الجـزء الثـانى

الـقـيـــاس

MEASURE

obeikandl.com

الدرس الخامس

الحجوم
Volumes

[٥ ـ ١] تعريف :

يُعرف حجم الجسم أو الشكل بكمية الفراغ التى يشغلها ويقاس بوحدات الأطوال المكعبة [مم^{٣} ، سم^{٣} ، لتر ، م^{٣} ، بوصة^{٣} ، قدم^{٣} ،...]

[٥ ـ ٢] وحدات الحجوم :

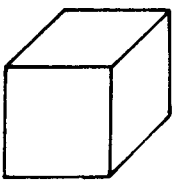
(أ) فى النظام المترى :

نعتبر مكعب كالمبين فى شكل (٥ ـ ١) طول ضعله ١٠ مم فيكون حجمه هو مساحة أى وجه من أوجهه مضروباً فى طول ضلعه .

∴ ح = (١٠ × ١٠) × ١٠ = ١٠٠٠ مم^{٣}

ولما كان كل ١ سم = ١٠ مم

∴ فالمكعب السابق = (١ سم × ١ سم) × ١ سم



١٠ مم

شكل [٥ ـ ١]

obeikandi.com

فيصبح حجمة = ١ سم^{٣}

ومما سبق يتضح أن ١ سم^{٣} = ١٠٠٠ مم^{٣}

وبنفس الطريقة نجد أن كل ١ م^{٣} = م^{٣} .

١٠٠ × ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠٠٠ سم^{٣}

وخلاصة القول فإن الوحدات المستخدمة فى النظام المترى :

كل ١ م^{٣} = ١٠٠٠٠٠٠ سم^{٣} ، ١ م^{٣} = ١٠٠٠ لتر

، كل ١٠٠٠ سم^{٣} = ١ لتر ، ١ سم^{٣} = ١٠٠٠ مم^{٣}

وفى النظام الإنجليزى فإن وحدات الحجوم تكون :

تذكر أن ١ ياردة = ٣ قدم .

، ١ قدم = ١٢ بوصة .

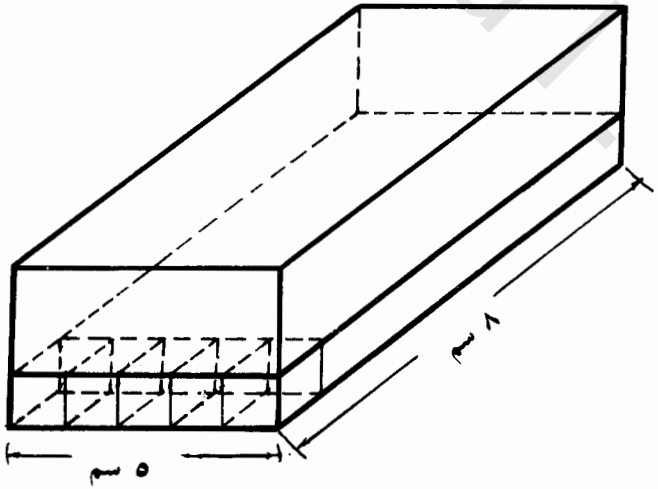
∴ ١ ياردة مكعبة = (٣ × ٣) × ٣ = ٢٧ قدم^{٣}

، ١ قدم مكعب = (١٢ × ١٢) × ١٢ = ١٧٢٨ بوصة^{٣}

[٥ ـ ٣] حجم متوازى السطوح :

Volume of a Cuboid (rectangular box):

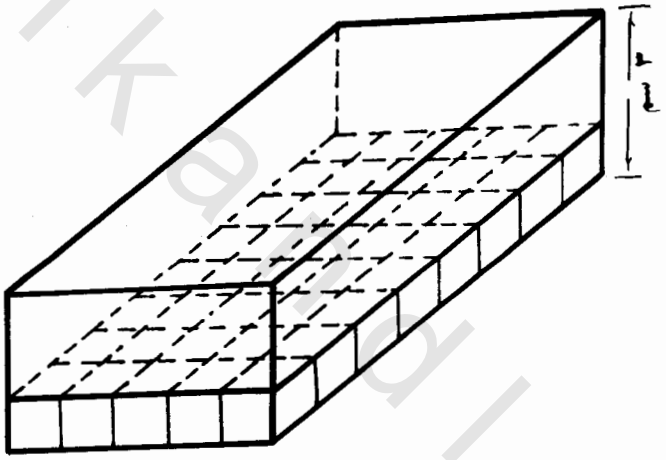
نعتبر متوازى السطوح فى شكل (٥ ـ ٢) على هيئة صندوق .



شكل [٥ ـ ٢]

، يمكن إيجاد حجم المتوازى (الصندوق) الموضح بوضع ٥ مكعبات كل مكعب حجمه ١ سم^{٣} فى إتجاه أحد أطوال القاعدة (الطول ٥) بحيث تكون صفا ؛

ثم نرص ٧ صفوف أخرى من المكعبات ذات الحجم ١ سم^{٣} ، موازية للصف الأول وبذلك يمكننا تغطية القاعدة ذات الأطوال ٨ سم × ٥ سم كما فى شكل (٥ ــ ٣) .



شكل [٥ ـ ٣]

ويبلغ عدد طبقة المكعبات التى تم رصها : ٨ × ٥ = ٤٠ مكعب

ولملء الصندوق فإنه يلزم إضافة عدد ٢ طبقة مكعبات كل طبقة بها ٤٠ مكعب توضع فوق بعضها .

obeikandl.com

وبذلك فإننا نحتاج إلى عدد من المكعبات لملء الصندوق يعادل :

٣ (طبقة) × ٤٠ (كل طبقة بها ٤٠ مكعب) = ١٢٠ مكعب .

، ∴ كل مكعب منها حجمه = ١ سم^{٣} .

∴ الحجم الكلى للصندوق = ١٢٠ سم^{٣} .

إلا أنه من الأسهل لحساب الحجم ، بدلاً من ملء الصندوق بمكعبات حجم كل منها = ١ سم^{٣} ، أن نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين :

□ ***الطريقة الأولى :***

الحجم = الطول × العرض × الإرتفاع

وبذلك فإن الحجم فى مثالنا هذا = ٨ × ٥ × ٣ = ١٢٠ سم^{٣}

□ ***الطريقة الثانية :***

الحجم = مساحة أحد الأوجه × الإرتفاع العمودى على هذا الوجه .

وبذلك فإن الحجم فى مثالنا هذا يمكن حسابه كالتالى :

(أ) الحجم = (٣ × ٥) × ٨ = ١٢٠ سم^{٣} .

أ، (ب) الحجم = (٨ × ٥) × ٣ = ١٢٠ سم^{٣} .

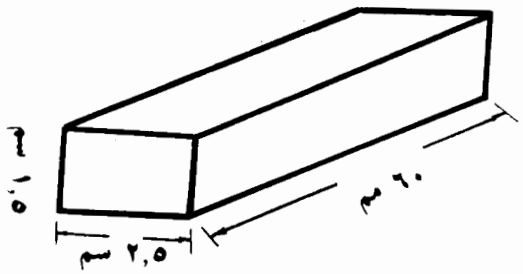
أ، (جـ) الحجم = (٨ × ٣) × ٥ = ١٢٠ سم^{٣}

∴ ويجب التأكد فى جميع مسائل الحجوم من أن الوحدات من نفس النوع وإذا اقتضى الأمر وكان هنالك اختلاف فإنه يجب توحيد نوع الوحدات أى تكون كلها مم أو كلها سم أو كلها م أو كلها بوصة أو كلها قدم أو كلها ياردة ،... وهكذا .

◄ مثـال :

أوجد حجم متوازى السطوح المبين فى الشكل (٥ ــ ٤) .

obeikandl.com



شكل [٨ - ٤]

◄ **الحـــل :**

هنا وحدات الأطوال مختلفة ، لذلك يلزم تحويلها كلها إلى السنتيمتر أو كلها إلى المليمتر .

٦٠ مم = ٦ سم

١٥ مم = ١,٥ سم

٢٥ مم = ٢,٥ سم

∴ فالأبعاد إما (٦٠ × ١٥ × ٢٥) مم

وإما (٦ × ١,٥ × ٢,٥) سم

∴ الحجم = (٦٠ × ١٥) × ٢٥ = ٢٢٥٠٠ مم^{٣}

أ، الحجم = (٦٠ × ٢٥) × ١٥ = ٢٢٥٠٠ مم^{٣}

أ، الحجم = (١٥ × ٢٥) × ٦٠ = ٢٢٥٠٠ مم^{٣}

أ، الحجم = (٦ × ١,٥) × ٢,٥ = ٢٢,٥ سم^{٣}

أ، الحجم = (٦ × ٢,٥) × ١,٥ = ٢٢,٥ سم^{٣}

أ، الحجم = (١,٥ × ٢,٥) × ٦ = ٢٢,٥ سم^{٣}

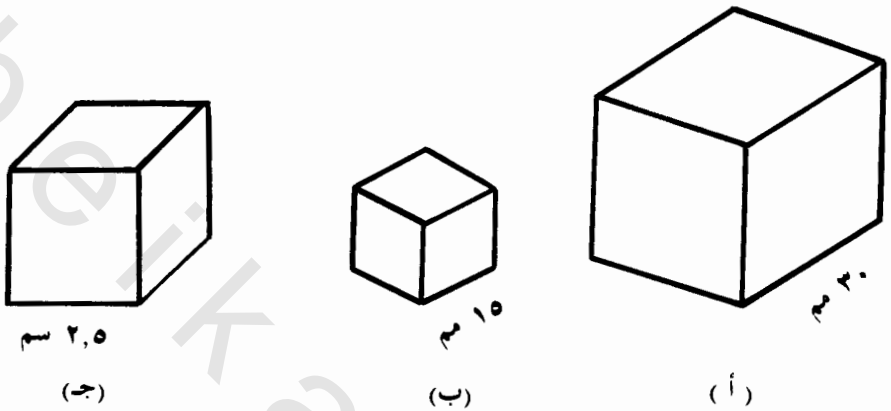
، ∴ كل ١ سم^{٣} = ١٠٠٠ مم^{٣}

لذلك فإن ٢٢,٥ سم^{٣} = ٢٢٥٠٠ مم^{٣} وهى تعنى نفس الحجم

obeikandi.com

[٥ ـ ٤] تدريبات : على المكعبات ومتوازيات السطوح :

(١) احسب حجم المكعبات التالية المبينة فى شكل (٥ ــ ٥) .



شكل [٥ ـ ٥] أ ، بـ ، جـ

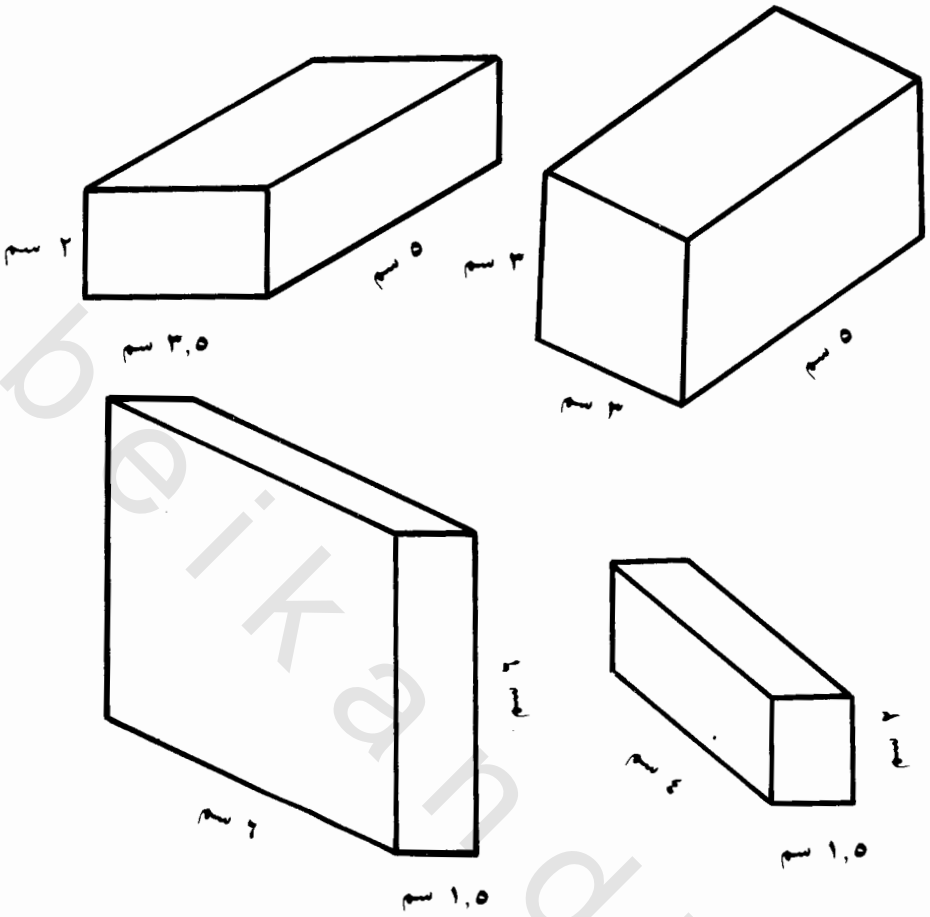
(٢) احسب حجم مكعب طول ضلعه ٨ سم .

(٣) احسب حجم مكعب طول ضلعه :

(أ) ٥ سم	(بالملليمتر المكعب)
(ب) ١٠٢ مم	(بالسم المكعب)
(جـ) ٨ بوصة	(بالقدم المكعب)
(د) ٠,٣ م	(بالسنتيمتر المكعب)

(٤) احسب حجم متوازيات السطوح المبينة فى شكل (٥ ــ ٦) .

obeikandl.com



شكل [٨ ـ ٦]

(٥) احسب حجم متوازيات السطوح التالية :

(أ) الطول ١٢٠ مم ، العرض ٦٠ مم والارتفاع ١,٥ سم .

(ب) الطول ١٠ سم ، والعرض ٥ سم والارتفاع ٢٣ مم .

(جـ) الطول ١٦ سم ، والعرض ٨٠ مم والارتفاع ٣٧ مم .

(٦) صندوق حجمه ١٥٠٠٠ سم^{٣} طوله ٤٠ سم وعرضه ٢٠٠ مم فما مقدار ارتفاعه .

(٧) دولاب حائط عرضه ٥٠٠ مم وارتفاعه ٢ متر وحجمه ٣ م^{٣} فاحسب مقدار طوله بالسنتيمتر .

obeikandl.com

(٨) أكمل الجدول الآتى ، جدول (٥ ـ ١) :

الطول	العرض	الارتفاع	الحجم
٧ سم	٣ سم	٢ سم	٤٢ سم^{٣}
٨٠ مم	٦٠ مم	٣ سم	....
٣ متر	١ متر	٥٥٠ مم	....
١,٧٥ متر	٨٠ سم	٤٠ سم	....
....	٥٠ سم	٣٠ سم	١٥ لتر
....	٩٠ سم	٧٠ سم	٢,٥٢ م^{٣}
٣ م	....	٥٠ سم	٣٠٠٠ لتر
١٥٠ مم	....	٣٠ مم	٢٢٥٠٠٠ مم^{٣}
٢ م	٠,٨ م	....	٨٠٠ لتر
٧٠ سم	٥٠ سم	....	٧٠٠٠٠ سم^{٣}

جـدول [٥ ــ ١]

[٥ ـ ٥] حجم المجسمات المصمتة ذات المقطع المنتظم :

Volumes of uniform cross – section solid shapes:

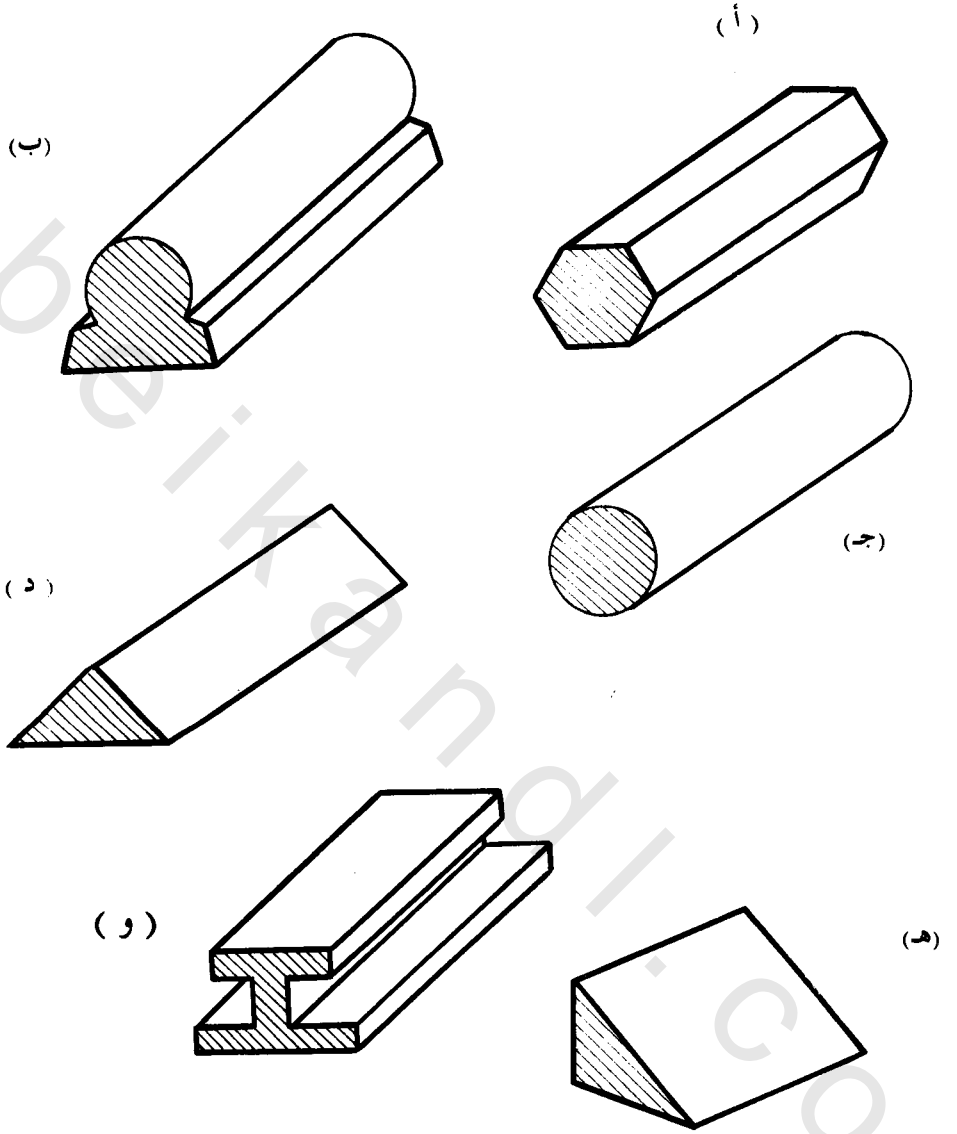
يُمكن إيجاد حجم أى مجسم مصمت ، منتظم المقطع ، أى لا يتغير شكله أو مساحة مقطعه على امتداد طوله ،

وذلك بحساب مساحة المقطع المنتظم وضربها فى طول الجسم وذلك بنفس فكرة حساب حجم متوازيات السطوح .

والمجسمات ذات المقطع المنتظم ، يُطلق عليها المناشير (جمع منشور) وهى على أشكال عديدة .

انظر شكل (٥ ــ ٧) .

obeikandl.com



شكل [٨ ـ ٧]

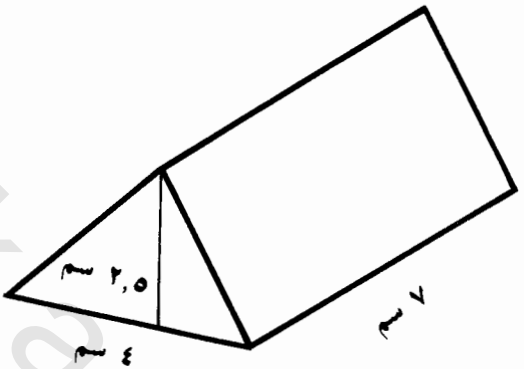
المناشير

وعلى ذلك فإن :

حجم المجسم المصمت ذو المقطع المنتظم = مساحة المقطع × طول المجسم .

مثـــال (١) :

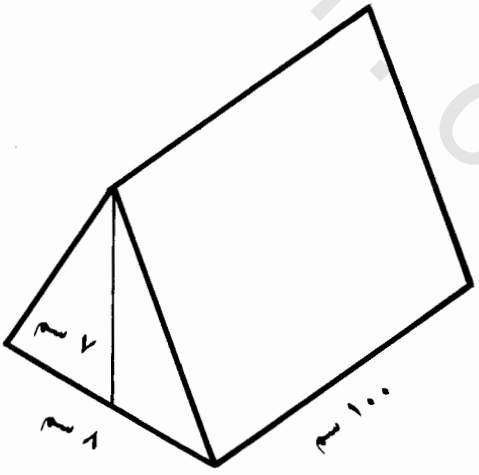
فى شكل (٥ ــ ٨) احسب حجم المجسم المصمت ذو مقطع على شكل مثلث أبعاده مبينة بالرسم .



شكل [٥ ـ ٨]

الحـل :

يتضح من شكل (٥ ــ ٩) ، الذى يوضح مقطع المجسم وهو على هيئة مثلث .



شكل [٥ ـ ٩]

obeikandl.com

مساحة مقطع « المثلث » : $\frac{1}{2}$ القاعدة × الإرتفاع .

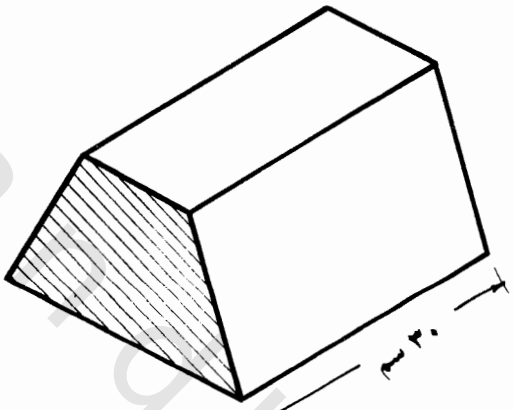
$= \frac{1}{2} \times ٨ \times ٧ = ٢٨$ سم^{٢} .

∴ حجم المنشور = مساحة المقطع × الطول .

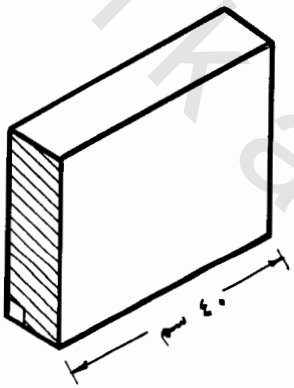
$= ٢٨ \times ١٠٠ = ٢٨٠٠$ سم^{٣} .

[٥ ـ ٦] تدريبات على حجوم المجسمات المنتظمة المقطع :

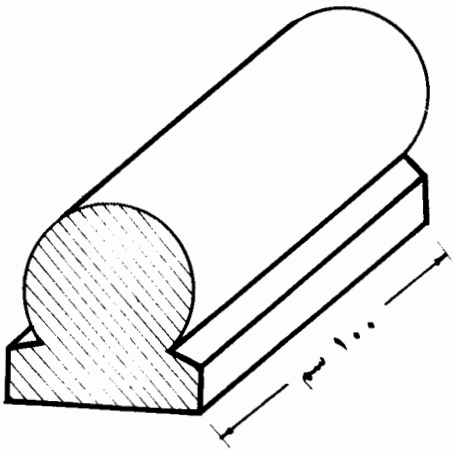
(١) احسب حجم المجسمات التالية ذات المقطع المنتظم والتى تظهر فى شكل (٥ ــ ١٠) (الرسوم ليست بمقياس حقيقى) .



(أ) المساحة المظللة ٢٥ سم^{٢}

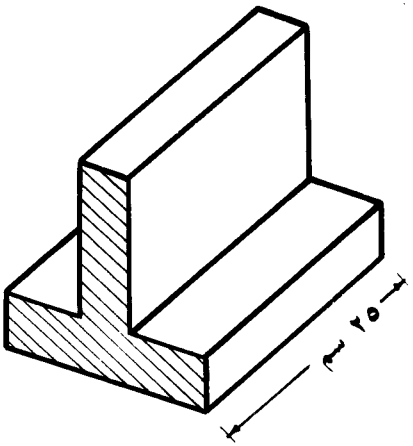


(ب) المساحة المظللة ٧ سم^{٢}

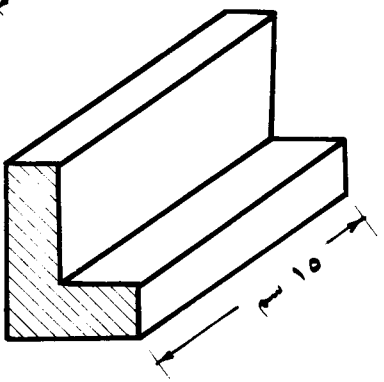


(جـ) المساحة المظللة ٢٠ سم^{٢} .

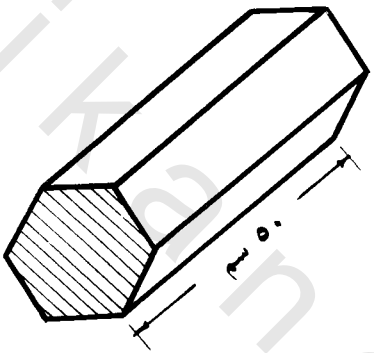
شكل [٥ ـ ١٠]



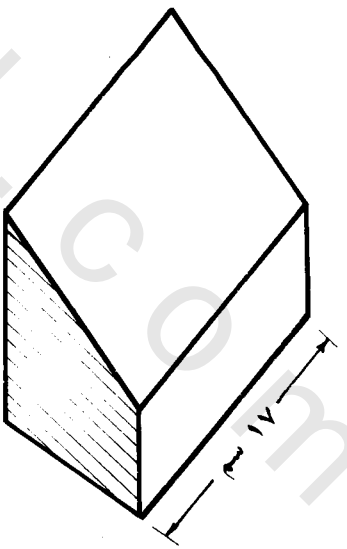
(د) المساحة المظللة ١٤ سم٢



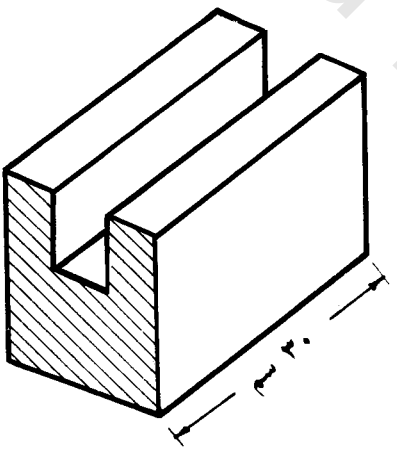
(هـ) المساحة المظللة ١٠ سم٢



(و) المساحة المظللة ١٢ سم٢



(ز) المساحة المظللة ٢٢ سم

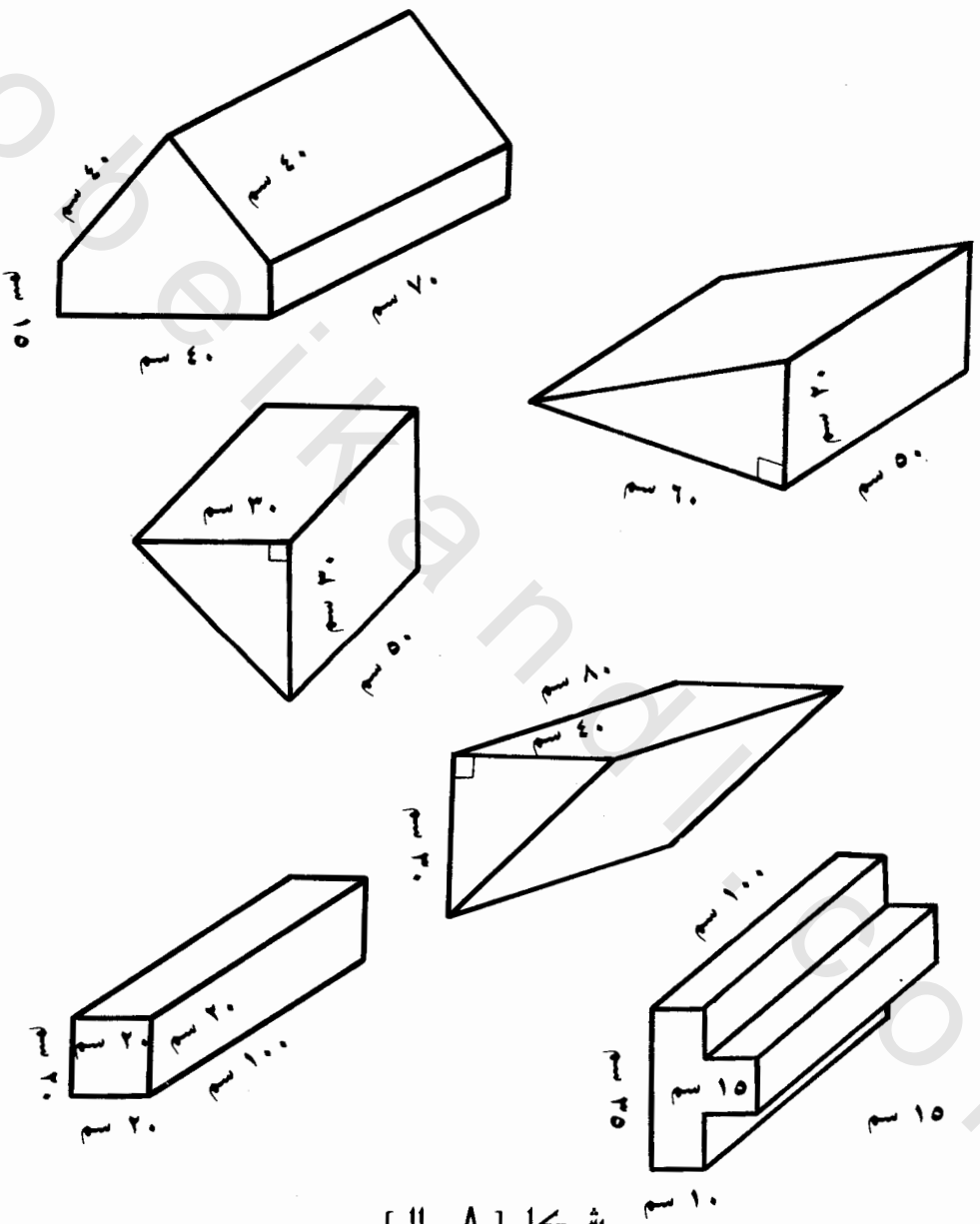


(ح) المساحة المظللة ٢٦ سم٢

تابع شكل [٨ ـ ١٠]

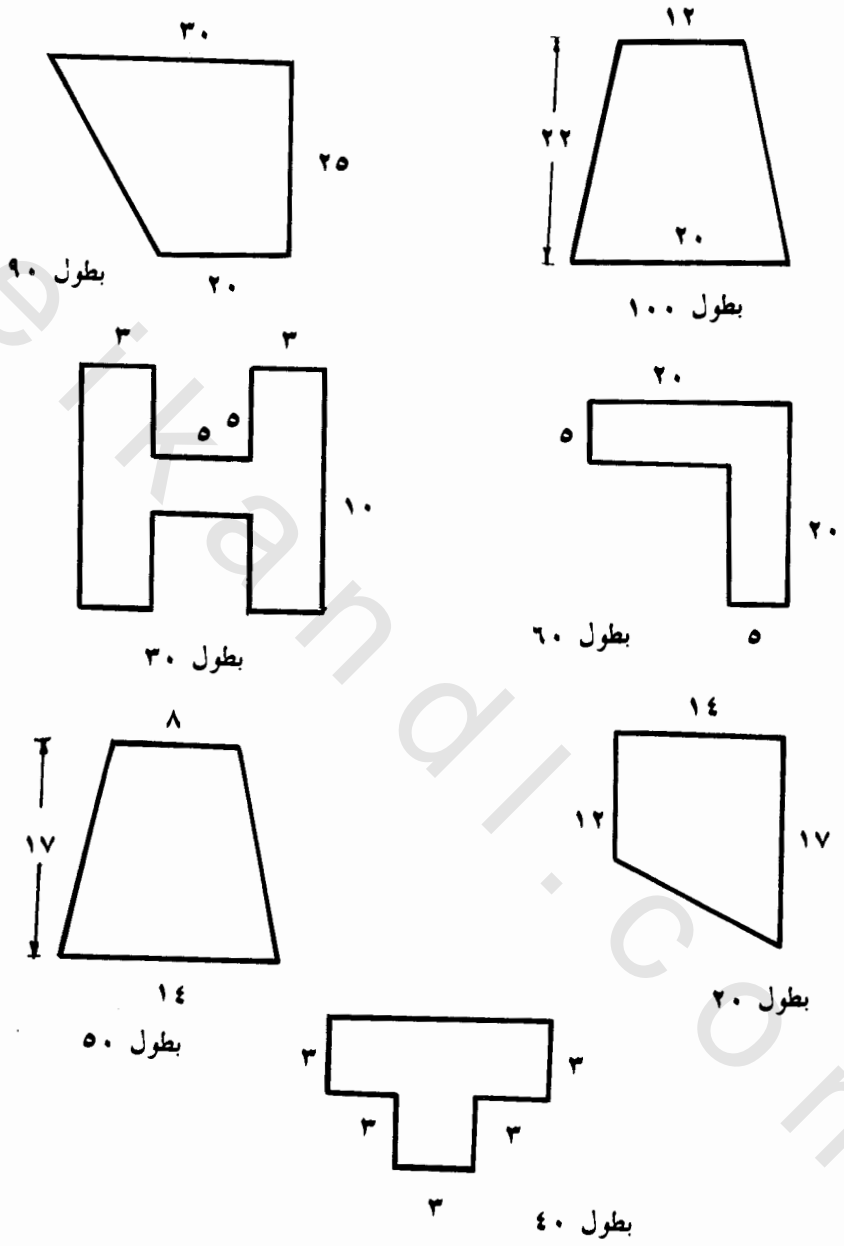
obeikandl.com

(٢) احسب حجم المنشورات التالية المبينة فى شكل (٥ ـ ١١) (الرسوم ليست بمقياس حقيقى) .



شكل [٥ ـ ١١]

(٣) أوجد حجم المنشورات التالية المبينة فى شكل (٥ ـ ١٢) والتى تظهر مقاطعها العرضية ، (الرسوم ليست بمقياس حقيقى) .



شكل [٥ ـ ١٢]

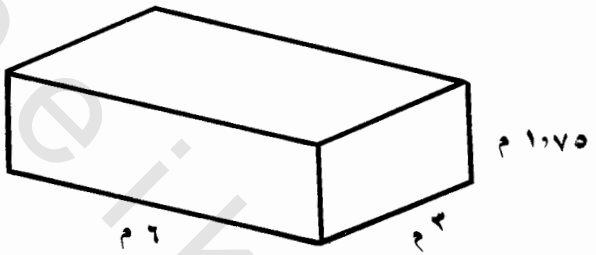
الأبعاد بالسنتيمتر

obeikandl.com

[٥ ـ ٧] حساب السعات Capacity Problems :

◄ مثـــال (١) :

أوجد سعة خزان مياه على شكل متوازى مستطيلات (جميع أوجهه عبارة عن مستطيلات) ، المبين فى شكل (٥ ـ ١٣) وذلك بالمتر ← المكعب وباللتر .



شكل [٥ ـ ١٣]

◄ الحـــل :

يستخدم لفظ السعة للتعبير عن حجوم السوائل ،

∴ سعة الخزان = مساحة المقطع × الطول .

= (٣ × ١,٧٥) × ٦

= ٥,٢٥ × ٦ = ٣١,٥٠٠ متر مكعب .

∴ ١ م^{٣} = ١٠٠٠ لتر .

∴ سعة الخزان باللتر = ٣١,٥٠٠ × ١٠٠٠ = ٣١٥٠٠ لتر .

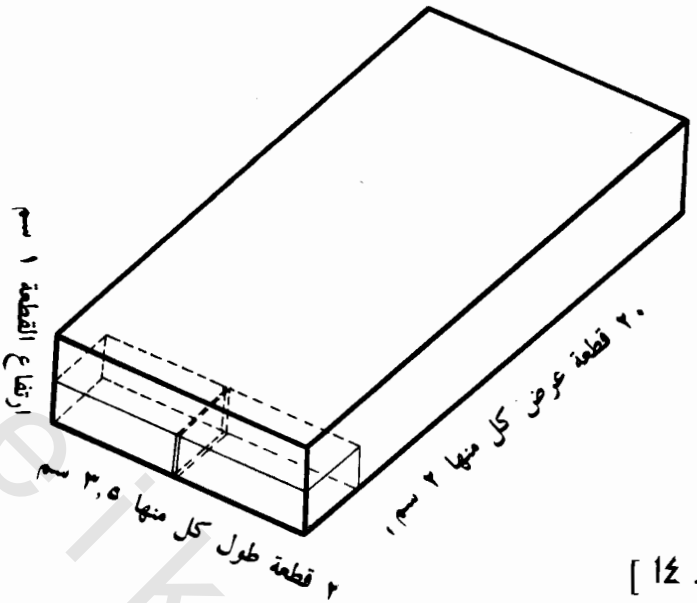
◄ مثـــال (٢) :

يراد رص ٨٠ قطعة شيكولاتة حجم كل منها ٧ سم^{٣} وأبعادها ٣,٥ سم × ٢ سم × ١ سم ، فى صندوق ، والمطلوب حساب سعة الصندوق وأبعاده .

◄ الحـــل :

انظر الرسم شكل (٥ ـ ١٤) .

obeikandl.com



شكل [٨ ـ ١٤]

∴ أبعاد هذا الصندوق : [٢ × ٣,٥] × [٢٠ × ٢] × ٢

(الحل الاول)

لحل هذه المسألة ، نضرب عدد قطع الشيكولاتة × حجم كل منها فنحصل على الحجم الكلى لقطع الشيكولاتة وهو يعادل حجم أو سعة الصندوق .

، حجم قطعة الشيكولاتة = ٣,٥ × ٢ × ١ = ٧ سم^{٣}

∴ حجم قطع الشيكولاتة كلها = ٨٠ × ٧ = ٥٦٠ سم^{٣}

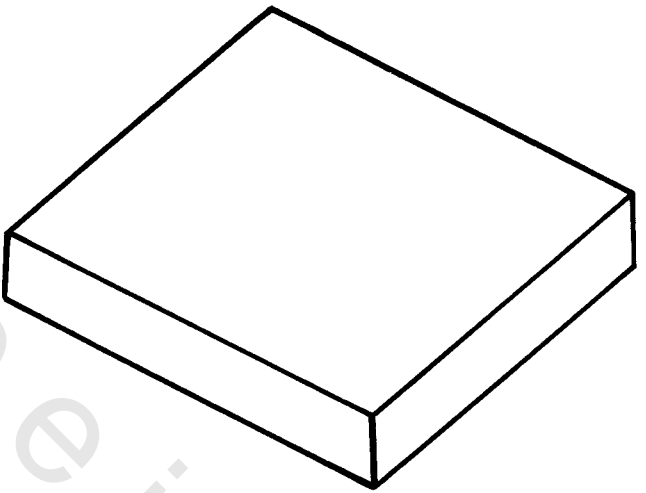
ولحساب أبعاد الصندوق فإنه يمكن رص قطع الشيكولاتة بعدة طرق نذكر منها فقط الآتى : انظر الرسم شكل [٥ ـ ١٥] .

الحل الأول : [٢ × ٣,٥] × [٢٠ × ٢] × ٢

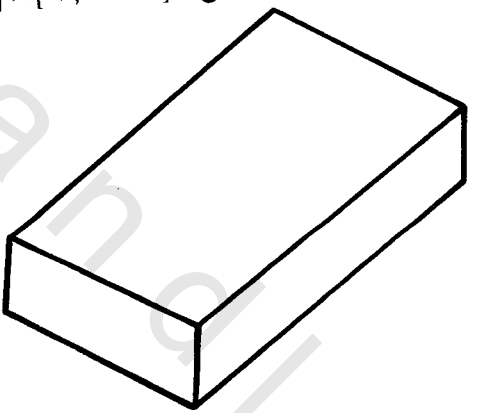
الحل الثانى : [٤ × ٣,٥] × [١٠ × ٢] × ٢

الحل الثالث : [٢ × ٣,٥] × [١٠ × ٢] × ٤

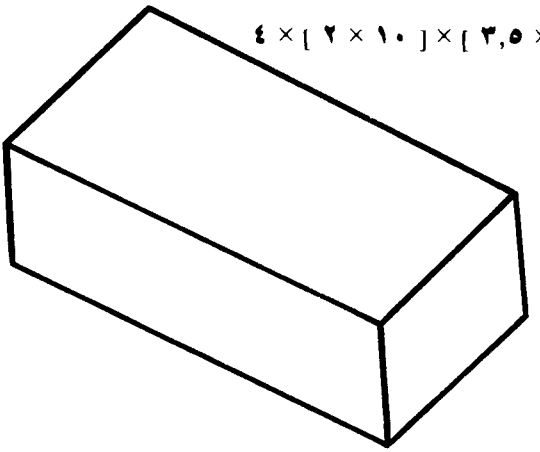
الحل الرابع : [٤ × ٣,٥] × [١٠ × ١] × ٤



(أ) الحل الثانى : [٤ × ٣,٥] × [١٠ × ٢] × ٢



(ب) الحل الثالث : [٢ × ٣,٥] × [١٠ × ٢] × ٤



(جـ) الحل الرابع : [٤ × ٣,٥] × [١٠ × ١] × ٤

شكل [٨ ـ ١٥]

obeikandl.com

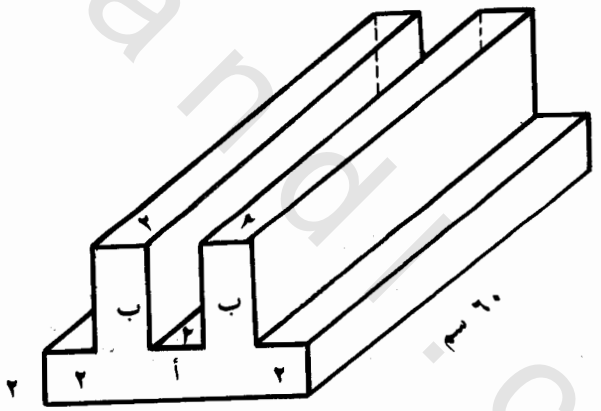
[٥ ـ ٨] حساب حجوم الأشكال المصمتة ، المركبة

Volumes of **Composite** ***Solids***

إذا كان لدينا شكل مصمت مكون من أكثر من منشور ذو مقطع منتظم فإنه يمكن حساب حجمه بنفس الطريقة السابقة وذلك بأن نحسب مساحة الوجه أو المقطع ثم نضربها فى الطول الكلى للشكل والمقطع هنا يمكن أن نقسّمه إلى أكثر من جزء يسهل حساب كل منها على حدة ثم نجمعها فنحصل على المساحة الكلية للوجه أو للمقطع .

● مثال (١) :

أوجد حجم القطعة المبينة فى الشكل ، (٥ ـ ١٦) .



شكل [٥ ـ ١٦]

الأبعاد بالسنتيمتر

● **الحـــل :**

حجم القطعة = مساحة الوجه أو المقطع × طول القطعة .

، مساحة الوجه = مساحة المستطيل ا + ضعف مساحة المستطيل ب

= (١٠ × ٢) + ٢ (٤ × ٢)

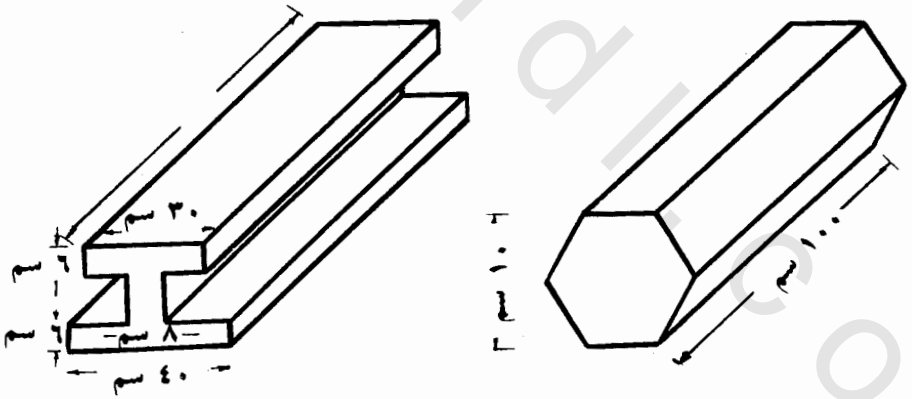
= ٢٠ + ١٦ = ٣٦ سم^{٢} .

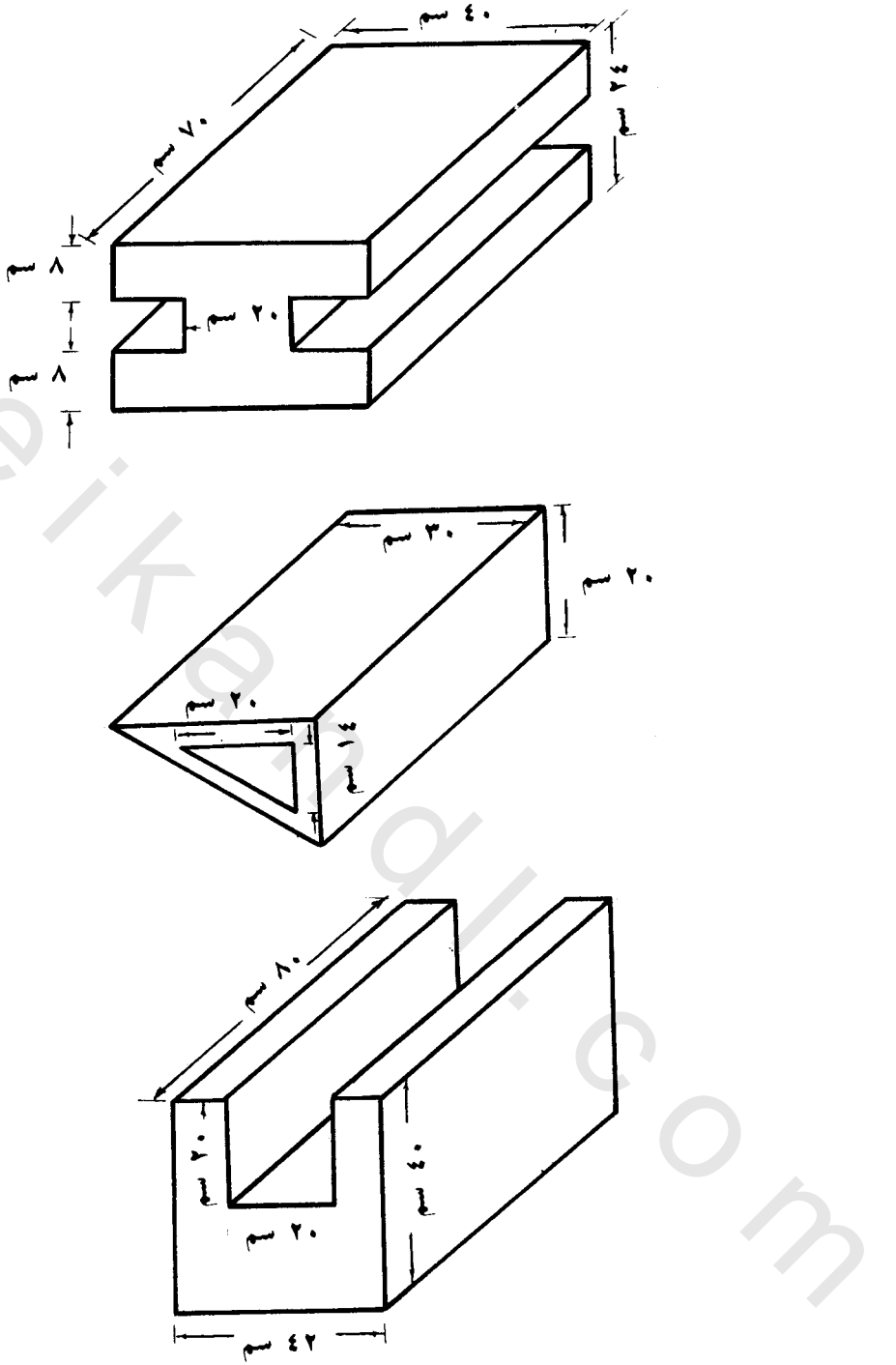
∴ حجم القطعة = ٣٦ × ٦٠ = ٢١٦٠ سم^{٣} .

[٥ ـ ٩] تدريبات على الحجوم :

□ **ملحوظة :** الرسوم ليست كلها بمقياس رسم ١ : ١

+ أوجد حجم الأشكال المصمته المبينة فى شكل (٥ ـ ١٧) .




٤٠ سم
٢٤
ل
٧٠ سم
٨ سم
٢٠ سم
٨ سم
٣٠ سم
٢٠ سم
٢٠ سم
١٣
ل
٨٠ سم
٢٠
ل
٢٠ سم
٣٠
ل
٤٢ سم

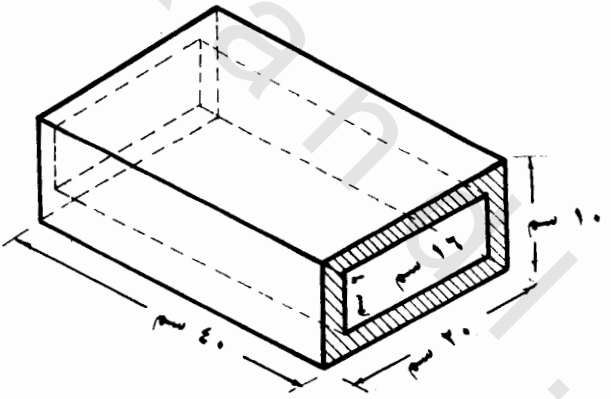
شكل [٨ ـ ١٧]

[٥ ـ ١٠] حساب الحجوم الداخلية Interior volumes :

فى حالات كثيرة ، نحتاج إلى حساب حجم ماسورة مفرغة أو صندوق ... ، ألخ .. وفى مثل هذه الحالات فإننا نقوم بحساب الحجم الكلى ونطرح منه حجم الفراغ ، فنحصل على المطلوب والأمثلة التالية توضح ذلك .

● مثـال (١) :

أوجد حجم المعدن الذى صنع منه الصندوق المبين بالشكل (٥ ـ ١٨) ؛



شكل [٥ ـ ١٨]

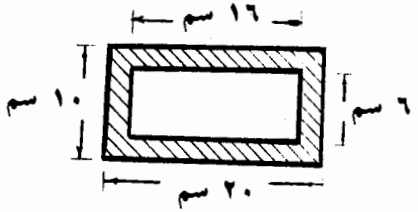
● الحـــل :

حيث أن مقطع الصندوق منتظم الشكل فإنه يمكن حساب حجم معدن الصندوق بطريقتين :

obeikandl.com

الطريقة الأولى : الحجم = مساحة المقطع × الطول

، مساحة المقطع عبارة عن مساحة مستطيل خارجى كبير مطروحاً منه مساحة مستطيل أصغر منه كما بالشكل (٥ ـ ١٩) .



شكل [٥ ـ ١٩]

∴ مساحة المقطع = (٢٠ × ١٠) ـ (١٦ × ٦)

= ٢٠٠ − ٩٦ = ١٠٤ سم^{٢}

∴ حجم مادة الصندوق = مساحة الوجه أو المقطع × الطول

= ١٠٤ × ٤٠ = ٤١٦٠ سم^{٣}

الطريقة الثانية : بنفس الفكرة يمكن إيجاد حجم الصندوق كله كما لو كان مصمتاً (ليس به فراغ) ونطرح منه حجم الفراغ فنحصل على حجم مادة الصندوق .

∴ حجم الصندوق الكبير كله = مساحة الوجه × الطول

= (٢٠ × ١٠) × ٤٠

= ٨٠٠٠ سم^{٣}

حجم الفراغ = مساحة المقطع (الفراغ) × الطول

= (١٦ × ٦) × ٤٠ = ٩٦ × ٤٠ = ٣٨٤٠

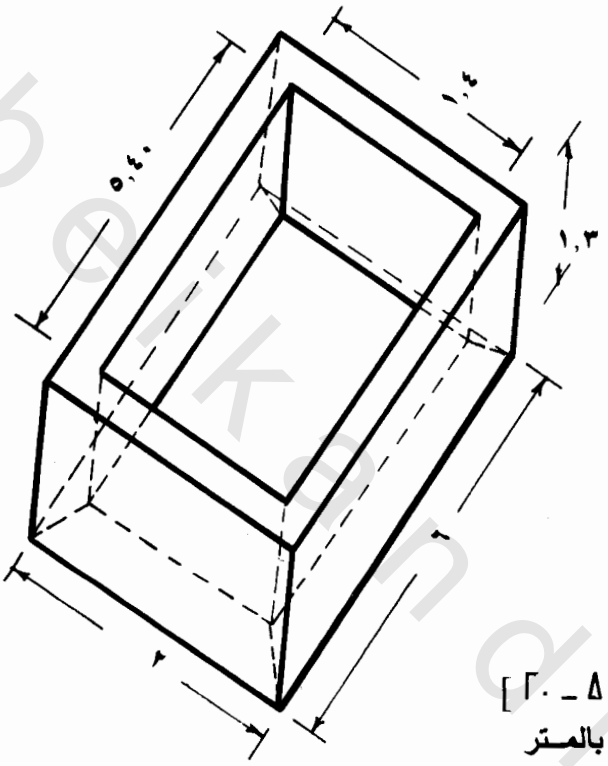
∴ حجم مادة الصندوق = ٨٠٠٠ − ٣٨٤٠ = ٤١٦٠ سم^{٣}

وطبعاً فهى نفس الإجابة بالطريقة الأولى .

obeikandi.com

● مثـــال (٢) :

حوض مياه مبنى بالطوب على شكل مستطيل أبعاده كما بالشكل (٥ ـ ٢٠) ؛ سمك جدرانه ٣٠ سم .



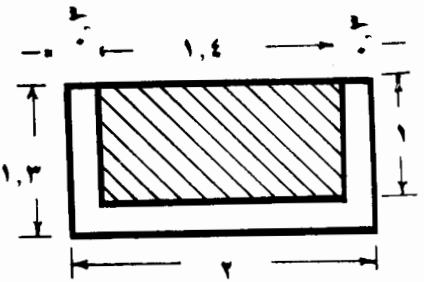
شـكل [٥ ـ ٢٠]
الأبعـاد بالمـتر

والمطلوب حساب حجم الماء الذى يمكن أن يخزن بهذا الحوض .

● الحـــل :

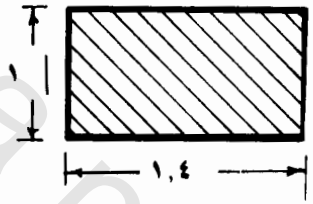
حيث أن الحوض ذو مقطع منتظم فإنه يمكننا إيجاد حجم الحوض بضرب مساحة المقطع × الطول .

ومساحة المقطع تبدو لنا كما فى شكل (٥ ـ ٢١) .



شكل [٨ ـ ٢١]
الأبعاد بالمتر

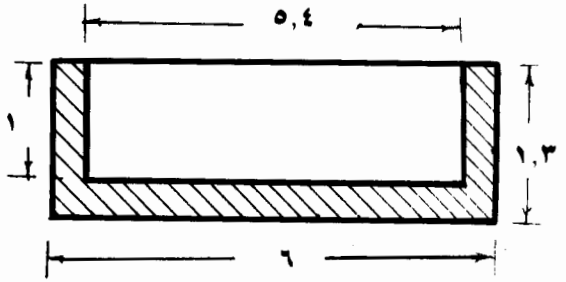
والمساحة الداخلية للمقطع تظهر لنا فى شكل (٥ ــ ٢٢) ، وتساوى :



شكل [٨ ـ ٢٢]
الأبعاد بالمتر

= ١,٤ × ١ = ١,٤ م^{٢}

وطول الفراغ الداخلى للماء يظهر لنا فى شكل (٥ ـ ٢٣) .



شكل [٨ ـ ٢٣]
الأبعاد بالمتر

obeikandl.com

∴ حجم الماء = مساحة المقطع الداخلية × الطول الداخلى للمقطع

= ١,٤ × ٥,٤ = ٧,٥٦ م٣ .

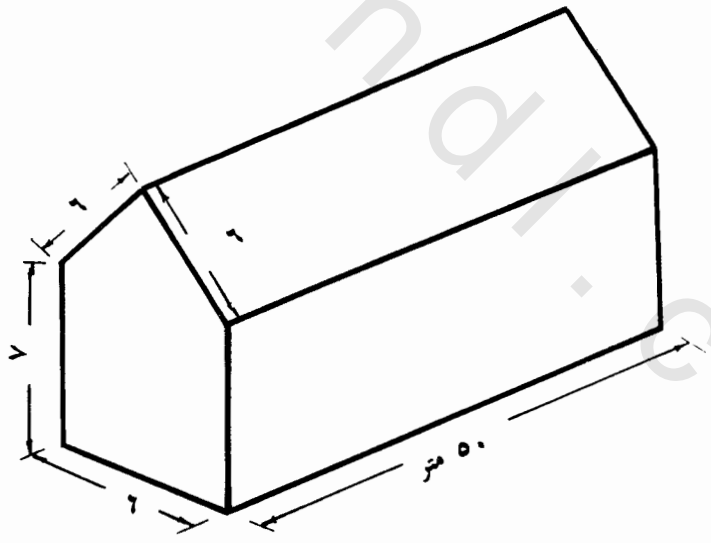
[٥ ـ ١١] تدريبات على الحجوم الداخلية :

(١) صندوق مفتوح بدون غطاء مصنوع من الخشب وبسمك منتظم ٢ سم فإذا كانت الأبعاد الخارجية للصندوق هى ٥٤ سم طولاً ، ٢٤ سم عرضاً وبارتفاع ١٢ سم فاوجد :

(أ) الأبعاد الداخلية للصندوق .

(ب) حجم الصندوق الداخلى .

(٢) مخزن مستطيل الشكل وسقفه على شكل مثلث أبعاده الداخلية موضحة بالرسم فى شكل (٥ ـ ٢٤) .



شكل [٥ ـ ٢٤]

الأبعاد بالمتر

أوجد الحجم الداخلى للمخزن .

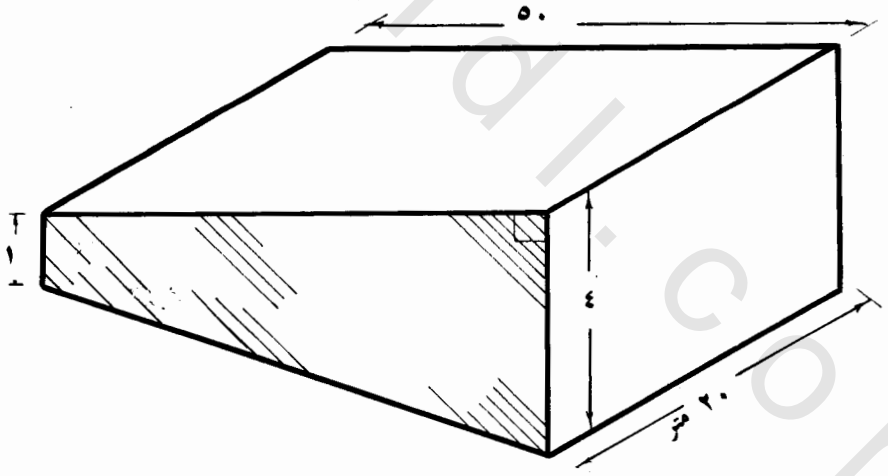
(٣) أنبوبة طولها ١٠ متر ومقطعها مستطيل الشكل وبسمك ٣ سم ، فإذا كان عرض الأنبوبة ٦٠ سم وإرتفاعها ٢٦ سم فأوجد :

(أ) حجم الأنبوبة الداخلى .

(ب) حجم الأنبوبة الخارجى .

(جـ) حجم المادة المصنوع منها الأنبوبة .

(٤) حمام سباحة طوله ٥٠ متر وعرضه ٢٠ متر وعمقه متدرج من « ١ » متر فى أحد الأطراف إلى « ٤ » متر فى الطرف الآخر ، ومقطعه الجانبى موضح بالشكل (٥ ـ ٢٥) ، أوجد كمية الماء التى تلزم لملء حمام السباحة .



شكل [٥ ـ ٢٥]

الأبعاد بالمتر

الدرس السادس

المساحة الكلية لأسطح بعض المجسمات

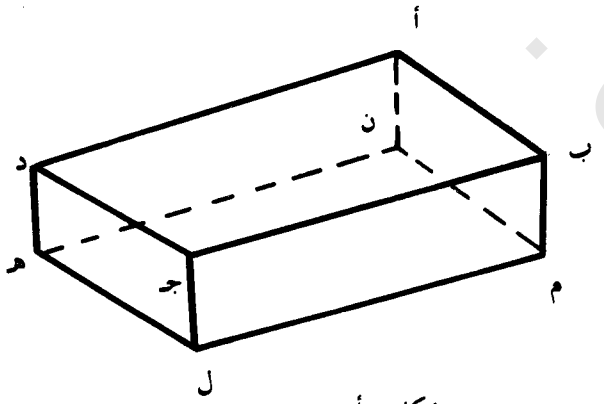
[٦ ـ ١] تقديم :

سندرس فيما يلى كيفية إيجاد مساحة سطح بعض المجسمات مثل متوازى المستطيلات والمكعب ، وغيرها من المجسمات .

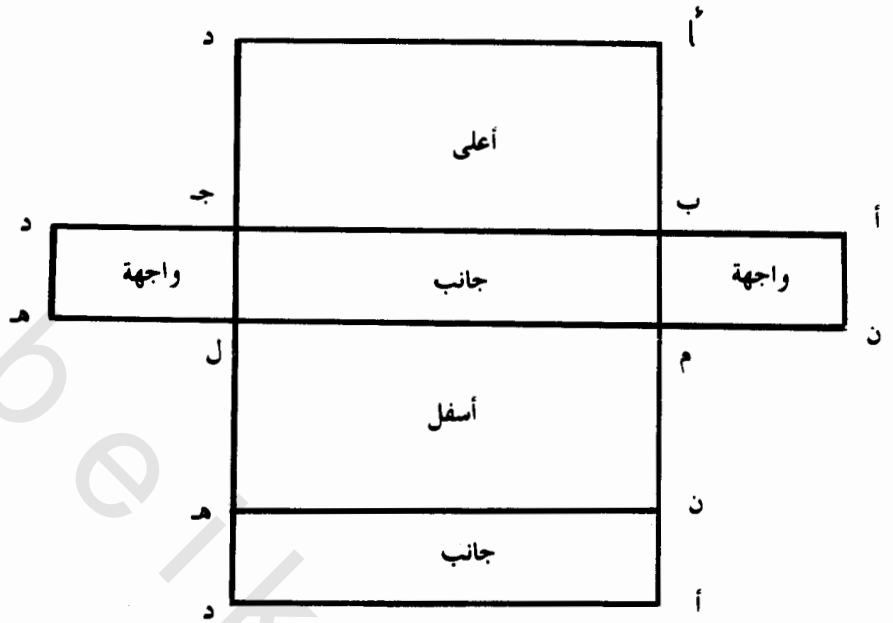
والمساحة الكلية لأى مجسم هى مجموع مساحات جميع أوجهه بينما المساحة الجانبية هى مجموع مساحات أوجهه الجانبية (بدون القواعد) .

[٦ ـ ٢] المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات :

لنعتبر علبة من الكرتون كما بالشكل (٦ ـ ١) ، على شكل متوازى مستطيلات ؛



شكل (أ)



شكل (ب)

شكل [٦ ـ أ] أ ، ب

حيث تُسمى كل من النقط أ ، ب ، جـ ، د ، م ، ل ، هـ ، ن برؤوس متوازى المستطيلات وعددها ثمانية .

بينما تُعرف الخطوط : أ ب ، أ د ، أ ن ، ب جـ ، ب م ، جـ ل ، جـ د ، ل م ، ل هـ ، د هـ ، هـ ن ، م ن بالأحرف وعددها إثنتا عشر حرفاً .

ولمتوازى المستطيلات ستة أوجه (٤ بالأجناب وقاعدة علوية وقاعدة سفلية) ، وكل وجه منها على شكل مستطيل .

وفى متوازى المستطيلات نجد أن كل وجهين متقابلين متساويين فى المساحة حيث نجد أن :

مساحة المستطيل أ ب جـ د = مساحة المستطيل ن م ل هـ

وكذلك مساحة المستطيل د جـ ل هـ = مساحة المستطيل أ ب م ن

وكذلك مساحة المستطيل ب م ل جـ = مساحة المستطيل أ ن هـ د

وأحرف متوازى المستطيلات (عددها ١٢) ، كل أربعة منها منساوية .

فمثلاً ا ن = ب م = جـ ل = د هـ (وكل منها يسمى الارتفاع)

، ا ب = ن م = هـ ل = د جـ (وكل منها يُسمى العرض)

، ا د = ب جـ = م ل = ن هـ (وكل منها يُسمى الطول)

ولمتوازى المستطيلات ثلاثة أبعاد رئيسية هى الطول والعرض والإرتفاع ويُسمى الوجه الذى يستقر عليه متوازى المستطيلات بالقاعدة السفلية والوجه المقابل له بالأعلى بالقاعدة العلوية .

بينما بقية الأوجه الأربعة الأخرى فتعرف بالأوجه الجانبية .

والمساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات هى مجموع مساحات الأوجه الجانبية بينما المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات ، عبارة عن مجموع مساحات الأوجه كلها ويتضح مما سبق أن :

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

وفى شكل (٦ ــ ١) قمنا بشق متوازى المستطيلات عند بعض أحرفه فأصبح كما هو مبين فى شكل ٦ ــ ١ ــ ب .

وطبقاً للقاعدة السابقة فإن المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات :

= **مساحة واجهتين + مساحة جانبين** .

بينما المساحة الكلية =

المساحة الجانبية + مساحة القاعدة العلوية + مساحة القاعدة السفلية .

● مثال (١) :

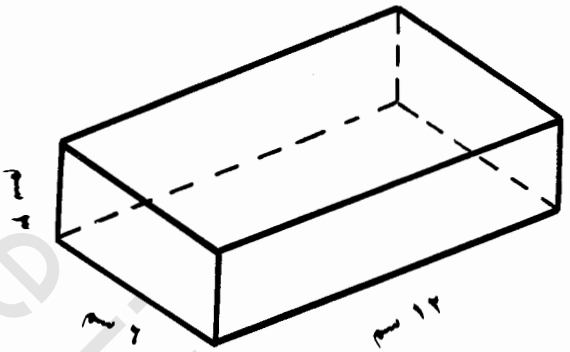
أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لعلبة على شكل متوازى مستطيلات أبعاده كالتالى الطول ١٢ سم ، العرض ٦ سم ، الارتفاع ٣ سم .

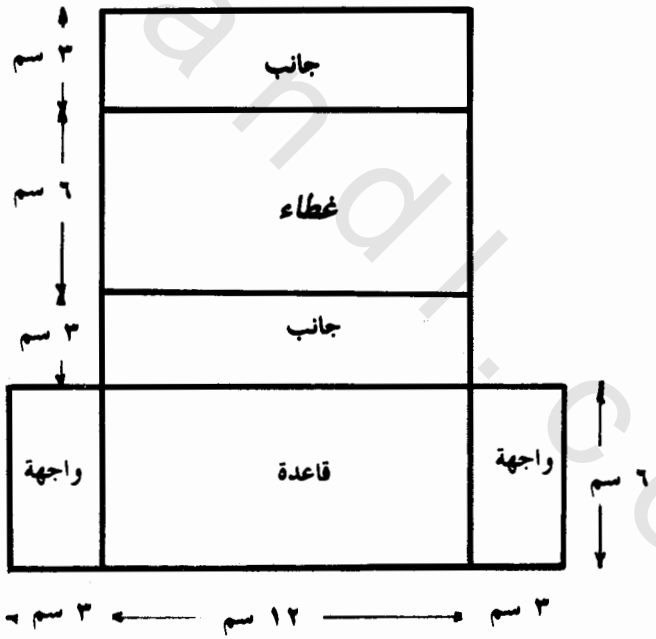
فى الحالتين : (أ) بغطـاء (ب) بدون غطاء .

obeikandl.com

● الحـــل :

انظر الرسم شكل (٦ ــ ٢) .





شكل [٦ ـ ٢]

(أ) بغطـــاء :

المساحة الجانبية =

مساحة واجهتين على شكل مستطيل + مساحة جانبين على شكل مستطيل

= ٢ × [٣ × ٦] + ٢ × [٣ × ١٢]

= ٢ × ١٨ + ٢ × ٣٦ = ٣٦ + ٧٢ = ١٠٨ سم٢

والمساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة العلوية (الغطاء) + مساحة القاعدة السفلية .

= ١٠٨ + ٢ × [١٢ × ٦] = ١٠٨ + ٢ × ٧٢

= ١٠٨ + ١٤٤ = ٢٥٢ سم٢

(ب) بدون غطاء :

هنا تقل المساحة الكلية بمقدار مساحة الغطاء .

∴ المساحة الكلية فى هذه الحالة

= ٢٥٢ − (١٢ × ٦) = ٢٥٢ − ٧٢ = ١٨٠ سم٢

ملحوظة : يمكن إيجاد المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات كالتالى :

المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = محيط قاعدته × إرتفاعه

[٦ ـ ٣] المساحة الكلية للمكعب :

يعتبر المكعب حالة خاصة من متوازى المستطيلات ، وقد سبق وأن عرفنا أن الأبعاد الرئيسية لمتوازى المستطيلات هى الطول والعرض والإرتفاع وتكون مختلفة عادة ، كما أن أوجهه كلها عبارة عن مستطيلات .

أما فى حالة المكعب فإن أوجهه كلها وعددها ستة أوجه ، عبارة عن مربعات ويعنى هذا أن أبعاده الرئيسية متساوية فالطول = العرض = الإرتفاع = طول ضلع المكعب .

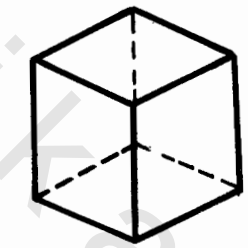
obeikandl.com

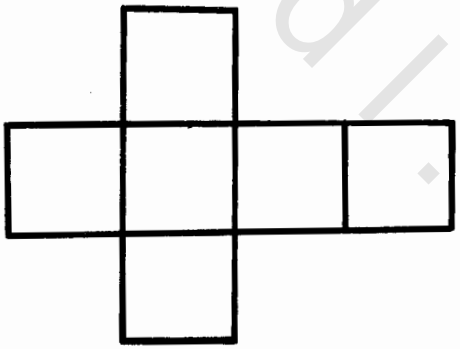
وعلى هذا فالمكعب له بعد واحد وهو طول ضلعه أو طول حرفه وبناء على ما تقدم فإن :

مساحة أوجه المكعب = مساحة وجه واحد × ٦

= طول ضلعه × طول ضلعه × ٦ وحدة مربعة .

وبطريقة مماثلة لما تم عمله فى حالة متوازى المستطيلات فإننا سنقوم بعملية فرد لأوجه المكعب فنحصل على الشكل المبين ، شكل (٦ ــ ٣) .





شكل [٦ ـ ٣]

[٦ ـ ٤] تدريبـــات :

(١) احسِب المساحة السطحية لكل من المكعبات التالية :

(أ) مكعب طول ضلعه ٣ سم .

(ب) مكعب طول ضلعه ٧ سم .

(جـ) مكعب مساحة وجه واحد منه = ٦ سم^{٢} .

(د) مكعب مساحة وجه واحد منه = ١٥ سم^{٢} .

(٢) مكعب طول ضلعه ١٥ سم ، فاحسب :

(أ) مساحة وجه واحد منه .

(ب) المساحة الكلية لسطحه .

(٣) إذا كانت المساحة السطحية الكلية لأحد المكعبات ١٥٠ سم^{٢} فاحسب :

(أ) المساحة الجانبية لهذا المكعب .

(ب) طول ضلع المكعب .

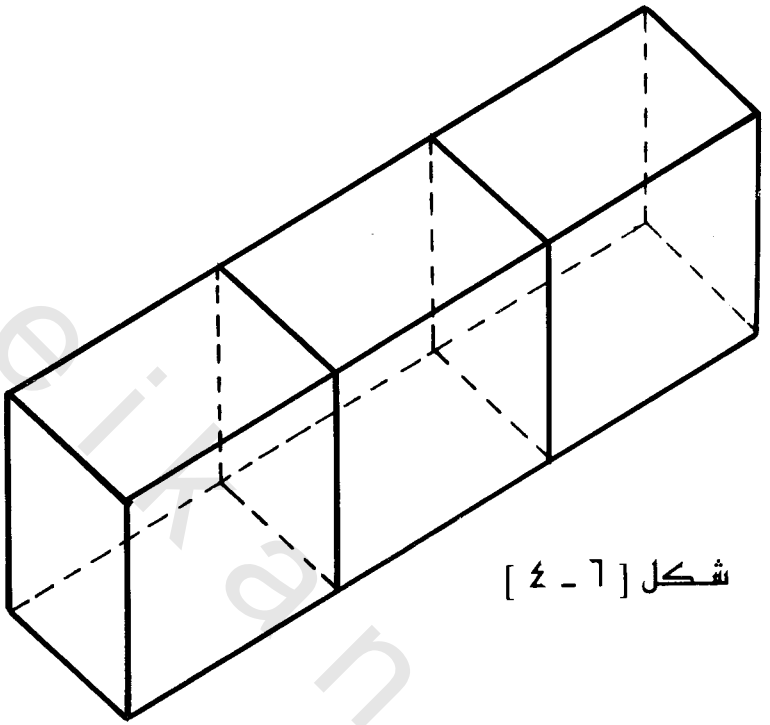
(٤) أكمل الجدول التالى ، جدول (٦ ـ ١) .

طول ضلع المكعب	مساحة كل وجه	المساحة الكلية
٩ سم	...	...
...	١٦ سم^{٢}	...
...	...	٢١٦ سم^{٢}
...	٤٩ سم^{٢}	...
...	...	٦٠٠ سم^{٢}
١٢ سم	...	...

جدول [٦ ـ ١]

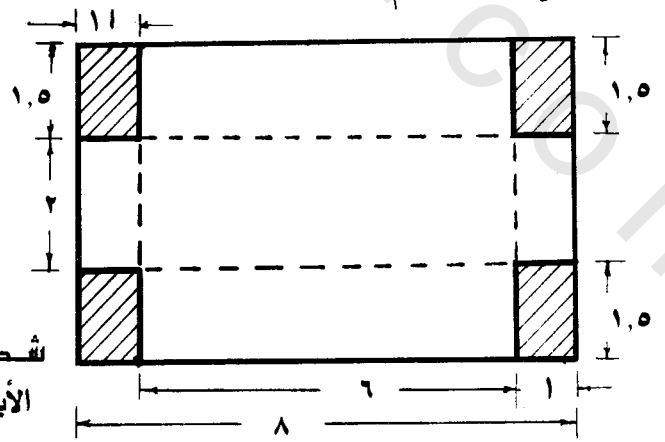
obeikandl.com

(٥) فى شكل (٦ ـ ٤) ، كم عدد متوازيات المستطيلات التى يمكن تحديدها .



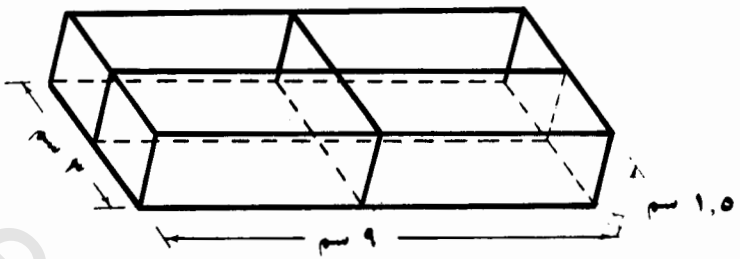
شكل [٦ ـ ٤]

(٦) قطعة من الورق المقوى (الكرتون) ، تم قطعها من أركانها الأربعة كما هو موضح بالرسم شكل (٦ ـ ٥) ، وبواسطة الطى عند الخطوط المتقطعة يمكنك تكوين مجسم على هيئة علبة بدون غطاء ، هل يمكنك حساب المساحة السطحية لهذا المجسم .



شكل [٦ ـ ٥]
الأبعاد بالسنتيمتر

(٧) فى شكل (٦ ـ ٦) صندوق على شكل متوازى مستطيلات ، احسب مساحته الجانبية ومساحته الكلية ثم احسب أقل طول من الخيط يلزم لِربط غُلاف من الورق يُلف به الصندوق لفة واحدة فى الإتجاهين .

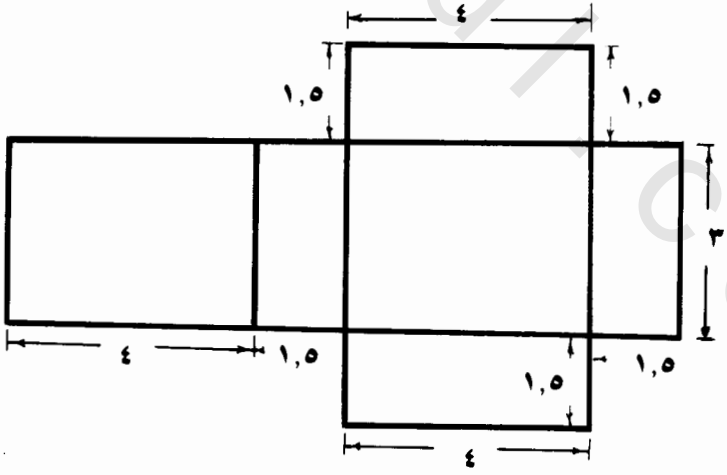


شكل [٦ ـ ٦]

(٨) ارسم على ورق المربعات سطحا لمكعب طول ضلعه ٤ سم .

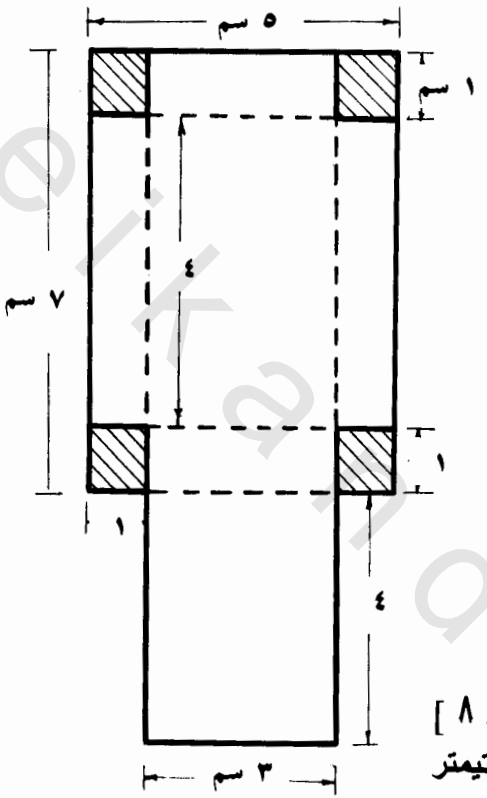
(٩) ارسم على ورق المربعات سطحا لمتوازى المستطيلات الذى أبعاده ٩ سم × ٦ سم × ٢ سم .

(١٠) شكل (٦ ـ ٧) يمثل سطح متوازى مستطيلات ، قم بنقل الرسم على ورق مربعات ثم حدد طريقة طى ملائمة لتكوين الجسم واحسب مساحته الكلية .



شكل [٦ ـ ٧]
الأبعاد بالسنتيمتر

(١١) قطعة من الورق المقوى قطعت من أركانها الموضحة بالمساحات المظللة بالشكل (٦ ـ ٨) ، وبواسطة الخطوط المتقطعة الموضحة ، كون مجسماً ، ثم انقل الرسم على ورق المربعات وحاول تكوين المجسم ثم احسب مساحته الجانبية ومساحته الكلية .



شكل [٦ ـ ٨]
الأبعاد بالسنتيمتر

(١٢) ارسم على ورق المربعات أسطح متوازيات المستطيلات التالية :

(أ) ٤ سم × ٣ سم × ٢ سم .

(ب) ٦ سم × ٢ سم × ٣ سم .

(جـ) ١ سم × ٥ سم × ٤ سم .

(د) ٢,٥ سم × ٤ سم × ٦ سم .

(١٣) إحسب المساحة السطحية لمتوازى مستطيلات أبعاده ١٠ سم ، ٧ سم ، ٦ سم .

(١٤) احسب المساحة السبطحية لصندوق على شكل متوازى مستطيلات أبعاده ٣٠ سم × ٤٠ سم × ٧٠ سم .

(١٥) قالب من الطوب المستخدم فى البناء ، أبعاده ٥٠ سم . طولاً ، ١٠ سم عرضا ، ٢٥ سم إرتفاعاً ،:

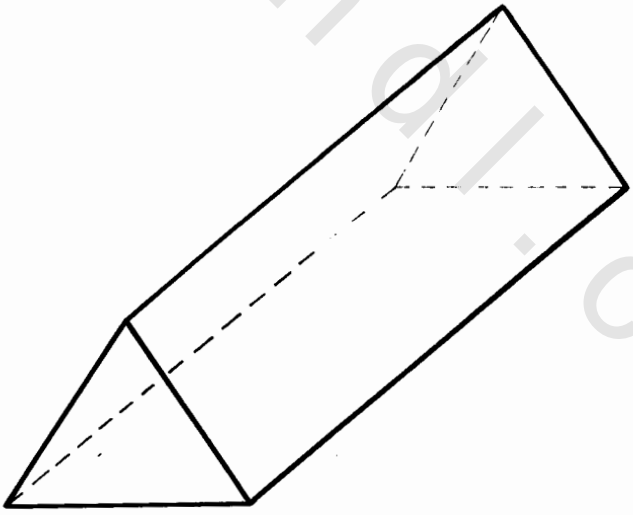
(أ) ما هى مساحة أكبر وجه من أوجهه .

(ب) ما هى مساحته السطحية الكلية .

[٦ ـ ٥] المنشور المثلث *Triangular Prism.* :

شكل (٦ ـ ٩) يوضح منشور مثلث .

مساحة المنشور المثلث = مساحة ٣ مستطيلات + مساحة ٢ واجهة مثلثة .



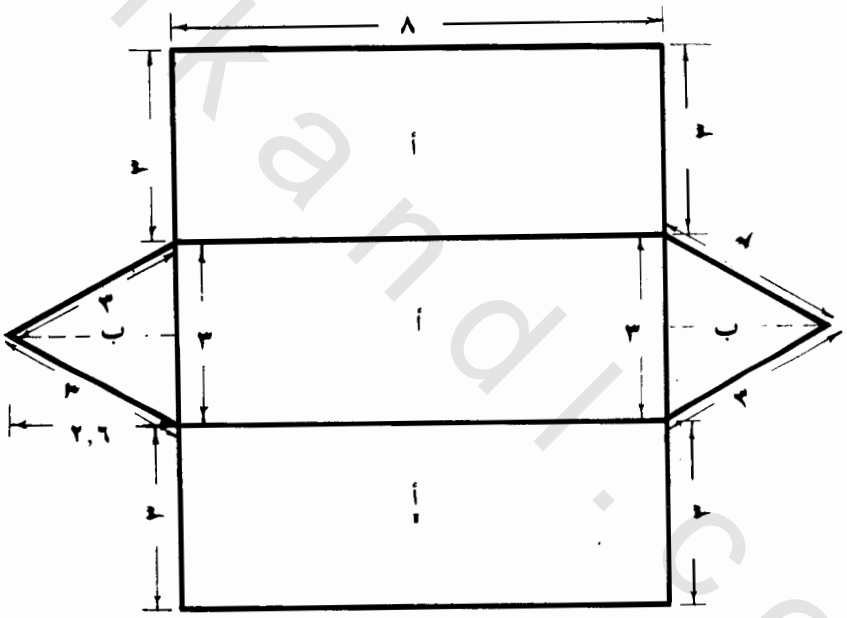
شكل [٦ ـ ٩]

obeikandl.com

□ **ملاحظـة** : إذا كانت الواجهتين على شكل مثلث متساوى الأضلاع فإن القاعدة والواجهتين المستطيلتين يكونوا متساويين فى المساحة بينما إذا كانت الواجهتين المثلثين على شكل مثلث متساوى الساقين فإن الواجهتين المستطيلتين يكونا متساويين فى المساحة ويختلفا عن مساحة القاعدة .

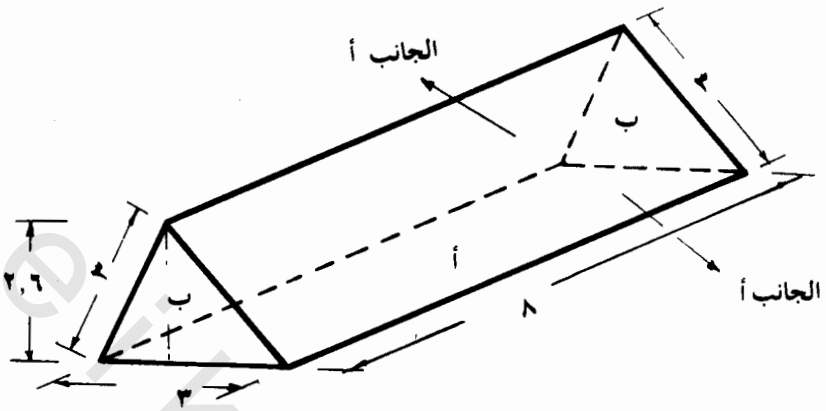
● مثـــال :

احسب المساحة السطحية الكلية للمنشور الثلاثى المبين فى الشكل (٦ ـ ١٠) .



شكل (٦ ـ ١٠)

obeikandl.com



شكل [٦ ـ ١٠]
الأبعاد بالسنتيمتر

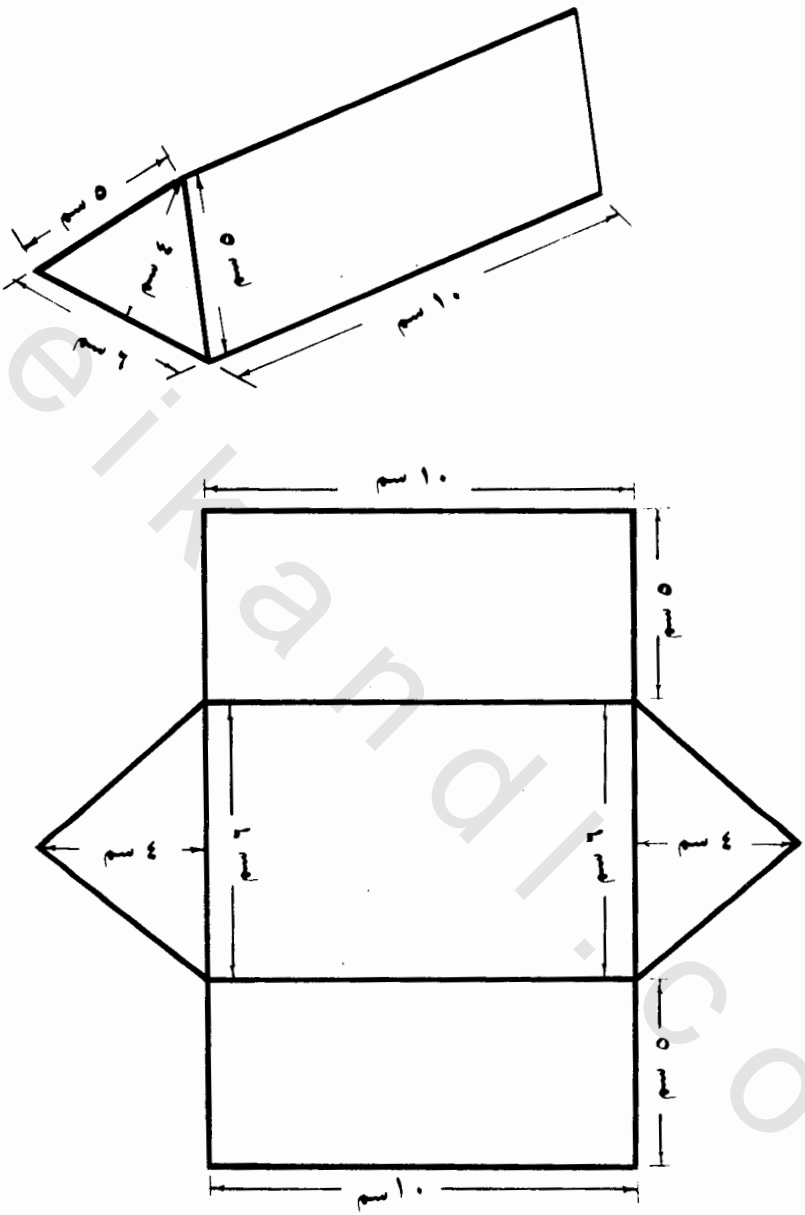
مساحة سطح المنشور = ٣ × مساحة المستطيل أ + ٢ × مساحة المثلث ب .

$= ٣ \times [٨ \times ٣] + ٢ [\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٢,٦]$

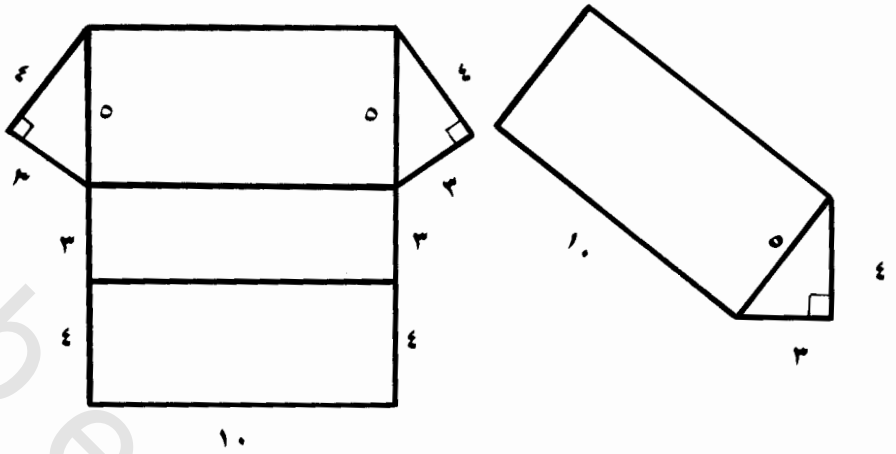
= ٧٢ + ٧,٨ = ٧٩,٨ سم^{٢} .

[٦ ـ ٦] تدريبات :

أوجد المساحة السطحية الكلية للمنشورات المثلثة التالية الموضحة فى شكل (٦ ـ ١١) .

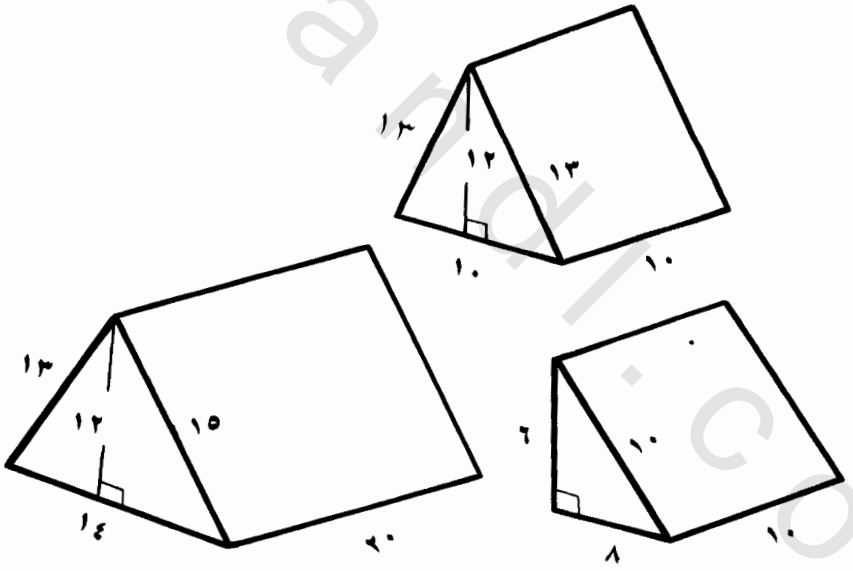


شكل [٦ ـ ١١] أ



شكل [٦ ـ ١١] ب

الأبعاد بالسنتيمتر



شكل [٦ ـ ١١] جـ

الأبعاد بالسنتيمتر

obeikandl.com

الدرس السابع

ورق الحائط والدهانات وغطاء الأرضيات

Wallcoverings, Painting, floor Coverings

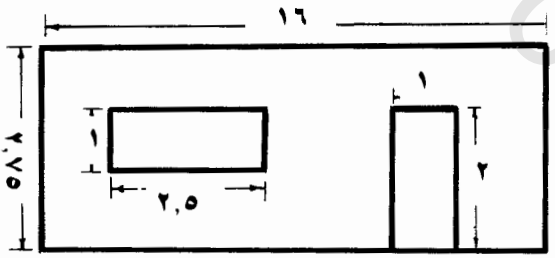
[٧ ـ ١] مقدمة :

يلزم لنا قبل القيام بدهان الحوائط أو تركيب ورق للحوائط وكذلك عند حساب الأرضيات اللازمة لفرش غرفة ما بالموكيت أو السجاد أو ببلاط من نوعيه معينة ، أن نعرف عدد الأمتار المربعة التى سيتم شراؤها من الورق أو الموكيت أو من علب الدهان الكافية لدهان الغرفة .

[٧ ـ ٢] تغطية الجدران وطلاؤها :

● مثال (١) :

غرفة منزل أبعادها كالمبينة فى الشكل (٧ ـ ١) ، يراد تركيب ورق حائط لها ، سعر المتر المربع من هذا الورق هو ٥ جنيهات فأوجد إجمالى ثمن الورق اللازم لتغطية الغُرفة .



شكل [٧ ـ ١]
الأبعاد بالمتر

● الحـــل :

إذا قمنا بعملية فرد لجدار الغرفة كما هو موضح بالشكل ، فإنه يمكننا بسهولة حساب مساحة جدارن الغرفة جميعاً كالتالى :

مساحة جدارن الغرفة = ١٦ × ٢,٧٥ = ٤٤ م^{٢} .

مساحة الباب = ٢ × ١ = ٢ م^{٢} .

مساحة النافذة = ٢,٥ × ١ = ٢,٥ م^{٢}

المساحة التى يلزم تغطيتها بورق الحائط = ٤٤ − ٢ − ٢,٥ = ٣٩,٥ م^{٢}

∴ ثمن الورق اللازم = ٣٩,٥ × ٥ = ١٩٧,٥ جنيه .

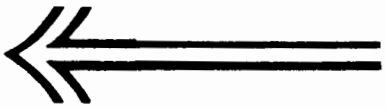
● مثـــال (٢) :

خزان معدنى على شكل متوازى مستطيلات ، مزود بغطاء أبعاده ٣ × ٢,٢٥ × ٠,٧٥ م ، يراد دهانة من الداخل والخارج فإذا كان سعر طلاء المتر المربع هو ٣ جنيهات .

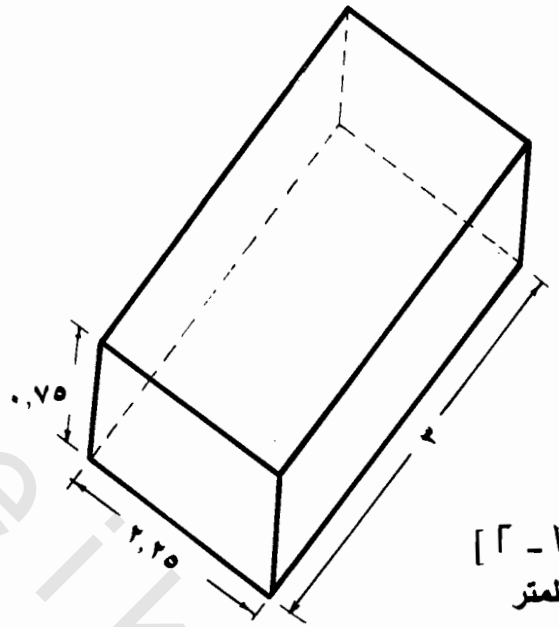
فكم تبلغ كلفة دهان الخزان ؟

● الحـــل :

كما يتضح من الرسم بشكل (٧ ـ ٢) فإن مساحة السطح الكلية من الداخل والخارج يمكن حسابها كالتالى :



obeikandl.com



شكل [٧ ـ ٢]
الأبعاد بالمتر

المساحة الكلية المطلوب دهانها = مساحة السطح الداخلى والخارجى بما فيها الغطاء .

= ضعف المساحة الداخلية = ضعف المساحة الخارجية .

= ٢ [٢ × (٠,٧٥ × ٣) + ٢ × (٠,٧٥ × ٢,٢٥) + ٢ × (٢,٢٥ × ٣)]

= ٢ [٤,٥ + ٣,٣٧٥ + ١٣,٥٠] = ٢ × ٢١,٣٧٥ = ٤٢,٧٥٠ م٢ .

∴ قيمة دهان الخزان = ٣ × ٤٢,٧٥ = ١٢٨,٢٥ جنيهاً .

[٧ ـ ٣] تدريبـات :

(١) إذا كان ١ لتر من الطلاء يكفى لتغطية مساحة ٨ م٢ من الجدران ، فكم يلزم من الطلاء لتغطية غرفة أبعادها ٥ متر × ٤ متر × ٣ متر .

(٢) صالة أبعادها ١٠ متر × ٨ متر × ٢,٧٥ متر ، فإذا كانت مساحة الأبواب والشبابيك = ٢٠ متراً مربعاً ، وكان لتر الدهان يكفى لتغطية ١٠ متراً مربعاً ، من الجدران :

(أ) ما مساحة الجدران المراد طلائها .

obeikandi.com

(ب) كم لتر دهان مطلوب لدهان الصالة .

(٣) غرفة طولها ٨ متر وعرضها ٦ متر وارتفاعها ٢ ١/٢ متر ، فإذا كان لتر الدهان يكفى لتغطية ١٢ متر مربع من السقف . بينما يكفى اللتر لدهان ١٠ متر مربع من الجدران بالغرفة :

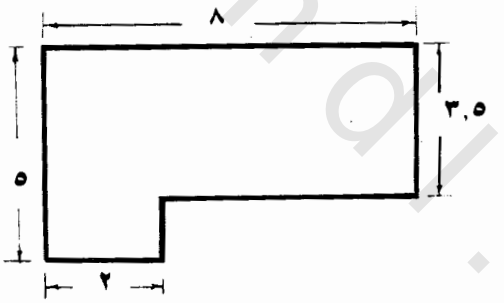
(أ) ما مساحة سقف الغرفة .

(ب) ما مساحة جدران الغرفة .

(جـ) كم لتراً من الدهان تكفى لجدران الغرفة .

(د) كم لتراً من الدهان تكفى لسقف الغرفة .

(٤) شكل (٧ ـ ٣) يبين مسقط أفقى لغرفة إرتفاعها ٣ متر ، فإذا كانت مساحة الأبواب والشبابيك هو ١٢ متر مربع وكان سعر لتر الدهان هو ٨ جنيهات ، ويكفى اللتر لدهان ١٢ متر مربع :



شكل [٧ ـ ٣]
الأبعاد بالمتر

(أ) أوجد مساحة سقف وجدران الغرفة المطلوب دهانها .

(ب) كمية الدهان اللازمة .

(جـ) إجمالى ثمن الدهان .

(٥) حجرة أبعادها ٦ متر وعرضها ٤,٥ متر وإرتفاعها ٣ متر بها نافذتان أبعاد كل منها ١,٥ × ١ من الأمتار .

يراد تغطية حوائط الحجرة والباب من الداخل بورق حائط تكلفة المتر المربع منه ١٥ جنيهاً ، بينما يراد طلاء السقف بدهان يتكلف المتر المربع منه ٤,٥ جنيهات ، احسب التكلفة الكلية لورق الحائط والطلاء .

(٦) حمام سباحة أبعاده من الداخل ٣٠ متر طولاً ، ١٥ متر عرضاً وبعمق ثابت مقداره ٣ أمتار ، المطلوب تغطية جدرانه وأرضيته من الداخل ببلاط قيشانى على شكل مربع طول ضلع الواحدة ١٥ سم ، فكم بلاطة تلزم لذلك .

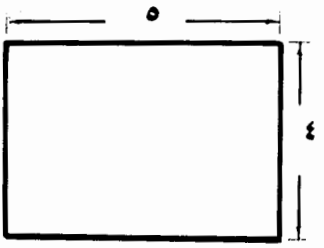
[٧ ـ ٤] تغطية الأرضيات بالسجاد والموكيت :

● مثـــال :

يراد تغطية أرضية حجرة بمنزل أبعادها ٥ متر طولاً ، ٤ متر عرضاً ، بموكيت ، يتكلف المتر المربع منه ١٥ جنيهاً للمتر المربع ، ويحتاج كل متر مربع من الموكيت إلى تثبيته بمادة لصق وتكلفة لصق المتر المربع ٢,٥ جنيه ؛ احسب التكلفة الكلية .

● الحـــل :

انظر الرسم شكل (٧ ـ ٤) .



شكل [٧ ـ ٤]
الأبعـاد بالمـتر

مساحة سطح أرضية الغرفة = ٥ × ٤ = ٢٠ م^{٢}

∴ يلزم لفرشها بالموكيت ٢٠ م^{٢} .

تكلفة الموكيت = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ جنيهاً .

تكلفة مادة اللصق = ٢٠ × ٢,٥ = ٥٠ جنيهاً.

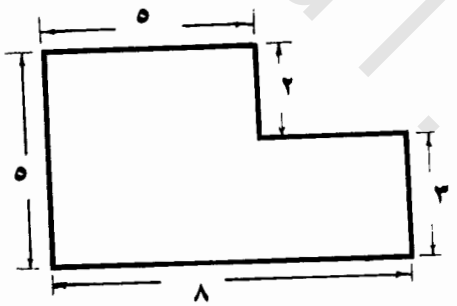
∴ التكلفة الكلية = ٣٠٠ + ٥٠ = ٣٥٠ جنيهاً .

[٧ ـ ٥] تدريبـــات :

(١) ما مساحة الموكيت اللازم لتغطية أرضية حجرة أبعادها ٤ م × ٦ م .

(٢) نوع من السجاد سعر المتر المربع منه ٣٢ جنيهاً فكم يبلغ سعر السجاد اللازم لفرش أرضية بطول ٨ م وبعرض ٥,٥ متر .

(٣) الشكل الموضح لأرضية حجرة يراد فرشها بالموكيت الذى سعر المتر المربع منه ١٦ جنيهاً والمطلوب حساب التكلفة اللازمة لذلك .



شكل [٧ ـ ٥]
الأبعاد بالمتر

(٤) سجادة مستطيلة الشكل طولها ٨ متر وعرضها ٦ متر ومحاطة من حوافها الخارجية بإطار مزركش بعرض ٢ متر من كل جهة :

(أ) ما مساحة السجادة .

(ب) ما مساحة الغرفة .

(جـ) ما مساحة الإطار المزركش .

(٥) يراد تبليط أرضية حجرة أبعادها ٥ متر × ٦ متر ببلاط أبعاده ٥٠ سم × ٥٠ سم ، ويباع هذا البلاط فى عبوات ، سعة كل عبوة ٥ بلاطات وسعر العبوة ، ٥ جنيهات فأوجد .

(أ) مساحة الحجرة .

(ب) عدد البلاط اللازم لتبليط الغرفة .

(جـ) عدد العبوات اللازمة .

(د) تكلفة البلاط الإجمالية .

obeikandl.com

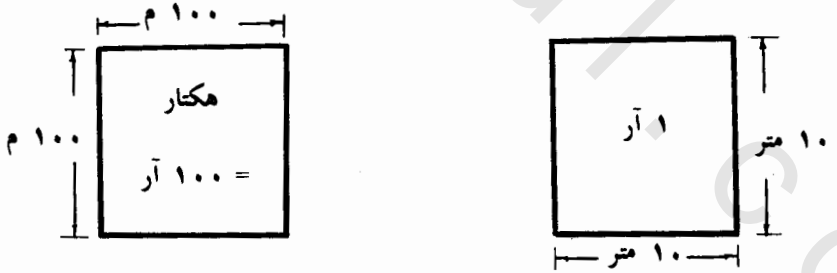
الدرس الثامن

مساحات الأراضى

Land measurment

[٨ ـ ١] تقـديم :

عند قياس المساحات الكبيرة من الحقول أو العقارات أو الأراضى عموماً فإن الوحدات المترية (الفرنسية) المستخدمة هى الآر (Are) والهكتار **Hectare** انظر الرسم شكل (٨ ـ ١) .



شـكل [٨ ـ ١]

الآر = ١٠٠ متر مربع.

الهكتار = ١٠٠ آر = ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠ ٠٠٠ متر مربع .

الكيلومتر المربع = ١٠٠٠٠ آر = ١٠٠ هكتار = ١٠٠٠ ٠٠٠ (مليون متر مربع) .

أما الوحدة الإنجليزية لقياس الأراضى فهى الآكر Acre .

فدان إنجليزى = ٤٨٤٠ ياردة مربعة ≅ ٤٠٤٦ م^{٢}

، الميل المربع = ٦٤٠ فدان إنجليزى .

والفدان الإنجليزى يقل عن الفدان المستخدم فى مصر بمقدار يساوى ١٥٤ م^{٢} تقريباً (الفدان المصرى = ٤٢٠٠ م^{٢} تقريباً) .

● مثـــال (١) :

قطعة أرض زراعية طولها ٥٠٠ متر وعرضها ٢٥٠ متراً احسب مساحتها بالآر وبالهكتار .

● الحـــل :

المساحة = ٥٠٠ × ٢٥٠ = ١٢٥٠٠٠ متر مربع

المساحة بالآر = ١٢٥ ٠٠٠ ÷ ١٠٠ = ١٢٥٠ آر .

المساحة بالهكتار = ١٢٥٠٠٠ ÷ ١٠٠٠٠ = ١٢,٥ هكتار .

● مثـــال (٢) :

احسب مساحة بحيرة صناعية طولها ٢٠٠ م وعرضها ١٢٠ متر :

(أ) بالأمتار المربعة .

(ب) بالآر .

(جـ) بالهكتار .

obeikandl.com

● **الحـــل :**

(أ) المساحة = ٢٠٠ × ١٢٠ = ٢٤٠٠٠ متر مربع

(ب) المساحة بالآر = ٢٤ ٠٠٠ ÷ ١٠٠ = ٢٤٠ آر .

(جـ) المساحة بالهكتار = ٢٤٠٠٠ ÷ ١٠٠٠٠ = ٢,٤ هكتار .

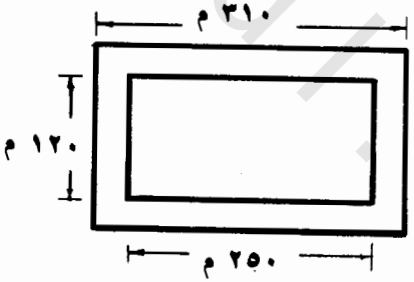
[٨ ـ ٢] تدريبـــات :

(١) شكل (٨ ــ ٢) يوضح قطعة من الأرض مبنى عليها مخزن بطول ٢٥٠ متراً وبعرض ١٢٠ متراً وعلى شكل مستطيل ، ويحيط بالمخزن من حوافه الأربعة شريط من الأرض بعرض منتظم مقداره ٣٠ متراً فأوجد :

(أ) مساحة المخزن .

(ب) مساحة شريط الأرض .

(جـ) المساحة الكلية لقطعة الأرضْ .



شكل [٨ ـ ٢]

(٢) حقل على شكل مستطيل طوله ١٧٤ متراً وعرضه ١١٥ متراً ، احسب مقدار ما تزيده مساحة الحقل عن ٢ هكتار .

obeikandl.com

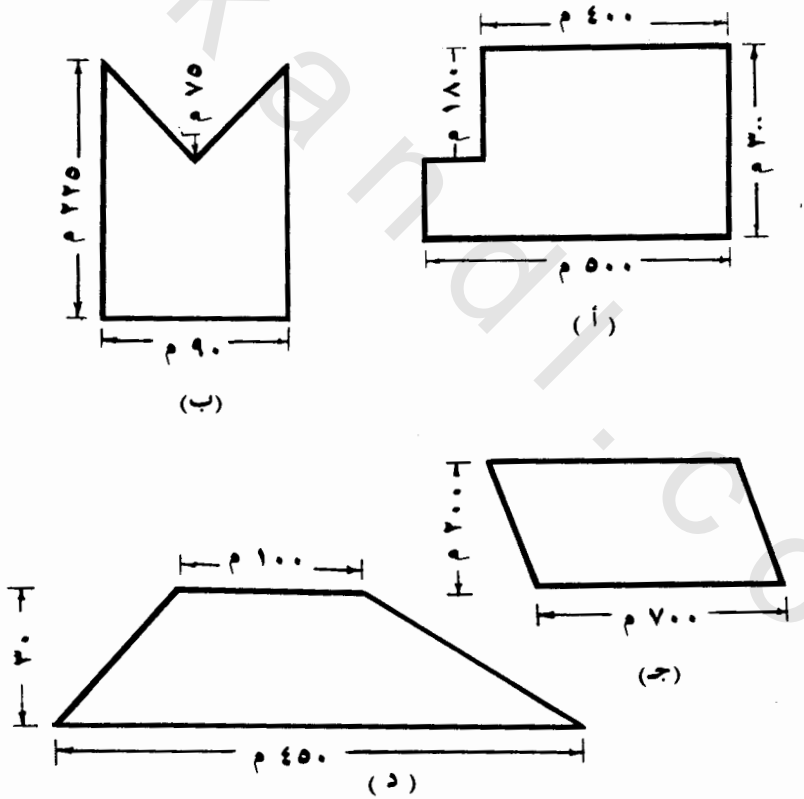
(٣) حمام سباحة طوله ٥٠ متراً وعرضه ٢٠ متراً ، يحيط به من ناحية الطول حافة خرسانية بعرض $\frac{1}{2}$ ٢ متر ، بينما يحيط به من ناحية العرض حافة خرسانية مماثلة بعرض ٤ متر فاحسب :

(أ) مساحة الحمام بالمتر المربع وبالآر .

(ب) المساحة الكلية بالمتر المربع وبالآر للحمام وما يحيط به من خرسانة .

(٤) أوجد مساحة كل من قطع الأراضى التالية الموضحة فى شكل (٨ ــ ٣) :

(أ) بالمتر المربع (ب) بالآر (جـ) بالهكتار



شكل [٨ ـ ٣] أ ، بـ ، جـ ، د

الدرس التاسع

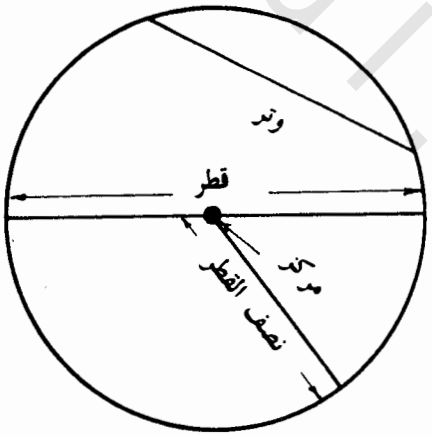
الدائـــرة The circle

[٩ ـ ١] تعـريف :

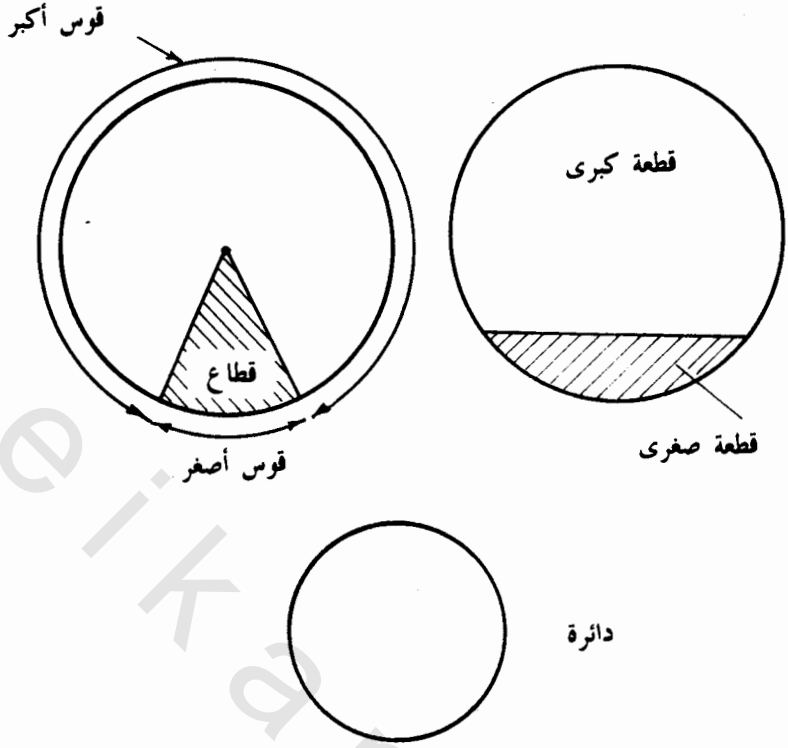
تُعتبر الدائرة من أكثر الأشكال الهندسية المألوفة فى حياتنا والدائرة هى شكل مغلق عبارة عن المحل الهندسى (المسار) الذى ترسمه نقطة تتحرك على بعد ثابت (نصف قطر الدائرة radius) من نقطة محددة (المركز center) .

أما المسار الذى ترسمه النقطة المتحركة فيعرف بالمحيط circumference .

وشكل (٩ ـ ١) يوضح بعض المصطلحات الهامة للدوائر .

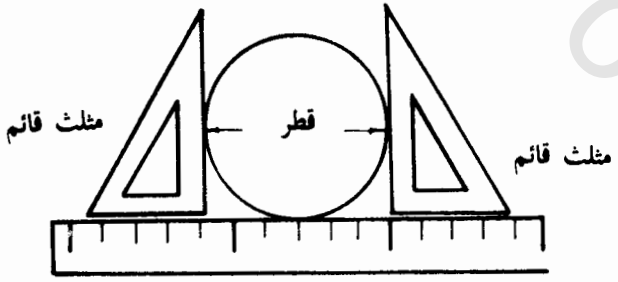


شـكل [٩ ـ ١]
مصطلحـات الدوائـر



[٩ ـ ٢] المحيط والقطر والنسبة الثابتة (ط) :

قم باختيار مجموعة من الأجسام المستديرة بأحجام مختلفة ثم أوجد قيمة محيط كل جسم منها باستخدام خيط أو شريط من القطن أو أى أداة قياس مناسبة ، ثم احسب قطر كل جسم منها كما هو موضح بالشكل (٩ ـ ٢) .



شكل [٩ ـ ٢] طريقة لقياس القطر

قم بعد ذلك بتدوين هذه البيانات فى جدول كالمبين، جدول (٩ ـ ١) .

الجسم	المحيط ح	القطر ق	المحيط ÷ القطر $\frac{ح}{ق}$

جدول [٩ ـ ١]

وإذا تأملنا الجدول (٩ ـ ١) ، ونظرنا إلى العمود الأخير $\frac{ح}{ق}$ بعد حساب النتائج فإننا سنجد أن الإجابات كلها تقريباً متشابهة وتساوى حوالى ٣,١٤ أ، $\frac{٢٢}{٧}$.

وهذه النسبة تعتبر قيمة ثابتة لأى دائرة وتُمثل بالرمز ط (أو باللاتينى π وتنطق باى) .

ولأى دائرة إذا قسمنا طول محيطها على قطرها $\frac{ح}{ق}$ سنجد أنه يساوى ط :

$$\therefore \text{ط} = \frac{ح}{ق} = \frac{ح}{٢ \text{ نق}}$$

$$\therefore ح = ٢ \text{ ط نق} .$$

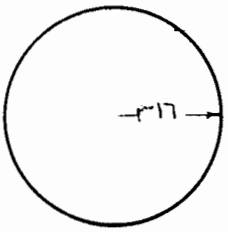
وبذلك فإن محيط أى دائرة = ٢ × ط × نصف القطر .

$$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times \text{نصف القطر} = ٢ \times ٣,١٤ \times \text{نصف القطر}$$

obeikandl.com

● مثـــال (١) :

أوجد قيمة ط للدائرة الموضحة فى شكل (٩ ـ ٣) ، والتى محيطها = ١٠٠,٦ سم ونصف قطرها ١٦ سم .



شـكل [٩ ـ ٣]

● الحـــل :

$$ط = \frac{ح}{٢ \text{ نق}} = \frac{١٠٠,٦}{١٦ \times ٢} = \frac{٥٠,٣}{١٦} = ٣,١٤$$

[٩ ـ ٣] استخدام النسبة (ط) :

إن استخدام نسبة المحيط إلى القطر ، $\frac{ح}{ق}$ أ، $\frac{ح}{٢ \text{ نق}}$

تُساعدنا فى إيجاد قطر أو نصف قطر أو محيط أى دائرة كما وأن النسبة ط لها استخدامات لا تحصى فى المستويات الأعلى بالرياضيات ويمكن كتابة العلاقة السابقة بعدة صور :

المحيط = ط × القطر .

ح = ط × ق

∴ القطر = ق = ضعف نصف القطر = ٢ نق ،

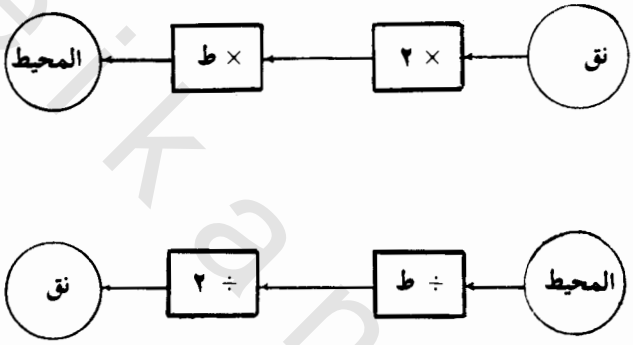
obeikandl.com

∴ ح = ط × ق = ط × ٢ نق .

∴ ح = ٢ ط نق .

وتبلغ قيمة ط بالضبط = $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣,١٤٢٨ واختصاراً ، يمكن اعتبارها ٣,١٤

انظر شكل (٩ ــ ٤) وهو يوضح تسلسل إيجاد أياً من المحيط أو القطر .



شكل [٩ ـ ٤]

حساب المحيط بمعلومية نصف القطر

، حساب نصف القطر بمعلومية المحيط

● مثـــال (١) :

أوجد محيط دائرة قطرها = ٢٠ سم (اعتبر ط = ٣,١٤٢) .

● الحـــل :

ح = ط × ق

= ٣,١٤٢ × ٢٠ = ٦٢,٨٤ سم

● مثـــال (٢) :

أوجد محيط دائرة نصف قطرها ٥٦ سم (اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

● الحـــل :

ح = ٢ ط نق .

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥٦ = ٣٥٢ سم

● مثـــال (٣) :

أوجد قطر ونصف قطر دائرة محيطها ١٢٦,٤ سم (اعتبر ط = ٣,١٤) .

● الحـــل :

ح = ط × ق

∴ ١٢٦,٤ = ٣,١٤ × ق

∴ ق = ١٢٦,٤ ÷ ٣,١٤ = ٤٠,٢٢ سم

∴ نق = ٤٠,٢٢ ÷ ٢ = ٢٠,١١ سم

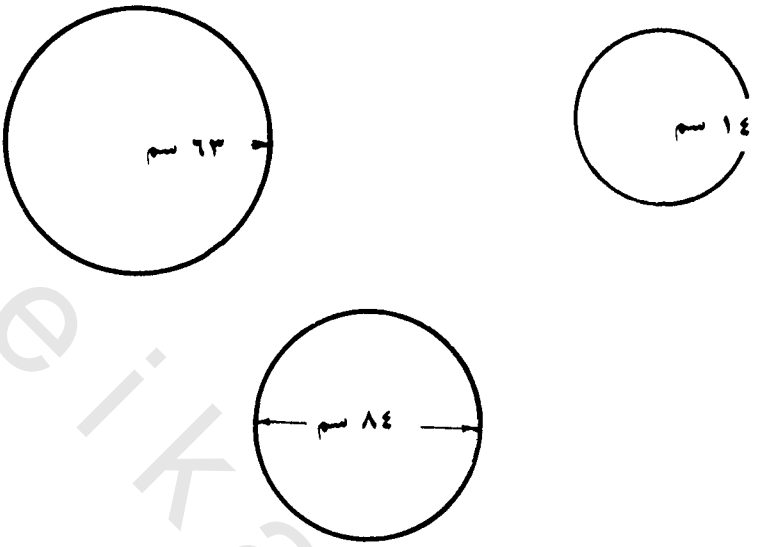
[٩ ـ ٤] تدريبـــات :

(١) احسب محيط دائرة طول نصف قطرها ٦٣ سم « اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$ » .

(٢) دائرة طول نصف قطرها ٧٠ سم احسب محيطها معتبراً ط = ٣,١٤ .

(٣) احسب محيط الدوائر المبينة فى شكل (٩ ـ ٥) .

obeikandl.com



شكل [٩ ـ ٨]

(٤) دائرة محيطها = ٥٧٢ سم فاحسب طول نصف قطرها باعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$.

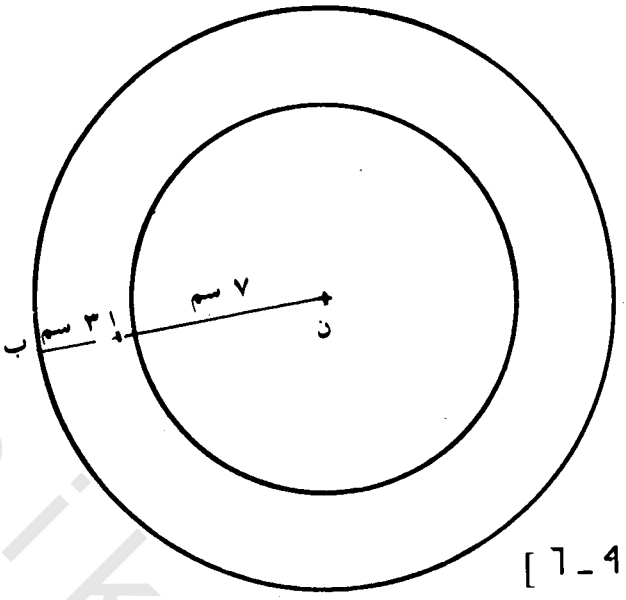
(٥) دائرة محيطها = ٤٧١ سم فاحسب طول نصف القطر باعتبار ط = ٣,١٤ .

(٦) مجموع محيطى دائرتين = ٧٠٤ سم وكان نصف قطر إحداهما ٢١ سم فاحسب نصف قطر الدائرة الأخرى باعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$

(٧) دائرتان النسبة بين طولى نصف قطريهما هى ٢ : ٣ فإذا كان مجموع قطريهما ١٥٠ سم فاحسب محيط كل من الدائرتين .

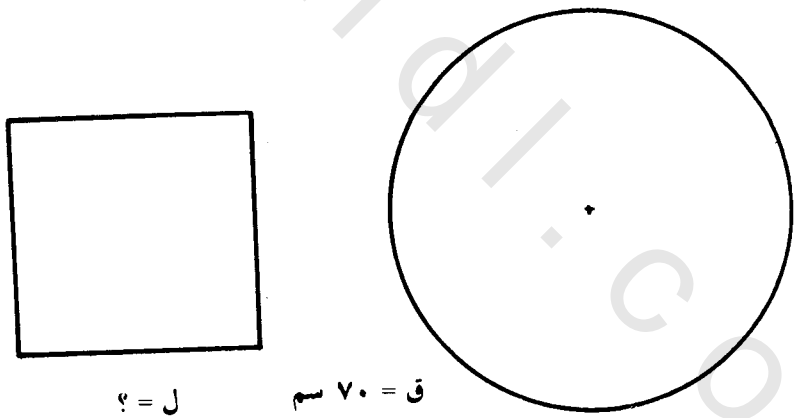
(٨) فى شكل (٩ ـ ٦) ، دائرتان متحدتا المركز (ن) فإذا كان ن ا = ٧ سم ، ا ب = ٣ سم فاحسب الفرق بين محيطى الدائرتين ومجموع محيطى الدائرتين .

obeikandl.com



شكل [٩ ـ ٦]

(٩) دائرة ومربع متساويان فى المحيط فإذاكان طول قطر الدائرة = ٧٠ سم فاحسب طول ضلع المربع باعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$.



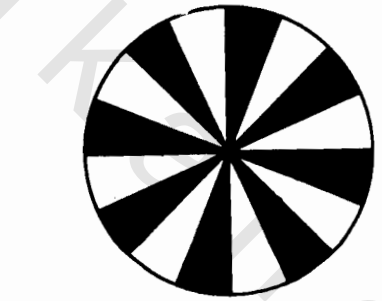
شكل [٩ ـ ٧] أ ، بـ

(١٠) سلك على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٢ سم ، يراد تشكيله على هيئة دائرة فاحسب طول قطر الدائرة لأقرب رقم عشرى واحد .

[٩ ـ ٥] مساحة الدائرة :

لنبدأ برسم دائرة ذات نصف قطر معلوم ، ثم نقسمها إلى ١٦ قسماً متساوياً ، بعد ذلك نقص حول محيط الدائرة ونقص أجزاء الدائرة ثم نبدأ فى رصها وترتيبها على قطعة من الورق ،

فنلاحظ أن شكلهم مقارب لشكل متوازى الأضلاع ، انظر الرسم شكل (٩ ــ ٨) .



شكل [٩ ـ ٨]

ويلاحظ من الرسم ما يلى :

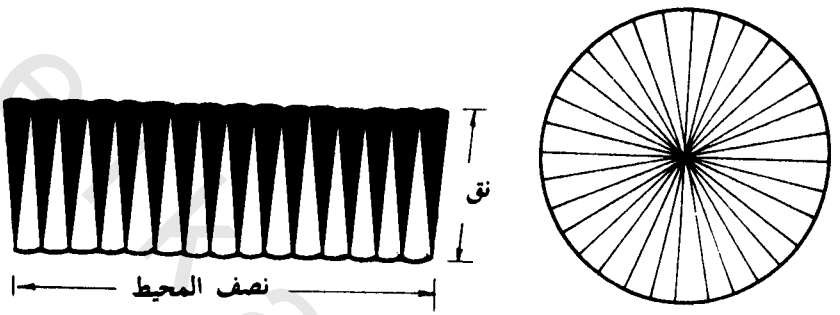
(أ) طول الشكل عبارة عن نصف محيط الدائرة تقريباً .

(ب) ارتفاع الشكل عبارة عن نصف قطر الدائرة تقريباً .

(جـ) مساحة الشكل عبارة عن مساحة الدائرة تقريباً .

ويلاحظ أنه إذا قسمنا الدائرة إلى ٣٢ جزءاً ورتبناها لتكون لنا الشكل (٩ – ٩) ، وهو يشبه تقريباً مستطيل .

وكلما زاد عدد أجزاء الدائرة المقسمة كلما اقترب شكل متوازى الأضلاع إلى مستطيل واقتربت مساحة المستطيل إلى مساحة الدائرة .



(ب) (أ)

شكل [٩ ـ ٩]

∴ عند عدد أقسام كبير جداً يكون :

مساحة متوازى الأضلاع = مساحة المستطيل = القاعدة × الإرتفاع

= الطول × العرض .

= $\frac{1}{2}$ محيط الدائرة × نصف القطر .

= ط نق × نق .

= ط نق^2 .

أى أن :

مساحة الدائرة = ط × مربع نصف القطر

$$= \text{ط نق}^2 = \frac{\text{ط نق}^2}{4}$$

● أمثلة محلولة ●

● مثـــال (١) :

ما مساحة الدائرة التى قطرها = ٤٢ سم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

● الحـــل :

مساحة سطح الدائرة = ط × نق^{٢}

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ × ٢١ = ١٣٨٦ سم^{٢}

● مثـــال (٢) :

ما مساحة الدائرة التى محيطها = ٩٤,٢ سم (ط = ٣,١٤)

● الحـــل :

∴ القطر = المحيط ÷ ط

∴ القطر = ٩٤,٢ ÷ ٣,١٤ = ٣٠ سم .

∴ نصف القطر = ١٥ سم .

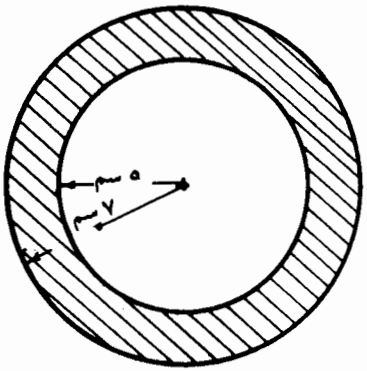
∴ المساحة = ط نق^{٢} .

= ٣,١٤ × ٢٢٥ = ٧٠٦,٥ سم^{٢} .

● مثـــال (٣) :

فى شكل (٩ ـ ١٠) ، احسب مساحة الجزء المظلل واعتبر ط = ٣,١٤ .

obeikandl.com



شكل [٩ ـ ١٠]

● **الحـــل :**

مساحة سطح الدائرة الخارجية :

= ٣,١٤ × ٧ × ٧ = ١٥٣,٨٦ سم^{٢} .

مساحة سطح الدائرة الداخلية :

= ٣,١٤ × ٥ × ٥ = ٧٨,٥ سم^{٢} .

∴ مساحة الجزء المظلل = ١٥٣,٨٦ − ٧٨,٥٠ = ٧٥,٣٦ سم^{٢} .

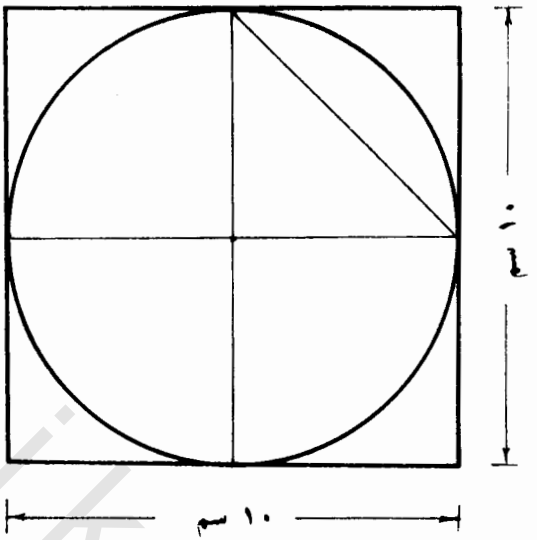
[٩ ـ ٦] تجارب لإيجاد قيمة النسبة ط :

□ التجربة الأولى :

تعتبر هذه التجربة ، طريقة عملية لإيجاد مساحة الدائرة تقريباً بحسابها عملياً قبل حسابها رياضياً .

والآن : ارسم دائرة نصف قطرها ٥ سم ثم ارسم مربعاً يحيط بالدائرة كما بالشكل (٩ ـ ١١) .

obeikandi.com



شكل [٩ ـ ١١]

وواضح أن طول ضلع المربع يساوى قطر الدائرة ، قم بعد ذلك بتقسيم المربع إلى أربعة أجزاء متساوية .

ثم اقسم أحد المربعات الصغيرة بخط قطرى كما بالشكل .

وإذا دققنا النظر سنجد أن مساحة ربع الدائرة بهذا المربع الصغير تعادل $\frac{٣}{٤}$ مساحة المربع الصغير تقريباً .

وبالتالى فإن مساحة الدائرة الكلية = تقريباً $\frac{٣}{٤}$ مساحة المربع .

ولكن مساحة المربع = ١٠ سم × ١٠ سم = ١٠٠ سم^{٢} .

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ١٠٠ = ٧٥ سم^{٢} .

، ∴ مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = ط × ٥ × ٥ = ٢٥ ط سم^{٢} .

∴ ٢٥ ط = ٧٥ سم^{٢} .

∴ ط = ٣ تقريباً .

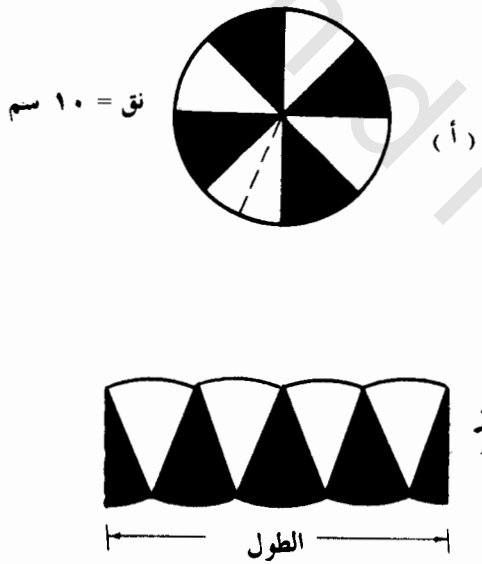
□ التجربة الثانية :

إن تفاصيل هذه التجربة قد تم شرحها من قبل ، والآن نحاول أن نجربها بأنفسنا ،

وتعتبر هذه التجربة ، دراسة لنظرية العلاقة بين نصف قطر الدائرة ومساحتها ، وما عليك إلا اتباع الخطوات التالية .

لنفترض أن نصف قطر الدائرة = ١٠ سم ، قسم الدائرة إلى ٨ أجزاء متساوية ، ثم قم بتقسيم كل جزء مرة ثانية إلى جزئين متساوين . فيصبح لدينا ١٦ جزءاً متساوياً .

وباستخدام المقص نقوم بتقطيع الدائرة وتقسيم أجزائها وبإعادة ترتيبها كما بالشكل (٩ ـ ١٢) ، فإننا نحصل على شكل مستطيل تقريباً .



شكل [٩ ـ ١٢] أ ، ب

مساحة الدائرة = مساحة المستطيل =

الطول × العرض = الطول × نصف القطر

والآن ، فإننا إذا قسنا طول المستطيل فإننا سنجده = ٣١ سم تقريباً .

وعلى ذلك فإن مساحة الدائرة = ٣١ × ١٠ = ٣١٠ سم^{٢} تقريباً .

= ٣,١ × ١٠٠ = ٣,١ نق^{٢} .

∴ مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = ٣,١ نق^{٢} .

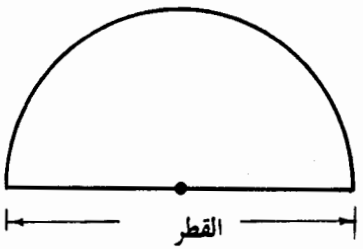
∴ يتضح لنا من هذه التجربة أن ط = ٣,١ تقريباً .

وكلما زاد عدد الأقسام كلما اقتربت قيمة ط من $\frac{٢٢}{٧}$ أ، ٣,١٤٢

كرر هذه التجربة بدوائر ذات أنصاف أقطار مختلفة وقم بتسجيل النتائج التى ستحصل عليها ولاحظ إن كانت ط لها نفس القيمة أم تختلف .

[٩ ـ ٧] نصف الدائرة *The semi-circle* :

كما يتضح من شكل (٩ ـ ١٣) فإنه بتقسيم الدائرة إلى قسمين متساويين تماماً فإننا نحصل على نصفى دائرة .



شكل [٩ ـ ١٣]

obeikandl.com

● مثـــال :

إذا كان نصف قطر ، نصف دائرة يساوى ١٤ سم فأوجد :

(أ) محيط نصف الدائرة .

(ب) مساحة نصف الدائرة .

● الحـــل :

(أ) محيط نصف الدائرة ، عبارة عن نصف محيط الدائرة الكاملة مضافاً إليه طول القطر ،

محيط نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط نق = ط نق .

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٤٤ سم .

، قطر نصف الدائرة = ٢ × ١٤ = ٢٨ سم .

∴ محيط نصف الدائرة = ٤٤ + ٢٨ = ٧٢ سم .

(ب) مساحة نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة الكاملة .

= $\frac{١}{٢}$ × ط × نق^{٢} .

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ = ٣٠٨ سم^{٢} .

[٩ ـ ٨] تدريبات عامة على الدوائر :

(١) أوجد محيط كل من الدوائر التالية التى نصف قطر كل منها :

(أ) ١٤ سم (ب) ٢١ سم (جـ) ٣٥ سم (د) ٨٤ سم

[اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$]

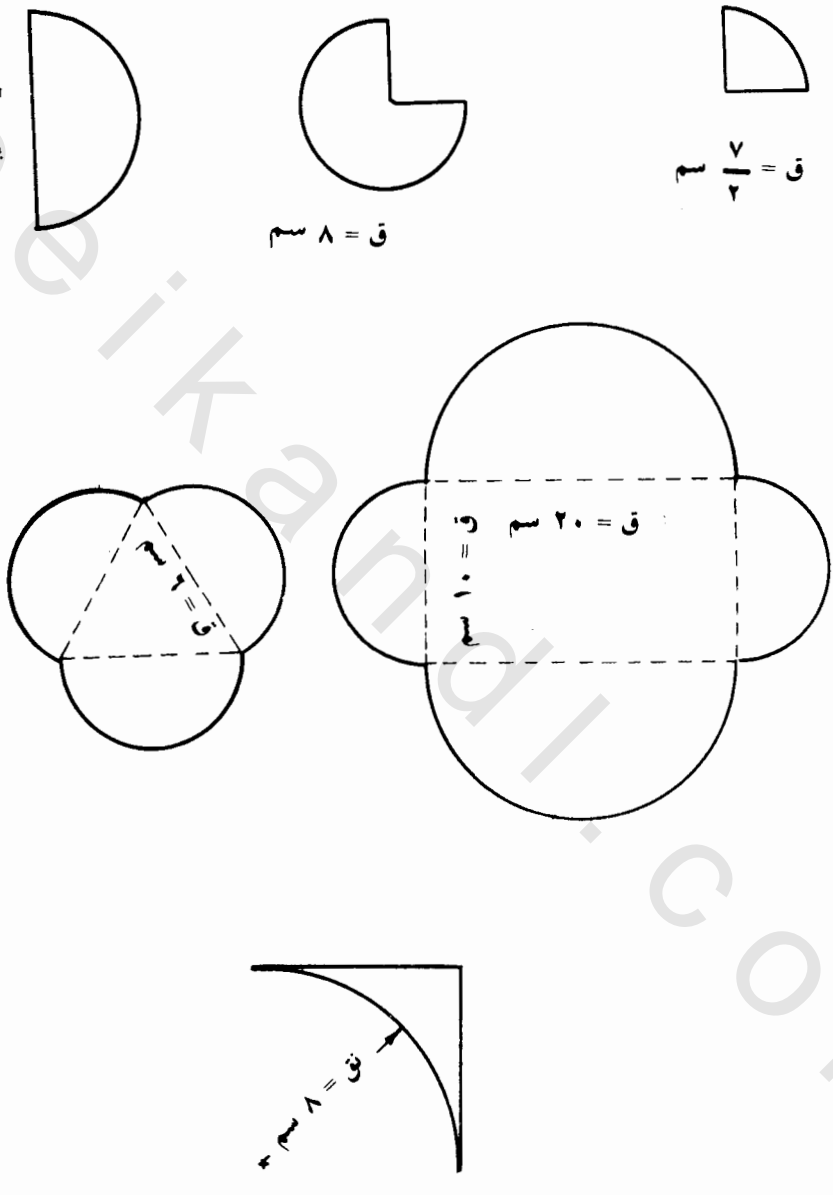
(٢) باعتبار النسبة ط = ٣,١٤٢ تقريباً ، أوجد محيط الدوائر التالية مقرباً إجابتك لأقرب ٣ علامات عشرية .

(أ) دائرة قطرها ٢٠ سم (ب) دائرة قطرها ٣٥ سم .

(جـ) دائرة قطرها ١٢ سم (د) دائرة قطرها ٣ سم .

obeikandl.com

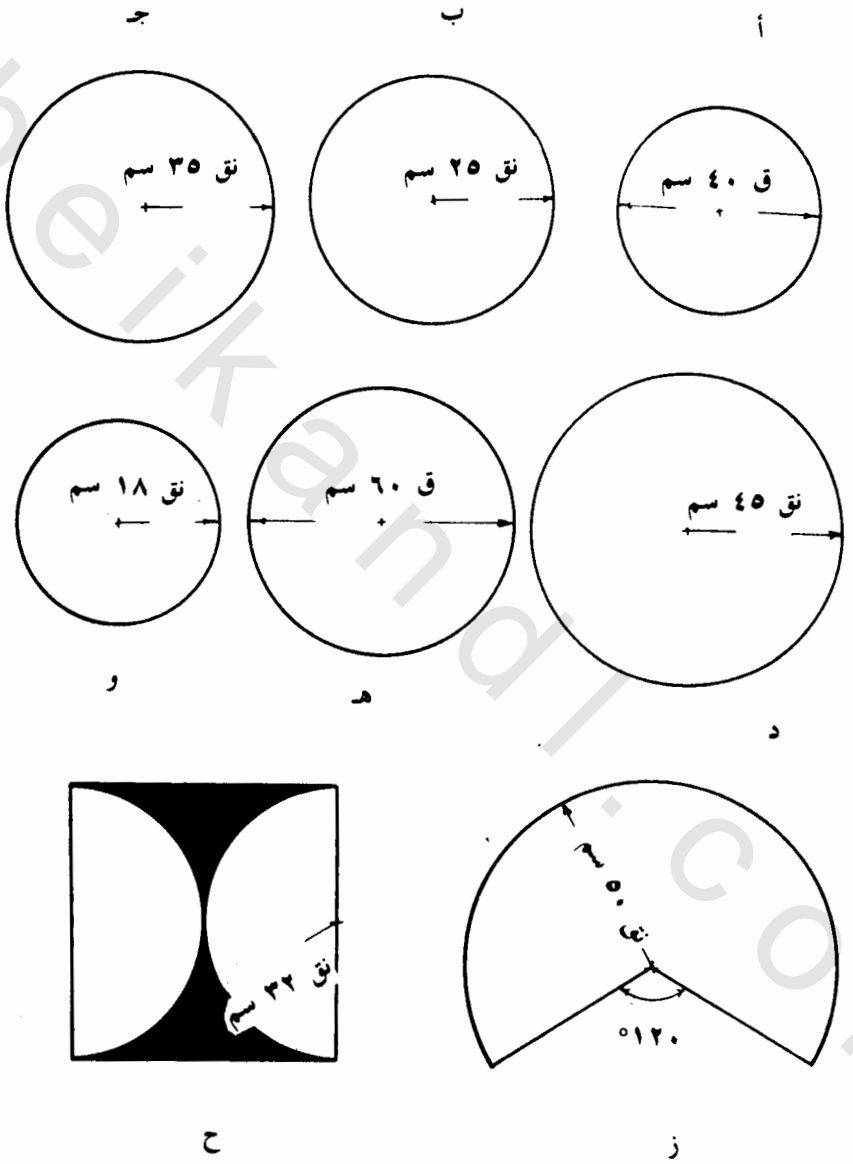
(٣) فى شكل (٩ ـ ١٤) ، وباعتبار ط = ٣,١٤٢ أوجد محيط الأشكال التالية مُقرباً الجواب لأقرب ٣ علامات عشرية .



شكل [٩ ـ ١٤]

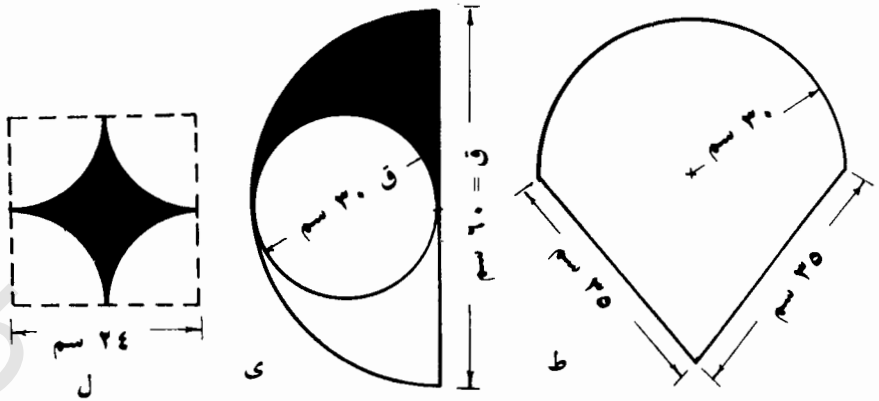
obeikandl.com

(٤) باعتبار النسبة ط = ٣,١٤٢ تقريباً ، أوجد لأقرب ٣ علامات عشرية مساحة الدوائر والأشكال الموضحة بشكل [٩ ـ ١٥] ، [المطلوب حساب مساحة الأجزاء المظللة فقط فى الأشكال المحتوية عليها] .



شكل [٩ ـ ١٥]

تابع شكل [٩ ـ ١٨]



(٥) قطعة مربعة الشكل من الكرتون ، قمنا بقص دائرة نصف قطرها ٥ سم منها ، احسب المساحة المتبقية من القطعة المربعة إذا كان طول ضلع المربع ١٢ سم .

(٦) قطعة عملة معدنية قطرها ٤ سم ، احسب مقدار المسافة التى تتدحرجها إذا دارت جول محورها ٥٠ دورة كاملة .

(٧) خرطوم حديقة طوله ١٠٠ متر ، يراد لفه حول بكرة قطرها ٣٥ سم فكم لفة كاملة يمكن للخرطوم أن يلفها حول البكرة .

(٨) دراجة قطر عجلتها ٤٠ سم فاحسب :

(أ) محيط العجلة .

(ب) المسافة التى تتحركها العجلة إذا دارت حول محورها ٥٠٠ لفة كاملة .

(٩) ساعة حائط طول عقرب الساعات بها ٢١ سم فاحسب المساحة التى يغطيها عقرب الساعات إذا تحرك :

(أ) ٦ ساعات . (ب) ٩ ساعات .

(جـ) ١٢ ساعة .

باعتبار ط = ٣,١٤٢ ، أحسب الآتى مقرباً إجابتك لأقرب ٣ علامات عشرية :

(١٠) أوجد قطر دائرة طول محيطها = ١٢٠ متر .

(١١) أوجد نصف قطر دائرة طول محيطها = ٨٨ سم .

(١٢) طول محيط عجلة هو ٤٠٠ سم فأوجد قطر هذه العجلة .

(١٣) سيارة ، طول محيط دائرة الدوران لها هى ٥٢ متر ، فاحسب أقل عرض للطريق يمكن للسيارة أن تدور به دون الإصطدام بالرصيف .

(١٤) عجلة دراجة تدور ٢٠٠ دورة حتى تقطع مسافة قدرها ٣٠٠ متر ؛ فاحسب :

(أ) محيط العجلة ، (ب) قطر العجلة .

(١٥) مساحة دائرة هو ١١٢سم^{٢} فاحسب قطر الدائرة .

(١٦) مساحة نصف دائرة هو ٩٦ سم^{٢} فاحسب نصف قطر نصف الدائرة .

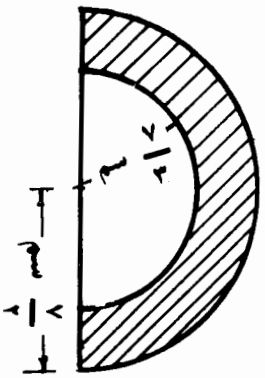
(١٧) أكمل الجدول التالى ، جدول (٩ ــ ٢) .

طول نصف قطر الدائرة	محيط الدائرة	مساحة سطح الدائرة	اعتبر ط
$\frac{٢١}{٢}$ سم	....	....	$\frac{٢٢}{٧}$
....	١١٠ متر	....	$\frac{٢٢}{٧}$
....	١٢١ سم	....	$\frac{٢٢}{٧}$
....	٦٢,٨٤ متر	....	٣,١٤٢

جدول [٩ ـ ٢]

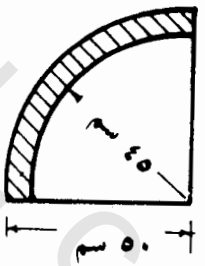
obeikandl.com

(١٨) احسب مساحة الجزء المظلل من سطح نصف الدائرة الموضح بالشكل (٩ ـ ١٦) ، اعتبر ط = ٣,١٤ .

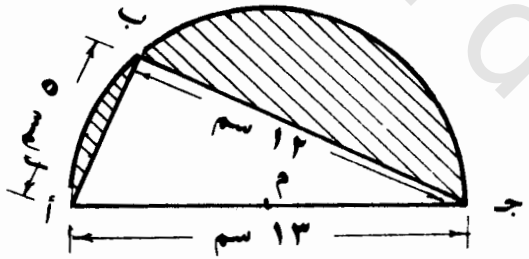


شكل [٩ ـ ١٦]

(١٩) احسب مساحة الجزء المظلل من سطح ربع الدائرة الموضح بالشكل (٩ ـ ١٧) ، اعتبر ط = $\frac{٢٢}{٧}$.



شكل [٩ ـ ١٧]

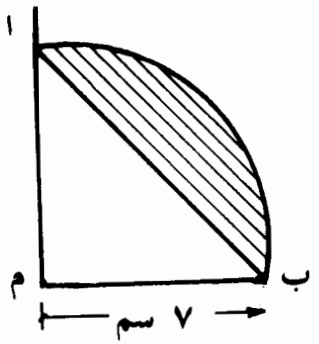


شكل [٩ ـ ١٨]

(٢٠) فى شكل (٩ ـ ١٨) مثلث قائم الزاوية فى ب مرسوم داخل دائرة مركزها م فإذا كان ا ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، ا جـ = ١٣ سم فاحسب مساحة الجزء المظلل .

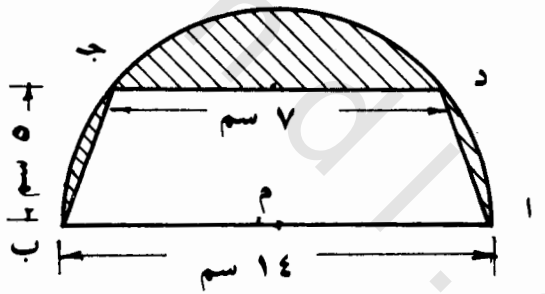
obeikandl.com

(٢١) ربع دائرة مركزها م ، احسب مساحة الجزء المظلل فيما بين الوتر ا ب والمحيط الخارجي ، كما فى شكل (٩ ــ ١٩) .



شكل [٩ ـ ١٩]

(٢٢) فى شكل (٩ ــ ٢٠) نصف دائرة مركزها م رُسم الوتر جـ د موازياً للقطر أ ب بطول ٧ سم وعلى بعد ٥ سم ، احسب مساحة الجزء المظلل .



شكل [٩ ـ ٢٠]

(٢٣) قطعة من السلك طولها ٢٦٤ سم قطعت إلى جزئين متساويين فى الطول ، استخدم الجزء الأول فى صنع مربع بينما استخدم الجزء الثانى فى صنع دائرة فاحسب :

(أ) طول ضلع المربع . (ب) نصف قطر الدائرة .

(جـ) مساحة المربع (د) مساحة الدائرة .

(هـ) النسبة بين مساحة المربع : مساحة الدائرة .