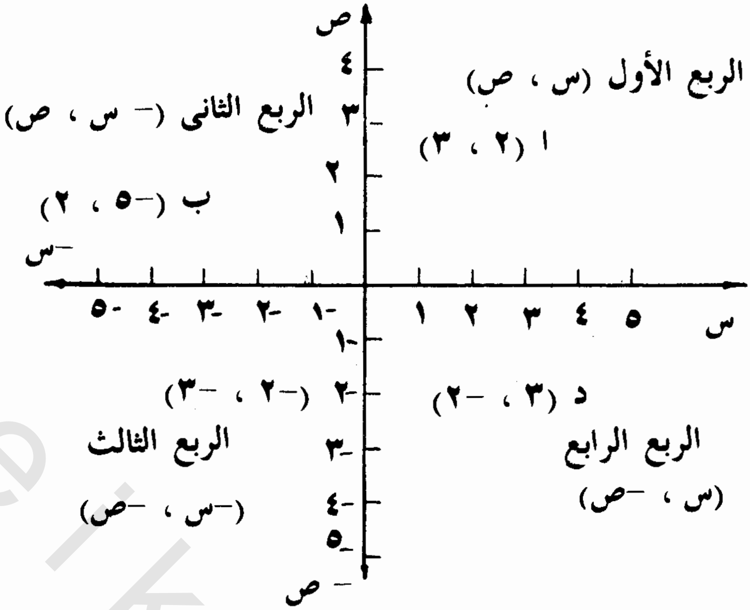
(ح) (١٧، ٢) ، (١٧ ، ٥) ، (١٤ ، ٥) ، (١١ ، ٢) .

(ط) (٥ ، ٥) ، (٢ ، ٨) ، (٠ ، ٦) .

(م) (٩ ، ١١) ، (٧ ، ١٣) ، (٥ ، ١١) ، (٦ ، ٩) ، (٨ ، ٩) .

[١٧ ـ ٣] الإحداثيـات السـالبة :

باستخدام الأعداد السالبة فإنه يمكننا أن نمد كل من محور السينات إلى اليسار من النقطة (صفر ، صفر) وأن نمد كذلك محور الصادات إلى أسفل ، وبإعطاء قيماً سالبة للأرقام كما هو موضح بشكل [١٧ ـ ٣] ، ويلاحظ أن الشكل أصبح ينقسم إلى أربعة أجزاء أو أرباع كما هو مبين بالشكل .

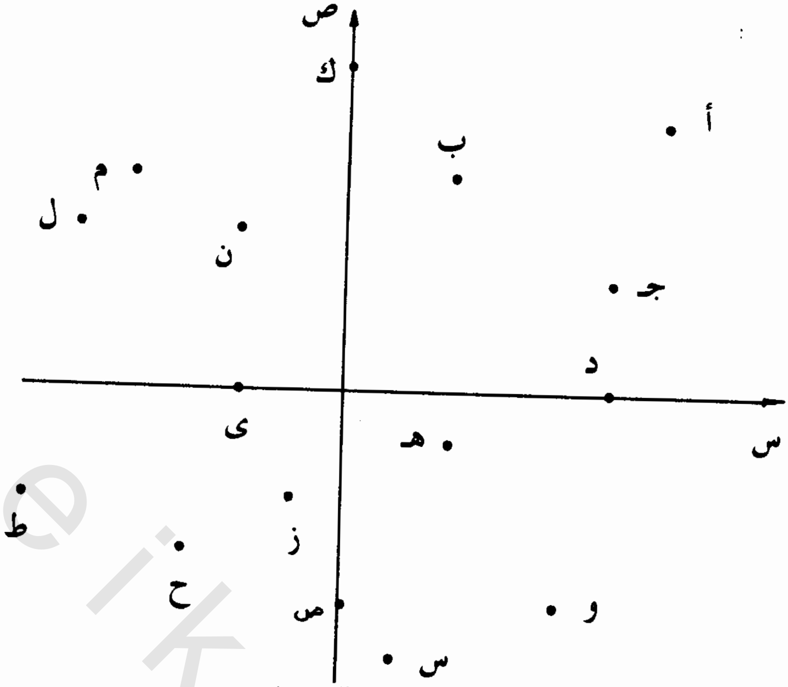


شكل [١٧ ـ ٣]

وبذلك فإنه يمكننا تحديد مجموعة من النقاط على المحاور بشكل (١٧ ـــ ٣) فمثلاً النقطة « ا » (٢ ، ٣) تقع فى الربع الأول من الشكل والنقطة « ب » (–٥ ، ٢) تقع فى الربع الثانى والنقطة « جـ » (–٢ ، –٣) تقع فى الربع الثالث والنقطة « د » (٣ ، –٢) تقع فى الربع الرابع .

[١٧ ـ ٤] تدريبــات :

(١) اكتب إحداثيات كل نقطة من النقاط الموجودة بالشكل (١٧ ـ ٤) .



شكل [١٧ ـ ٤]

(٢) ارسم محورى الإحداثيات س ، ص ودرج كل منهما من (−٧) إلى (+٧) على كلا المحورين ، ثم مثل بيانياً النقط الآتية :

[ا] (١ ، −١) ، [ب] (٢، −١) ، [حـ] (٢، −٤) ، [د] (٠ ، −٤) ،
[هـ] (٠ ، −٢) ، [و] (−١ ، −٢) ، [ز] (−١ ، −٤) ، [ح]
(−٣ ، −٤) ، [ط] (−٣ ، −١) [ى] (−٢ ، −١) ، [ل]
(−٢ ، ٢) ، [م] (−١ ، ٤) ، [ن] (−١ ، ٥) ، [س] (٠ ، ٥) ، [ك]
(٠ ، ٤) ، ف (١ ، ٢) ثم صل فيما بين النقطتين ا ، ف

(٣) فى كل سؤال مما يلى مثل بيانياً كلا النقطتين ا ، ب ثم صل المستقيم ا ب وأوجد طوله بالقياس :

[ا] ا (٢ ، ٢) ، ب (٤ ، ١)

[ب] ا (٠ ، ٠) ، ب (−٤ ، ٤)

[جـ] ا (٤ ، ٣) ، ب (٢ ، ٣)

[د] ا (٠ ، ٦) ، ب (−٦ ، ٠)

[هـ] ا (٢ ، −٢) ، ب (−٢ ، −٢)

[و] ا (٥ ، ٠) ، ب (٠ ، −٥)

(٤) فيما يلى تمثل كل ثلاث نقط معطاه معاً ، ثلاثة أركان من أركان مربع فأوجد إحداثيات الركن الرابع فى كل سؤال :

[ا] ا (٥ ، ٤) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٢)

[ب] ا (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، −٤) ، جـ = (−٤ ، −٤)

[جـ] ا (٣ ، ١) ، ب (٦ ، ١) ، جـ = (٦ ، −٢)

[د] ا (٢ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ = (− ٢ ، ٠)