

الجزء الأول

الأعداد

Number

الكورس الأول

النسبة والتناسب وتطبيقاتها

Ratio , Proportion,

[١ - ١] النسبة : Ratio

□ تمهيد :

إذا كان طول أحد الشوارع هو ٨ كيلومتر ، بينما طول الشارع الآخر ، هو ٢ كيلومتر ، فإذا أردنا أن نقارن بينهما من ناحية الطول ، فإن المقارنة يمكن أن تكون على عدة طرق كالتالي :

١ - في صورة أطول من أو أقصر من ، كأن نقول الشارع الأول أطول من الشارع الثاني ، أو الشارع الثاني أقصر من الشارع الأول .

٢ - في صورة ، الفرق بينهما من ناحية الطول بالكيلومترات كأن نقول الشارع الأول أطول من الشارع الثاني بمقدار : ستة كيلومترات ٦ كم حيث $٨ - ٢ = ٦$.

أو الشارع الثاني أقصر من الشارع الأول بمقدار ٦ كم كذلك .

٣ - في صورة ، كم مرة (من الطول) يبلغ الشارع الأول قدر الشارع الثاني أو كم مرة (من القصر) يبلغ الشارع الثاني مقارنة بالأول .

ففي الحالة الأولى نقول : $\frac{\text{طول الشارع الأول}}{\text{طول الشارع الثاني}} = \frac{٨}{٢} = \frac{٤}{١}$

أى أن طول الشارع الأول أربعة أضعاف طول الشارع الثانى .

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{\text{طول الشارع الثانى}}{\text{طول الشارع الأول}} : \text{ وفى الحالة الثانية نقول :}$$

أى أن طول الشارع الثانى ربع الشارع الأول فى الطول .

ويُسمى الكسر : $\frac{\text{طول الشارع الأول}}{\text{طول الشارع الثانى}}$ بالنسبة بين طول الأول للثانى

$$\text{فى حين يُسمى الكسر : } \frac{\text{طول الشارع الثانى}}{\text{طول الشارع الأول}}$$

بالنسبة بين طول الثانى للأول

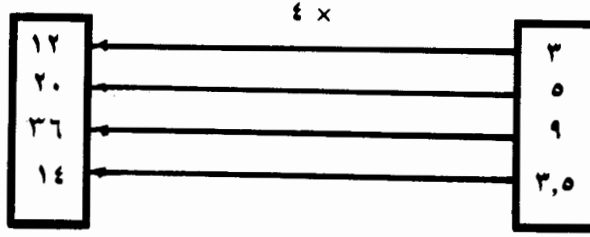
وعموماً : فإن النسبة بين مقدارين أو كميتين (وزن - حجم - طول - مساحة - محيط - عدد ، ...) ،

هى عبارة عن قسمة : المقدار (العدد) الأول على المقدار (العدد) الثانى [أو العكس : قسمة العدد الثانى على العدد الأول] .

● مثال (١) :

إذا قمنا بمقارنة مجموعتى الأعداد أو الأرقام فى الشكل [١ - ١] ، سنجد أن كل رقم فى المجموعة « ب » يعادل أربعة أضعاف الرقم المناظر أو المقابل فى المجموعة « أ » .

وبذلك يمكننا أن نقول أن نسبة الأرقام هى ١ إلى ٤ .



ب

أ

شكل [1 - 1]

[٢ - ١] التعبير عن النسبة (طرق كتابتها) :

إذا فرضنا أن العددين المراد إيجاد النسبة بينهما هما ٢ ، ٨ فإنه يمكن التعبير عن النسبة بينهما في صورتين كالتالي :

$$(١) \text{ النسبة بين } ٢ ، ٨ = \frac{٢}{٨} \text{ (كسر إعتيادي) .}$$

$$(ب) \text{ النسبة بين } ٢ ، ٨ = ٨ : ٢ \text{ (٢ إلى ٨) .}$$

$$\text{ومنها : } \therefore \frac{٢}{٨} = ٢ : ٨$$

ويلاحظ أن ٢ : ٨ هي نفسها ١ : ٤ وهي نفسها ٣ : ١٢ .

$$\text{أ، } ٢,٥ : ١٠$$

$$\text{أ، } ٤,٥ : ١٨$$

$$\text{أ، } \frac{١١}{٢} : ٢٢$$

وكل منها تعني نفس النسبة وهي ١ : ٤ ومما سبق يمكننا ملاحظة أن

النسبة يمكن كتابتها في صورة كسرية كالتالي :

$$\frac{٢ \frac{١}{٢}}{١٠} = \text{أ،} \quad \frac{٢}{٨} = \text{أ،} \quad \frac{١}{٤}$$

$$\text{أ، ألخ} \quad \frac{٥ \frac{١}{٢}}{٢٢} = \text{أ،} \quad \frac{٤ \frac{١}{٢}}{١٨} = \text{أ،}$$

وعندما نكتب النسبة بين رقمين وليكن ٧ : ١٢ = $\frac{7}{12}$

فإنه يطلق على العددين ٧ ، ١٢ بحدى النسبة .

حيث ٧ هي الحد الأول للنسبة ، ١٢ هي الحد الثاني لها .

● مثال (٢) :

ضع النسب الآتية فى أبسط صورة لها :

$$(١) ١٠ : ٨ \quad (ب) ١\frac{1}{2} : ٢\frac{1}{2} \quad (ج) ٢١ : ٦$$

● الحل :

$$(١) \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤} \quad [\text{وذلك بقسمة حدى النسبة على ٢}] .$$

$$(ب) ١\frac{1}{2} : ٢\frac{1}{2} = \frac{٣}{٢} : \frac{١١}{٢} \quad [\text{وذلك بكتابة كل من حدى النسبة فى صورة كسر}] .$$

$$\frac{٣}{٢} : \frac{١١}{٢} = ١٠ \times \frac{٣}{٢} : ١٠ \times \frac{١١}{٢} = \frac{٣}{٢} : \frac{١١}{٢} ،$$

وذلك بضرب كل من حدى النسبة فى المضاعف المشترك الأدنى وهو

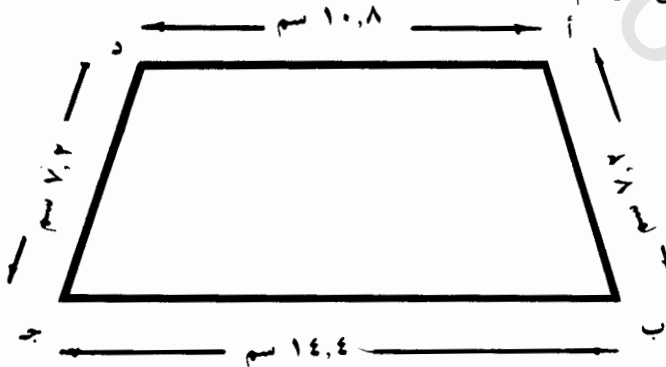
١٠ .

$$[ج] ٢١ : ٦ = ٧ : ٢ \quad [\text{وذلك بقسمة حدى النسبة على ٣}]$$

● مثال (٣) :

فى الشكل الموضح : شكل [١ - ٢] ، شبه منحرف أطوال أضلاعه

موضحة على الرسم .



شكل [١ - ٢]

فأوجد :

[أ] نسبة طول ا ب : ب ج في أبسط صورة .

[ب] ا ب : ب ج : ا د .

[ج] أكمل النسب التالية :

$$ا ب = \frac{\dots}{\dots} ب ج ،$$

$$ا د = \frac{\dots}{\dots} ب ج ،$$

$$ا ب = \frac{\dots}{\dots} ا د$$

● الحل :

$$[أ] ا ب : ب ج = ٧,٢ : ١٤,٤$$

$$= ٧٢ : ١٤٤ [بالضرب في ١٠]$$

$$= ٦ : ١٢ [بالقسمة على ١٢]$$

$$= ١ : ٢ [بالقسمة على ٦]$$

$$[ب] ا ب : ب ج : ا د = ٧,٢ : ١٤,٤ : ١٠,٨$$

$$= ٧٢ : ١٤٤ : ١٠٨$$

[بالضرب في ١٠]

$$= ٦ : ١٢ : ٩$$

[بالقسمة على ١٢]

$$= ٢ : ٤ : ٣$$

[بالقسمة على ٣]

$$[ج] ب ا = \frac{١}{٢} ب ج ،$$

$$، ا د = \frac{٣}{٤} ب ج ،$$

$$، ا ب = \frac{٢}{٣} ب ج ،$$

ويمكن إيجاد النسب السابقة من حل [ب] .

● مثال (٤) :

حصل محمد في امتحان الرياضيات على ٣ : ٢٠ من إجمالي عدد الدرجات الكلي لجميع المواد فإذا كانت النهاية العظمى لجميع الدرجات هي ٣٠٠ درجة فأوجد :

[١] عدد الدرجات التي حصل عليها في مادة الرياضيات .

[٢] إذا كانت النهاية العظمى لمادة الرياضيات هي ٦٠ درجة فكم كانت نسبة نجاح محمد في الرياضيات .

● الحل :

$$[١] \quad \frac{\text{درجة محمد في الرياضيات}}{\text{المجموع الكلي لدرجات المواد}} = \frac{٣}{٢٠}$$

∴ درجة محمد في الرياضيات = $\frac{٣}{٢٠}$ من الدرجة الكلية للمواد .

∴ درجة محمد في الرياضيات = $\frac{٣}{٢٠} \times ٣٠٠ = ٤٥$ درجة .

[٢] ∴ النهاية العظمى لمادة الرياضيات هي ٦٠ درجة .

$$\text{∴ نسبة محمد في إمتحان الرياضيات} = \frac{٤٥}{٦٠} = \frac{٣}{٤} = \frac{٧٥}{١٠٠}$$

● مثال (٥) :

صندوق به عدد من الكرات البيضاء والكرات الحمراء فإذا كانت نسبة عدد الكرات البيضاء إلى الكرات الحمراء هي ٧ : ٣ فإذا كان عدد الكرات الحمراء هو ٤٢ كرة فما عدد الكرات البيضاء .

● الحل :

$$\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الحمراء}} = \frac{٧}{٣}$$

∴ عدد الكرات البيضاء = $\frac{7}{3}$ من عدد الكرات الحمراء .

$$98 \text{ كرة} = 14 \times 7 = 42 \times \frac{7}{3} =$$

□ **ملاحظة هامة** : عند إيجاد النسبة بين كميتين أو مقدارين فإنه يجب أن يكون حدا النسبة من نفس نوع الوحدات .

● مثال (٦) :

[أ] ما هي النسبة بين طولي مستقيمين أحدهما طوله ١,٥ متراً والثاني طوله ٣٠ سم .

[ب] ما هي النسبة بين مساحتين إحداهما ٦٠٠ سم^٢ والثانية ٠,٧٥ م^٢ .

● الحل :

[أ] للمقارنة بين طولي المستقيمين فإنه يجب أن تكون الأطوال من نفس نوع الوحدات .

$$\text{فالطول الأول} = ١,٥ \text{ م} \text{ والثاني} = \frac{٣٠}{١٠٠} = ٠,٣ \text{ م}$$

$$\therefore \text{النسبة} = \frac{١,٥}{٠,٣} = \frac{١٥}{٣} \text{ [بضرب حدى النسبة فى ١٠]}$$

$$= \frac{٥}{١} \text{ [بقسمة حدى النسبة على ٣]} .$$

$$\text{أو الطول الأول} = ١,٥ = ١٠٠ \times ١,٥ = ١٥٠ \text{ سم} .$$

$$\text{والطول الثانى} = ٣٠ \text{ سم} .$$

[ب] للمقارنة بين المساحتين فإنه يجب أن تكون المساحات من نفس نوع الوحدات .

$$\text{فالمساحة الأولى} = ٦٠٠ \text{ سم}^2 = \frac{٦٠٠}{١٠٠ \times ١٠٠} = \frac{٦}{١٠٠} = ٠,٠٦ \text{ م}^2$$

$$\text{والمساحة الثانية} = ٠,٧٥ \text{ م}^2 .$$

$$\frac{60}{75} = \frac{0,6}{0,75} = \text{النسبة بين المساحتين}$$

[بضرب حدى النسبة $\times 1000$]

$$\frac{60}{75} = \frac{600}{750}$$

أو نقول : المساحة الأولى = 600 سم² .

والمساحة الثانية = 750 سم² = 100 × 100 × 75

$$= 750 \text{ سم}^2$$

$$\frac{60}{75} = \frac{600}{750} = \text{النسبة بين المساحتين}$$

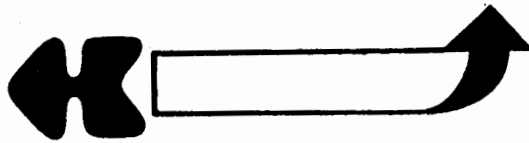
[بقسمة حدى النسبة على 10]

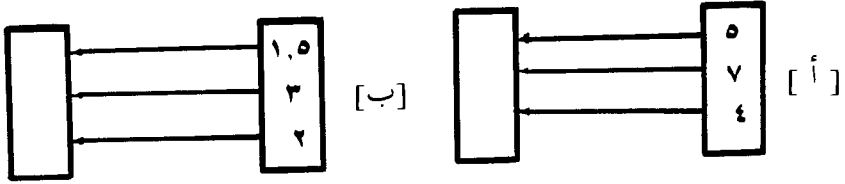
$$\frac{60}{75} = \frac{600}{750}$$

[1 - 3] تدريبات :

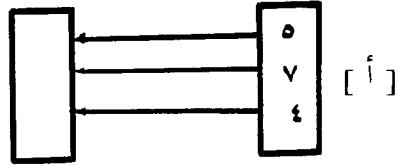
(1) أكمل المستطيلات التالية بحيث تتحقق صحة النسبة الميئة في شكل

[1 - 3] .

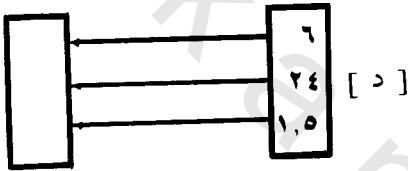




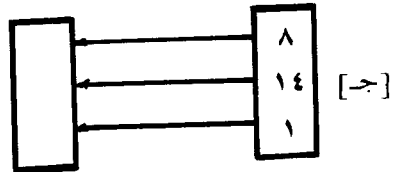
٦ : ١



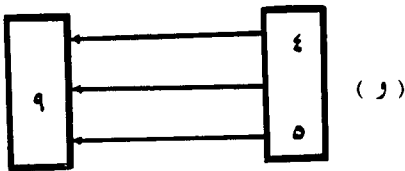
٣ : ١



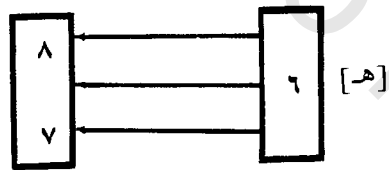
٢ : ٣



١ : ٢



٣ : ٢



٢ : ١

شکل [٣ - ١]

(٢) الأشكال المختلفة التالية المبينة في شكل [١ - ٤] تم تقسيم كل منها إلى أجزاء متساوية في المساحة والمطلوب حساب :

[أ] نسبة مساحة الجزء المظلل إلى المساحة الكلية للشكل .

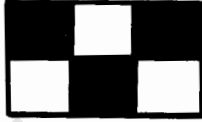
[ب] نسبة مساحة الجزء المظلل إلى مساحة الجزء الغير مظلل .

[جـ] نسبة مساحة الجزء الغير مظلل إلى المساحة الكلية للشكل .

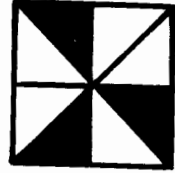
[أ]



[ب]



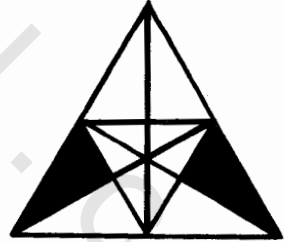
[جـ]



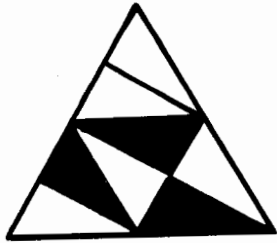
[د]



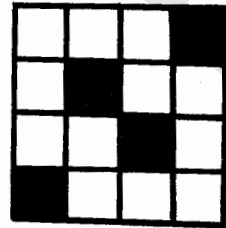
[هـ]



(و)



(ز)



شكل [١ - ٤]

(٣) ضع كلاً من النسب التالية في أبسط صورة :

[أ] ٥٤ : ٤٥	[ز] ١٥٦ : ٩١ : ٦٥
[ب] ٧٢ : ١٨	[ح] ٤٤٠ : ٧٧ : ٢٢
[ج] ١٣٢ : ٦٦	[ط] $٢\frac{1}{2}$: $١\frac{1}{2}$
[د] ٢٣١ : ١٤٧	[ك] $٤\frac{1}{2}$: ٣ : $١\frac{1}{2}$
[هـ] ١٢١ : ٧٧ : ٥٥	[ل] $١\frac{1}{2}$: $٢\frac{1}{2}$
[و] ١٨٩ : ٨١ : ٥٤	[م] $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{10}$

(٤) ضع كلاً من النسب التالية في أبسط صورة :

[أ] ٢ مم : ٢٥ سم	[ز] ٣ أسابيع : عام .
[ب] ٥٠ قرش : ٤ جنية	[ح] ٧٠ جنية : ٢١٠ جنية .
[ج] ٤ مم : ٦ سم	[ط] ١٢ سم : ٨٠ مم : ٠,٤٨ م
[د] ٢٠ دقيقة : ١ ساعة	[ك] ٣ كم : ٢,٢٥ كم : ٧٥٠ م
[هـ] ٢٥ دقيقة : ١,١٥ [ساعة وربع]	[ل] ١ اسبوع : ٥ أيام : ٢ يوم
[و] ٦ ساعة : ٣ أيام	[م] ١,٦ ج : ١,٢ ج : ٦٠ قرش

(٥) عبر عن النسب التالية في أبسط صورة لها .

[أ] $\frac{2}{4}$: $\frac{5}{4}$	[ز] $٤\frac{1}{2}$: ٣ : $١\frac{1}{2}$
[ب] $\frac{3}{4}$: $\frac{7}{8}$	[ح] $\frac{2}{4}$: $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{2}$
[ج] $\frac{7}{2}$: $\frac{1}{3}$	[ط] $\frac{2}{3}$: $\frac{7}{10}$
[د] $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{6}$	[ك] $\frac{2}{4}$: $\frac{5}{6}$
[هـ] $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{5}$	[ل] $\frac{2}{3}$: $\frac{5}{8}$
[و] $\frac{4}{12}$: $\frac{3}{7}$: $\frac{2}{3}$	[م] $\frac{3}{10}$: $\frac{7}{8}$

(٦) موظف يصرف شهرياً ٢٠٠ جنية على الغذاء ، ٧٠ جنية ملابس ، ٢٠ جنية علاج وأدوية ، ٤٥ جنية مصاريف ثرية ، ٦٥ جنيهاً إيجار مسكن فأوجد :

[أ] نسبة إنفاقه على الغذاء بالنسبة لكل ما ينفقه شهرياً .

[ب] نسبة إنفاقه على الغذاء مقارنة بما ينفقه على العلاج والأدوية .

[جـ] النسبة التي يمثلها إيجار المسكن بالنسبة للغذاء .

[د] نسبة إنفاقه على المصاريف الثرية وإيجار السكن بالنسبة لإنفاقه على الملابس .

[هـ] ما تمثله نسبة إنفاقه على الملابس مقارنة بإنفاقه على المصاريف الثرية .

(٧) يستذكر أحمد دروسه في ٤ ساعات ويلعب ساعتين ويذهب للمدرسة

ست ساعات وينام ثمان ساعات ويشاهد التلفزيون لمدة ساعتان يومياً .

فاحسب :

[أ] نسبة وقت المدرسة إلى وقت التلفزيون .

[ب] نسبة وقت التلفزيون إلى وقت اللعب .

[جـ] نسبة وقت اللعب إلى وقت المدرسة .

[د] نسبة وقت النوم إلى وقت التلفزيون والمدرسة .

[هـ] نسبة وقت المذاكرة إلى وقت المدرسة ثم إلى وقت النوم .

(٨) أكمل الجدول التالي جدول [١ - ١] :

النسبة	ما يعادلها في صورة كسرية	ما يعادلها بالنسبة المئوية
٥ : ٣	$\frac{3}{5}$	٪٦٠
٤ : ٣	؟	٪٧٥
٢٠ : ٧	؟	؟
؟	$\frac{2}{5}$	؟
؟	؟	٪٨٥
٨ : ٧	؟	؟
٣ : ٢	؟	؟
؟	$\frac{11}{20}$	؟

جدول (١ - ١)

(٩) إذا كانت نسبة التلميذات إلى التلاميذ في أحد المدارس المشتركة هي ٣ : ١ وكان عدد التلاميذ هو ٦٢٧ تلميذاً فكم يكون عدد التلميذات وكم يكون عدد تلاميذ المدرسة من الجنسين .

(١٠) قسم ٤٠ جنياً بنسبة ٣ : ١ .

(١١) قسم ١٠٠ جنياً بنسبة ٣ : ٢ .

(١٢) قسم ٤٥ متر بنسبة ٥ : ٣ .

(١٣) مثلث طول محيطه ٣٦ متراً فإذا كانت نسب أطوال أضلعه هي ٣ : ٤ : ٥ فكم يبلغ طول كل ضلع من أضلعه .

(١٤) مستطيل تبلغ نسبة طوله إلى عرضه ٤ : ٣ فكم يبلغ عرض المستطيل إذا كان طوله ٢٤ متراً .

(١٥) إذا كانت نسبة عمر محمد إلى والده هي ١ : ٥ وكان عمر محمد ٦ سنوات وستة شهور فكم يبلغ عمر والده .

(١٦) يبلغ عمر رجل ٦٠ عاماً فإذا كانت نسبة عمر زوجته إلى عمره هي $\frac{٧}{٨}$ فكم يبلغ عمر الزوجة .

(١٧) في مدينة الملاهي للأطفال كانت نسبة الحاضرين من الأطفال والأمهات والرجال هي ٧ : ٢ : ٣ فإذا كان عدد الحاضرين هو ٢٦٨٢٠ فكم يبلغ :

[أ] عدد الرجال . [ب] عدد الأمهات . [ج] عدد الأطفال .

(١٨) يراد تقسيم ١٤٠ كتاباً إلى ثلاثة مجموعات بنسبة ٢ : ٣ : ٥ فكم يبلغ عدد الكتب في كل مجموعة .

(١٩) شارك كل من محمد وأمير وأحمد في شراء عمارة بمبلغ ٢٠٠ ٠٠٠ جنيه فإذا كانت نسبة المبالغ المدفوعة من كل منهم على الترتيب هي ١ : ٣ : ٦ . فكم يبلغ مقدار ما دفعه كل منهم .

[١ - ٤] التناسب *Proportion* :

تمهيد :

إذا كان سعر كتاب ما ٥ جنيهات وأردنا معرفة سعر ٣ ، ٥ ، ٩ ، ٢٠ ،
٢٦ كتاباً فتكون النتيجة كما هو بالجدول التالي ، جدول [١ - ٢] .

عدد الكتب	ثمنها بالجنيهات
١	٥
٣	١٥
٥	٢٥
٩	٤٥
٢٠	١٠٠
٢٦	١٣٠



جدول [١ - ٢]

ومن الجدول نلاحظ أن كل عدد بالصف الثاني هو عبارة عن حاصل ضرب العدد المناظر له بالصف الأول في ٥ .

كما وأن كل عدد موجود في الصف الأول ينتج عن قسمة العدد المناظر له في الصف الثاني على ٥ ، كذلك .

ويلاحظ كذلك أن :

$$[أ] \quad \frac{130}{26} = \frac{100}{20} = \frac{45}{9} = \frac{25}{5} = \frac{15}{3} = \frac{5}{1}$$

$$[ب] \quad \frac{26}{130} = \frac{20}{100} = \frac{9}{45} = \frac{5}{25} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

في هذه الحالة يمكننا القول :

أن الأعداد الموجودة في الصف الأول متناسبة أو تتناسب مع الأعداد المناظرة لها في الصف الثاني .

مثال (١) :

أكمل الجدول التالي ، جدول [٣ - ١] ، بحيث تتناسب الأعداد في كل من العمودين .

٩	٦
٢٤	٠٠
٠٠	٥,٤
٦	٠٠
١٥	٠٠
٠٠	٧

Diagram showing a table with two columns and six rows. The first column contains the numbers 9, 24, 00, 6, 15, 00. The second column contains the numbers 6, 00, 5.4, 00, 00, 7. Above the table, there is a multiplication sign 'x' followed by three dots '...', with two curved arrows pointing from the 'x' to the first and second rows of the table. Below the table, there is a fraction $\frac{3}{2}$ followed by a multiplication sign 'x', with two curved arrows pointing from the fraction to the first and second columns of the table.

جدول [٣ - ١]

لحساب العدد الناقص في الصف الثاني ، نضرب العدد المناظر له في الصف الأول في $\frac{3}{2}$.

$$8,10 = \frac{3}{2} \times 5,4 \therefore$$

$$10,5 = \frac{3}{2} \times 7,$$

ولحساب العدد الناقص في الصف الأول نقسم العدد المناظر له في الصف الثاني على $\frac{3}{2}$ (أي نضربه في $\frac{2}{3}$) .

$$4 = \frac{2}{3} \times 6 \dots$$

$$10 = \frac{2}{3} \times 15 \dots$$

$$16 = \frac{2}{3} \times 24 \dots$$

وبذلك يصبح الجدول كالتالي ، [٤ - ١] .

٩	٦
٢٤	١٦
٨,١	٥,٤
٦	٤
١٥	١٠
١٠,٥	٧

جدول [٤ - ١]

ومن هذا الجدول نلاحظ أن :

$$\dots = \frac{10}{15} = \frac{16}{24} = \frac{6}{9}$$

وعلى هذا فإن التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر .

● مثال (٢) :

أكمل التناسبات التالية :

$$\frac{21}{30} = \frac{3}{\dots} \quad [\text{ب}]$$

$$\frac{4,5}{9} = \frac{\dots}{6} \quad [\text{د}]$$

$$\frac{42}{\dots} = \frac{7}{8} \quad [\text{أ}]$$

$$\frac{\dots}{24} = \frac{8}{8} \quad [\text{ج}]$$

● الحل :

[أ] $\frac{٤٢}{٨} = \frac{٧}{٨}$ فالعدد الذى يضرب فى ٧ ليكون الناتج ٤٢ هو ٦ .

فيكون الحد الناقص هو $٤٨ = ٦ \times ٨$

$\therefore \frac{٤٢}{٤٨} = \frac{٧}{٨}$

[ب] $\frac{٢١}{٣٥} = \frac{٣}{٣٥}$ فالعدد الذى يضرب فى ٣ ليكون الناتج ٢١ هو ٧ .

\therefore فالحد الناقص هو العدد الذى يضرب فى ٧ ليكون الناتج ٣٥ .

وواضح أنه يساوى $٥ = \frac{٣٥}{٧}$

$\therefore \frac{٢١}{٣٥} = \frac{٣}{٥}$

[ج] $\frac{٣}{٢٤} = \frac{١}{٨}$ فالعدد الذى يضرب فى ٨ ليكون الناتج ٢٤ هو ٣ .

\therefore الحد الناقص لو ضرب فى ٣ لكان الناتج ٣ هو الواحد .

$\therefore \frac{٣}{٢٤} = \frac{١}{٨}$

[د] $\frac{٤,٥}{٩} = \frac{١}{٦}$

فالعدد الذى يضرب فى ٦ ليكون الناتج ٩ هو $١\frac{١}{٢}$.

\therefore العدد الذى يضرب فى ١,٥ ليكون الناتج ٤,٥ هو ٣

$\therefore \frac{٤,٥}{٩} = \frac{٣}{٦}$

يتضح مما سبق أنه إذا ضربنا كلاً من جدى النسبة فى عدد ما أو قسمنا كل من جدى النسبة على نفس العدد فإن النسبة الأولى والنسبة الناتجة تكونان متساويتين .

أوجد الحد الناقص في النسب التالية :

$$\frac{7,5}{60} = \frac{؟}{90} \quad [ب]$$

$$\frac{8}{؟} = \frac{26}{84} \quad [د]$$

$$\frac{؟}{30} = \frac{2}{5} \quad [أ]$$

$$\frac{54}{12} = \frac{36}{؟} \quad [ج]$$

الحل :

في هذه النوعية من المسائل يمكن إيجاد الحد الناقص بطريقة أسهل من الطريقة السابقة ، وذلك بأن نفترض أن الحد الناقص هو س مثلاً ويكون الحل كالتالي :

$$[أ] \quad \frac{س}{30} = \frac{2}{5}$$

∴ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين .

والطرفين هنا هما ، ٢ ، ٣٥ ، بينما الوسطين هما ٥ ، س

$$∴ ٢ \times ٣٥ = ٥ \times س \quad (١)$$

وللحصول على قيمة س نقسم كلا الطرفين في (١) على ٥

$$∴ \frac{٢ \times ٣٥}{٥} = \frac{٥ \times س}{٥}$$

$$∴ ١٤ = س$$

∴ النسبة هي $\frac{14}{30} = \frac{2}{5}$

$$[ب] \quad \frac{7,5}{60} = \frac{س}{90}$$

$$∴ 7,5 \times 90 = 60 \times س$$

$$∴ س = \frac{7,5 \times 90}{60} = \frac{22,5}{2} = 11,25$$

$$[ح] \frac{٥٤}{١٢} = \frac{٣٦}{س}$$

$$\therefore ١٢ \times ٣٦ = ٥٤ س$$

$$\therefore س = \frac{١٢ \times ٣٦}{٥٤} = ٨$$

$$\therefore \text{النسبة هي } \frac{٥٤}{١٢} = \frac{٣٦}{٨}$$

$$[د] \frac{٨}{س} = \frac{٢٦}{٨٤}$$

$$\therefore ٨ \times ٨٤ = ٢٦ س$$

$$\therefore س = \frac{٨ \times ٨٤}{٢٦} = \frac{٣٣٦}{١٣} = \frac{١١}{١٣} \times ٢٥$$

● مثال (٤) : على التقسيم التناسبي Proportional Parts

إذا كان لدينا ٨٠ جنيهاً ويراد تقسيمها إلى جزئين بنسبة ٢ : ٣ .

في هذه النوعية من المسائل نجمع حدى النسبة ٢ + ٣ = ٥ وبذلك فإنه يمكننا تقسيمها مبدئياً إلى خمسة أجزاء متساوية ولإيجاد قيمة كل جزء من هذه الأجزاء الخمسة نقسم المبلغ الكلى ٨٠ على ٥ فنحصل على قيمة الجزء .

$$\therefore \text{قيمة الجزء الواحد} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦ \text{ جنيهاً .}$$

وبذلك نقسم الخمسة أجزاء المتساوية هذه إلى جزئين جزء به

$$٣٢ = ١٦ \times ٢$$

$$\text{و جزء به } ٤٨ = ١٦ \times ٣$$

$$= ٨٠ = \text{الإجمالى .}$$

ونلاحظ أن $\frac{٢}{٣} = \frac{٣٢}{٤٨}$ وهذا تأكيد لصحة الإجابة .

● مثال (٥) : على التناسب المباشر *Direct proportion* :

يكون هناك تناسب مباشر بين أى كميتين ، لو أن أى زيادة (أو نقصان) في إحدى الكميتين يناظره زيادة أو نقصان بنفس النسبة في الكمية الأخرى .

ومثالنا هذا يوضح هذه النوعية من المسائل :

يبلغ سعر شراء ٩ كتب ٢٧ جنيهاً فكم يكون :

(أ) سعر شراء ٧ كتب .

(ب) سعر شراء ١١ كتاب .

ويمكن حل هذه النوعية من المسائل بطريقتين .

◀ الطريقة الأولى :

نوجد سعر شراء كتاب واحد ، ثم نوجد سعر شراء عدد الكتب المطلوب ،

، سعر شراء ٩ كتب = ٢٧ جنيهاً .

∴ سعر شراء كتاب واحد = $\frac{27}{9} = 3$ جنيهات .

ومن ثم ،

∴ سعر شراء ٧ كتب = $3 \times 7 = 21$ جنيهاً .

، سعر شراء ١١ كتاب = $3 \times 11 = 33$ جنيهاً .

◀ الطريقة الثانية :

ويطلق عليها الطريقة الكسرية *Fractional method*

وذلك بأن نوجد التكلفة مباشرة وذلك بالتعبير عن الرقم المطلوب ككسر

من العدد الأصلي ثم إيجاد قيمة هذا الكسر من التكلفة الكلية .

[أ] تكلفة شراء ٧ كتب يمكن إعتبارها $\frac{٧}{٩}$ من سعر شراء ٩ كتب
ومن ثم :

$$\frac{٧}{٩} \text{ من } ٢٧ \text{ جنياً} = \frac{٧}{٩} \times ٢٧ = ٢١ \text{ جنياً} .$$

∴ تكلفة شراء ٧ كتب = ٢١ جنياً .

[ب] تكلفة شراء ١١ كتاب :

$$= \frac{١١}{٩} \times ٢٧ = ٣٣ \text{ جنياً} .$$

◀ مثال (٦) :

تحتاج سيارة ما إلى ٢٠ لتر بنزين لقطع مسافة ٢٥٠ كيلومتر فاحسب :

[أ] كمية البنزين اللازمة لقطع مسافة ٧٥ كيلومتراً .

[ب] المسافة التي تقطعها السيارة إذا استخدمنا ٣٧ لتر بنزين .

◀ الحل :

من الواضح أن كمية البنزين تتناسب مع المسافة المقطوعة أي أن :

$$\frac{\text{المسافة المقطوعة أولاً}}{\text{المسافة المقطوعة ثانياً}} = \frac{\text{كمية البنزين الأولى}}{\text{كمية البنزين الثانية}}$$

[أ] فإذا رمزنا لكمية البنزين ثانياً بالرمز س

$$\frac{١٠}{٣} = \frac{٢٥٠}{٧٥} = \frac{٢٠}{\text{س}} \quad \therefore$$

$$\therefore ١٠ \text{ س} = ٢٠ \times ٣ = ٦٠$$

$$\therefore \text{س} = ٦ \text{ لتر}$$

[ب] وإذا رمزنا للمسافة المقطوعة ثانياً بالرمز ص مثلاً :

$$\frac{٢٥٠}{\text{ص}} = \frac{٢٠}{٣٧} = \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٢٥٠ \times ٣٧}{٢٠} = ٤٦٢,٥ \text{ كيلومتراً}$$

[١ - ٥] تدريبات :

(١) سيارة يمكنها أن تسير ١٨٠ كم مستخدمة ١٥ لتراً من البنزين فما المسافة التي تسيرها باستخدام ٢٥ لتراً من البنزين .

(٢) موظف آلة كاتبة يمكنه، أن يكتب ٤٢٥ كلمة في ٥ دقائق . فكم كلمة يمكن أن يكتبها في ١١ دقيقة .

(٣) كتاب به ٣٦٠ صفحة ويبلغ سمكه ٤,٨ سم فاحسب :

[أ] كم يبلغ سمك كتاب به ٣٠٠ صفحة من نفس نوع الورق .

[ب] كم عدد الصفحات في كتاب سمكه ٤ سم من نفس نوع الورق .

(٤) شمعة طولها ٤٠ سم تحترق في مدة قدرها ٦ ساعات فكم يلزم من الوقت لإحتراق شمعة من نفس السمك بطول ٥٠ سم .

(٥) يبلغ سعر ١٢ بيضة ١٨٠ قرشاً فاحسب :

[أ] كم بيضة يمكن شراؤها بمبلغ ٩ جنيهات .

[ب] كم يبلغ سعر ٣٥ بيضة .

(٦) يلزم ٥ دقائق لعلی ١,٥ لتر مياه فاحسب :

[أ] كم يلزم لعلی ٣,٥ لتر مياه .

[ب] كم لتراً يمكن غليها في ٩ دقائق .

(٧) سيارة تسير بسرعة منتظمة تقطع ٧٥ كيلومتر في ٥٠ دقيقة فاحسب :

[أ] في كم من الوقت يمكنها قطع مسافة ١١٠ كيلومترات .

[ب] المسافة التي تقطعها إذا سارت لمدة مقدارها ٣٠ دقيقة .

(٨) يلزم ٢٠ عامل لجني محصول الطماطم في ٤ فدادين لمدة يوم عمل (٨ ساعات) فاحسب :

- [أ] كم من العمال يلزم لجنى محصول الطماطم فى يوم ونصف .
- [ب] الوقت اللازم لجنى المحصول إذا كان عدد العمال ٣٠ عاملاً .
- (٩) يلزم لتغطية نفقات إحدى الرحلات التى تتكون من ٤٠ شخصاً أن يدفع كل شخص منهم ٢,٥ جنيه فإذا تغيب ١٥ شخصاً عن الرحلة فكم يلزم أن يدفع كل واحد من الباقى .
- (١٠) يلزم لدهان أحد المنازل ، عامل واحد لمدة تسعة أيام (اليوم ٨ ساعة عمل) ، فكم يلزم من الأيام لإكمال دهان المنزل إذا كان العامل سيعمل لمدة ٦ ساعات فقط .
- (١١) يلزم لإطعام ٨ حصان ، لمدة ١٥ يوماً ، طن واحد من الغذاء ، فكم يوماً تكفى لإطعام ١٠ حصان نفس كمية الغذاء .
- (١٢) أيهما أفضل : أن نشتري باكو شيكولاتة وزنه ٣٠ جرام بسعر ٧٥ قرشاً أم باكو شيكولاتة من نفس النوع وزنه ١٥٠ جم بسعر ٣٢٥ قرشاً .
- [لحل هذه النوعية من المسائل يلزم المقارنة بين كميتين متساويتين من الشيكولاتة] .
- (١٣) يتم إنتاج نوع من العصير فى ثلاث أحجام مختلفة من العبوات :
- [أ] زجاج ذات حجم ١٥٠ سم^٣ بسعر ٥٠ قرشاً .
- [ب] زجاج ذات حجم ٢٥٠ سم^٣ بسعر ٨٠ قرشاً .
- [ج] زجاجة ذات حجم ٤٥٠ سم^٣ بسعر ١٣٠ قرشاً .
- فأيهما أكثر وفراً إذا رغبتنا فى الشراء من هذا النوع من العصير .



[١ - ٦] تطبيقات التناسب :

للتناسب تطبيقات كثيرة في مختلف نواحي الحياة اليومية والعادية وفي الحسابات وسيقتصر تعرضنا هنا لبعض هذه التطبيقات مثل استخدامه في رسم اللوحات والخرائط "مقياس الرسم" وفي عمليات التقسيم التناسبي وفي حسابات الشركات .

[١ - ٧] مقياس الرسم :

عند رسم خريطة أو لوحة رسم لتمثيل مساحة أرض كبيرة أو مجسم كبير فإنه من المحال رسمها بنفس الأبعاد على ورقة الرسم ولعمل هذا وبحيث يكون الرسم دقيقاً على قدر الإمكان فإننا نقوم بتصغير الأبعاد الرئيسية لمساحة الأرض أو للمجسم تصغيراً مناسباً يكفي لرسمها على ورقة الرسم .

وتسمى نسبة التصغير (أو التكبير) هذه بمقياس الرسم أو نسبة الخريطة

. Map Ratio

ويتم عمل الخرائط واللوحات بمقاييس رسم كثيرة للعديد من الأغراض ويتوقف مقياس الرسم على مساحة أو حجم أو كبر الشيء المراد تمثيله على الخريطة أو الرسم .

فمثلاً : إذا قلنا أن خريطة مرسومة بمقياس رسم ١ : ٧٠٠ ٠٠٠ فإن هذا يعني أن كل ١ سم على الخريطة يمثل ٧٠٠ ٠٠٠ سم في الحقيقة - أي ٧٠٠ ٠٠٠ متر أي ٧ كيلومتر .

فإذا كانت المسافة بين القاهرة وطنطا ٩٠ كيلومتر على الطبيعة فإنه يمكن تمثيلها على خريطة مقياس رسمها ١ : ٩٠٠ ٠٠٠ بمسافة تساوي ١٠ سم حيث يمثل كل ١ سم على الخريطة ٩ كيلومتر على الطبيعة .

وإذا رسمنا خريطة ما بمقياس رسم ١ : ٧٠٠٠ فإن هذا يعني أن كل ١ سم على الخريطة يُمثل ٧٠٠٠ سم في الحقيقة أي يُمثل ٧٠ متراً .

ومقياس رسم مثل هذا يصلح لرسم خرائط ذات مساحات أصغر من السابقة ولكنه يُظهر المساحة بتفاصيل أكثر وعلى هذا فمقياس رسم ١ : ٧٠٠٠ يصلح لرسم شارع مثلاً .

◀ مثال (١) :

خريطة مقياس رسمها ١ : ٥٠٠٠ فاحسب :

[أ] كم يكون الطول الحقيقي لمسافة ٥ سم على الخريطة .

[ب] ما هي المسافة على الخريطة التي تمثل $\frac{1}{2}$ كيلومتر .

◀ الحل :

∴ ١ سم يمثل ٥٠٠٠ سم .

أى كل ١ سم يمثل $\frac{٥٠٠٠}{١٠٠}$ = ٥٠ متراً في الحقيقة

∴ الطول على الرسم : الطول الحقيقي = ١ : ٥٠٠٠

، العرض على الرسم : العرض الحقيقي = ١ : ٥٠٠٠

، أى مسافة على الرسم : المسافة المناظرة الحقيقية = ١ : ٥٠٠٠

∴ [أ] ٥ سم على الخريطة = $٥٠ \times ٥ = ٢٥٠$ متراً في الحقيقة .

[ب] $\frac{1}{2}$ كيلومتر = $\frac{1}{2} \times ١٠٠٠ = ١٥٠٠$ متراً .

، ١٥٠٠ متراً في الحقيقة كل ٥٠ متراً منها يمثلها ١ سم في الخريطة .

∴ $٣٠ = \frac{١٥٠٠}{٥٠}$ =

∴ ٣٠ سم على الخريطة تمثل $\frac{1}{2}$ كيلومتر في الحقيقة .

مما سبق نجد أن :

$$\text{الطول في الرسم} = \text{الطول الحقيقي} \times \text{مقياس الرسم}$$

[١ - ٨] تدريبات على مقياس الرسم :

(١) في الخريطة الميينة في شكل [١ - ٥] ، تظهر الطرق التي تصل بين خمسة مدن مختلفة : فاحسب :

- [أ] المسافة بين المدينة رقم (١) والمدينة رقم (٥)
- [ب] المسافة بين المدينة رقم (١) والمدينة رقم (٤)
- [جـ] المسافة بين المدينة رقم (٣) والمدينة رقم (٥)
- [د] المسافة بين المدينة رقم (٢) والمدينة رقم (٣)
- [هـ] المسافة بين المدينة رقم (٤) والمدينة رقم (٢)
- [و] المسافة بين المدينة رقم (٢) والمدينة رقم (٥)

(٢) احسب مقياس الرسم للخرائط التالية :

- [أ] [٤ سم على الخريطة تُمثل ١,٥ كيلومتر .
- [ب] [٣,٥ سم تمثل ٧ كيلومتر .
- [جـ] [١٥ كم ممثلة بـ ١٠ سم على الخريطة .
- [د] [٢,٥ سم تمثل ١٠ كيلومتر .
- [هـ] [١٥٠ كم ممثلة بـ ٥ سم على الخريطة .
- [و] [٣ مم على الخريطة تمثل ٩ كيلومتر .

(٣) فى إحدى الخرائط كان مقياس الرسم ١ : ٥٠٠ ٠٠٠ فاحسب :

[أ] المسافة الحقيقية التى تناظر ٥ سم على الخريطة .

[ب] ما هى المسافة على الخريطة التى تناظر ٥ كم على الطبيعة .

(٤) على خريطة رسمت بمقياس رسم ١ : ٢٠٠ ٠٠٠ احسب المسافة الحقيقية التى يمثلها خط طوله ١٥ سم .

[١ - ٩] نماذج الموديلات Scale, Models :

بنفس طريقة عمل الخرائط فإن الموديلات يمكن عملها بمقياس رسم بهذه الطريقة ، فإن النموذج يتم بناؤه أو تصنيعه بالتناسب مع الأصل .

مثل نماذج الطائرات والسيارات والقطارات والسفن والأبراج والصواريخ والمباني التى تصنع لأغراض التعليم أو كلعب للأطفال أو كدعاية للشركات والمصانع .

◀ مثال :

يتم إنتاج نموذج (موديل) سيارة بنسبة ١ : ٥٠ من حجمها الكلى

[أ] فما طول جزء الموديل الذى يمثل متراً واحداً من السيارة الحقيقية .

[ب] ما طول جزء السيارة الحقيقى الذى يُمثله ٧ سم على النموذج .

◀ الحل :

[أ] . . . الموديل : الحجم الحقيقى

يكون ١ : ٥٠

أى أن كل ٥٠ سم على السيارة الحقيقية تكون ممثلة بـ ١ سم على الموديل .

. . . ١٠٠ سم على السيارة الحقيقية تمثل بـ ٢ سم على الموديل .

[ب] . . . ١ سم على الموديل يمثل ٥٠ سم على السيارة الحقيقية .

∴ ٧ سم على الموديل تُمثل ٧×٥٠ سم على السيارة الحقيقية .
أى تمثل ٣,٥ متراً على السيارة الحقيقية .

[١ - ١٠] تدريبات على نماذج الموديلات :

(١) سيارة طولها ٤,٥ متر وعرضها ١٨٠ سم يراد عمل نموذج لها بنسبة ١ : ٣٠ فاحسب طول وعرض النموذج المراد تصنيعه .

(٢) عند صنع نموذج لإحدى الطائرات كان طول النموذج ٣٠ سم وكان طول الطائرة الحقيقية ٦٠ متراً وعرضها ٣٠ متراً فاحسب :

[أ] نسبة مقياس الرسم أو النموذج .
[ب] عرض النموذج .

(٣) سفينة طولها ١٨٠ متراً تم عمل نموذج لها فكان طوله ٣٠ سم وعرضه ١٢ سم فاحسب :

[أ] نسبة تصغير النموذج .
[ب] عرض السفينة الحقيقية .



الكرس الثاني

القوى والأسس

Powers and indices

[٢ - ١] تعريف Definition :

يعرف أس أى عدد أو بمعنى آخر الأس المرفوع له العدد بأنه عدد مرات ضرب العدد فى نفسه، ويتضح ذلك من الأمثلة التالية :

◀ مثال (١) :

$$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$$

هنا تم ضرب العدد ٥ فى نفسه ٤ مرات .

ويطلق على الرقم ٤ هنا بأنه أس العدد ٥ أى عدد مرات ضرب العدد ٥ فى نفسه.

وعموماً فإن الأس يستعمل للدلالة على عدد مرات ضرب العدد فى نفسه .

ويكتب هذا الرقم فوق العدد ذاته لليسار قليلاً فمثلاً :

٥٦ معناها أن العدد ٦ مضروب فى نفسه ٥ مرات .

٦٧ معناها أن العدد ٧ مضروب فى نفسه ٦ مرات .

حيث $٥٦ = ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦$ (خمس مرات) .

$$٧٧٧٦ =$$

٦٧ $= ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧$ (ست مرات) .

$$١١٧٦٤٩ =$$

وكذلك $26 = 6 \times 6 = 36$ (مرتان) .

$36 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ (ثلاث مرات) .

ويسمى الأس الثاني لأى عدد « مربع العدد - تربيع » .

بينما يُسمى الأس الثالث لأى عدد « مكعب العدد - تكعيب » .

وكذلك $6,7 \times 6,7 \times 6,7$ يمكن كتابتها $(6,7)^3$ أى مكعب العدد $6,7$

$\therefore 300,763 = (6,7)^3 = 6,7 \times 6,7 \times 6,7$.

بينما $(6,7)^2 = 6,7 \times 6,7 = 44,89$ مربع العدد $6,7$

وهناك قوى أو أسس أكبر من $3,2$ أى أكبر من مربع العدد ومن مكعب العدد .

وقد تكون هذه القوى أو الأسس أعداداً صحيحة أو أعداداً كسرية .

[٢ - ٢] الأسس والقوى الأكبر من مربع العدد ومن مكعب العدد :

◀ مثال (١) :

إذا قلنا $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

فإنها يمكن أن تكتب 2 مرفوعة لأس 5 أى 2^5 أو الأس الخامس للعدد 2 .

$\therefore 32 = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

◀ مثال (٢) :

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ يمكن أن تكتب 3 مرفوعة لأس 6 أى

3^6 أو الأس السادس للعدد 3 .

$\therefore 729 = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

ومن المفيد أن نرى قوى العدد ٢ والعدد ١٠ مرفوعة للقوى المختلفة في
الجدول (٢ - ١)، (٢ - ٢)؛

٢	=	٢	=	١٢
٤	=	٢ × ٢	=	٢٢
٨	=	٢ × ٢ × ٢	=	٣٢
١٦	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	٤٢
٣٢	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	٥٢
٦٤	=	٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢	=	٦٢

جدول [٢ - ١]

قوى العدد ٢

١٠	=	١٠	=	١١٠
١٠٠	=	١٠ × ١٠	=	٢١٠
١٠٠٠	=	١٠ × ١٠ × ١٠	=	٣١٠
١٠٠٠٠	=	١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠	=	٤١٠
١٠٠٠٠٠	=	١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠	=	٥١٠
١٠٠٠٠٠٠	=	١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠	=	٦١٠

جدول [٢ - ٢]

قوى العدد ١٠

ملاحظة: أى عدد مرفوع للأس صفر يساوى « واحد صحيح » ولا
يساوى صفر وأن هذا لا يعنى أن العدد مضروب في نفسه صفر مرة .

$$= ٣٢ \div ٣٦ \text{ [هـ]}$$

$$= ٨٢ \div (٥٣ \times ٣٤) \text{ [و]}$$

$$= ٢٤ \div ٦٢ \text{ [ز]}$$

$$= ٤ \div ٣٤ \text{ [ح]}$$

$$= ٥٦ \div ٨٦ \text{ [ط]}$$

(٤) ضع ما يلي في صورة أسس مرفوعة للأساس ١٠ .

$$١٠٠٠٠٠٠ \text{ [ب]} \quad ١٠٠٠٠٠ \text{ [أ]}$$

$$١٠٠٠٠٠٠ \text{ [د]} \quad ١٠٠٠٠٠ \text{ [ح]}$$

(٥) ضع ما يلي في صورة أسس مرفوعة للأساس ٢

$$٢٥٦ \text{ [ب]} \quad ٦٤ \text{ [أ]}$$

$$١٠٨٠ \text{ [هـ]} \quad ٥١٢ \text{ [ح]}$$

(٦) أوجد قيمة ما يلي :

$$= ٣١٠ \text{ [أ]}$$

$$= ٦١٠ \text{ [ب]}$$

$$= ٩١٠ \text{ [ح]}$$

$$= ١٠ \text{ [د]}$$

$$= ١١٠ \text{ [هـ]}$$

$$= ٧١٠ \text{ [و]}$$

(٧) استخدم الآلة الحاسبة وحاول إيجاد قيمة ما يلي :

$$= (١,٣)^\circ \text{ [أ]}$$

$$= ٣٧٥ \text{ [ب]}$$

$$= (٥,٢)^٣ \text{ [ح]}$$

$$= {}^4(29, 3) [\text{د}]$$

$$= {}^0(0, 7) [\text{هـ}]$$

$$= {}^1(2, 20) [\text{و}]$$

$$= {}^3(0, 99) [\text{ز}]$$



الدرس الثالث

اساس الأعداد

Number bases

[٣ - ١] مقدمة :

يحتاج الإنسان حالياً ومنذ العصور الأولى للتاريخ إلى وسيلة تمكنه من عد وحصر ما يمتلكه ولإجراء عمليات المبادلة التجارية ومع تقدم البشرية وزيادة معارف الإنسان وحجم التجارة والسلع المتداولة كان لزاماً من معرفة نظام لندوين وتسجيل وحصر الممتلكات والبضائع والأرباح والخسارة .

[٣ - ٢] رموز وأشكال الأعداد :

قديمًا كانت عملية العد تتم بواسطة رموز أو أشكال يتم تشكيلها على الصخور والحجارة أو على الورق ومع تطور البشرية عرف الإنسان النظام المعمول به حالياً لرموز الأرقام وهو في الأساس نظام هندي عربى النشأة .

وفي هذا النظام ، هنالك عشرة رموز للأرقام لا غير وبكتابتها بطرق معينة يمكن الحصول على أى عدد مهما كبر أو صغر .
وهذه الرموز هي :

صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

ويُعرف هذا النظام بالنظام العشري للأرقام أو بالقاعدة العشرية (النظام الدينارى) **dinary numbers** حيث أنه يستخدم عشرة رموز به السابق ذكرها .

وعند الرغبة في تسجيل أى عدد أكبر من ٩ فإنه يتم الإستعانة بتركيبة من الأعداد يراعى فيها موقع كل عدد .

والعدد التالى للعدد ٩ هو ١٠ ويلاحظ أنه مُركب من عددين (صفر ، ١) ويأتى بعد ذلك بقية سلسلة الأعداد :

١١ (١ ، ١) ، ١٢ (١ ، ٢) ، ١٣ (١ ، ٣) وهكذا حتى ١٩ (١ ، ٩)

ويأتى بعد ذلك ٢٠ (صفر ، ٢) ، ٢١ (١ ، ٢) وهكذا ..

والعدد ٩٩ (٩ ، ٩) ويأتى بعد ذلك ١٠٠ (صفر ، صفر ، ١) .

وهكذا ١٠١ (واحد ، صفر ، واحد) ، ...

ثم العدد ٩٩٩ (تسعة ، تسعة ، تسعة) وهى أعداد مكونة من ثلاثة خانات .

أما الأعداد ابتداء من ١٠٠٠ ، ١٠٠١ ، ١٠٠٢ وحتى ٩٩٩٩ فهى مكونة من أربعة خانات ، وهكذا ..

[٣ - ٣] أساسات أخرى للأعداد :

من الممكن أن نستخدم نظم أخرى لأسس الأعداد غير النظام العشرى الذى تعودنا عليه جميعاً .

فإذا استعملنا النظام التساعى للأرقام ذو الأساس ٩ سنجد أن الأعداد فى هذا النظام تسير بطريقة متشابهة للنظام العشرى ولكن بدون استخدام العدد ٩ كالتالى :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

[وهى أساس الأرقام بالنظام التساعى]

أما العدد الذى يناظر ٩ فلن يكون بطبيعة الحال ٩ ولكنه سيكون مكوناً من رقمين (٠ ، ١) وهو ١٠ .

ويلاحظ أن ١٠ في هذا النظام لا تعنى ولا تساوى ١٠ في النظام العشري .

ويأتى بعد ذلك ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨ ،
٢٠ [وعشرين هنا لا تعنى ولا تساوى عشرين بالنظام العشري] .

ثم ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠ .

[٣٠ هنا لا تساوى ٣٠ بالنظام العشري]

وهكذا حتى نصل إلى ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ١٠٠ .

[خلاف ١٠٠ بالنظام العشري]

وإذا قمنا بعمل مقارنة بين النظام العشري للأرقام والنظام التساعى للأرقام ابتداء من العدد ١ وحتى ١٦ مثلاً نجد الآتى كما فى جدول [١ - ٣] .

١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	النظام العشري الأساس ١٠
١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	النظام التساعى الأساس ٩

جدول [١ - ٣]

فالعدد ١٦ يكتب بالصورة التالية فى الأساس ٩ : ١٧_٩

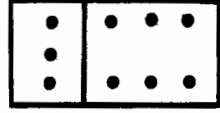
أى (سبعة ٦ واحد للأساس ٩) .

وعلى ذلك فإن ١٠١٦ = ١٧_٩

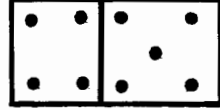
وسنرى فى الجدول التالى بعض الأمثلة لأساسات أخرى للأعداد جدول

[٢ - ٣] .

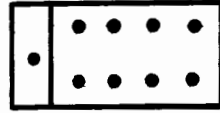
ستات وحدات
 ١ ٣ = ١٣ للأساس ٦



خمسات وحدات
 ١ ٤ = ١٤ للأساس ٥



أربعات وحدات
 ٢ ١ = ٢١ للأساس ٤



شكل [٣ - ١]

حاول التكملة على نفس النمط للأساس ٨ وللأساس ٧ .

[٣ - ٤] تدريبات :

(١) على نفس نمط المثال السابق اذكر الأساس المستخدم وكم عدد الوحدات الموجودة إذا قمنا بتسجيلها كما في الجدول التالي جدول [٣ - ٣] .

وحدات	ثمانيات
٥	٣

[أ]

جدول [٣ - ٣ - أ]

وحدات	خمسات
٣	٢

[ب]

جدول [٣ - ٣ - ب]

وحدات	ثلاثات
٢	٣

[ج]

جدول [٣ - ٣ - ج]

وحدات	ستات
٤	٣

[د]

جدول [٣ - ٣ - د]

(٢) أكمل الناقص في الجدول التالي جدول (٣ - ٤) .

وحدات	عشرات	مئات (عشرة × عشرة)	الأساس ١٠
وحدات	ثلاثات	تسعات (٣ × ٣)	الأساس ٣
وحدات	أربعات	ستة عشرات (٤ × ٤)	الأساس ٤
...	الأساس ٥
...	الأساس ٦
...	الأساس ٨

جدول [٣ - ٤]

(٣) اكتب من ١ إلى ٣٠ في أنظمة الأرقام التالية .

- (أ) نظام الأرقام ذو الأساس ٧ .
- (ب) نظام الأرقام ذو الأساس ٥ .
- (ج) نظام الأرقام ذو الأساس ٤ .

التحويل لأنظمة أعداد ذات أساسات أخرى :

- (٤) حول الرقم ٢٥ في النظام العشري إلى :
- (أ) الأساس ٤ (ب) الأساس ٥ (ج) الأساس ٨
- (٥) حول الرقم ٤٠ في النظام العشري (الديناري) إلى :
- (أ) الأساس ٣ (ب) الأساس ٧ (ج) الأساس ٥
- (٦) حول الأرقام التالية في النظام الديناري إلى النظام ذو الأساس ٣ :
- (أ) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) ٣٩

(٧) حول الأرقام التالية في النظام الدينارى إلى النظام ذو الأساس ٦ :
(أ) ٤٤ ، ١٠٠ ، ١٥٤ .

(٨) حول الأرقام التالية في النظام الدينارى إلى النظام ذو الأساس ٨ :
(أ) ٧٥ (ب) ٨٨ (ج) ١٢٣

(٩) أكمل الجدول التالى : جدول [٥ - ٣] :

وحدات	ستات	ستات وثلاثون	
			(أ) ١.٥٠
			(ب) ١.٧٨
			(ج) ١.١٢٥

جدول [٥ - ٣]

وحدات	خمسات	خمسات وعشرون	
			(د) ١.٣٢
			(هـ) ١.٦٥
			(و) ١.١٢٤

تابع جدول [٥ - ٣]

وحدات	أربعات	ستات عشر	
			١.٢١ (ز)
			١.٢٦ (ح)
			١.٥٠ (ط)

تابع جدول [٥ - ٣]

[٥ - ٣] تحويل الأرقام ذات الأساس ١٠ إلى أرقام ذات أنظمة أسس أخرى :

يمكننا بكتابة الأرقام أسفل بعضها في كل أساس أن نكتشف العدد المناظر في أساس ما إلى العدد المناظر له في الأساس الآخر.

إلا أن هذه العملية طويلة ومملة وقد تكون مستحيلة أحياناً وللتغلب على هذه المشكلة فإننا نقوم باستخدام نظرية تعرف باسم نظرية تكرار القسمة أو نظرية التجميع .

وتعتمد هذه النظرية على قسمة الأرقام ذات الأساس ١٠ على أرقام الأسس المطلوب التحويل إليها حتى نصل إلى عدد لا يمكن أن يقبل القسمة .
والأمثلة التالية توضح ذلك :

◀ مثال (١) :

حول الرقم ١.٨٩٥ إلى الأساس ٨ ، جدول [٦ - ٣] نقوم بالقسمة على ٨ طبقاً للنظرية السابقة .

٨	٨٩٥			
٨	١١١	٦	٧	: الباقي
٨	١٣	٦	٧	: الباقي
٨	١	٦	٥	: الباقي
	صفر	٦	١	: الباقي

جدول [٦ - ٣]

وهذا يبين أن الـ ٨٩٥ وحدة بها ٧ وحدات زائدة عند وضعها في نظام مجموعات ذات الأساس ٨ .

[٧ هي باقي أول عملية قسمة]

$${}^8_{1077} = 1.895$$

لاحظ أن بواق القسمة ٧، ٧، ٦، ٥، ١ هي مكونات الرقم ${}^8_{1077}$ وقد تم كتابتها من أسفل لأعلى .

◀ مثال (٢) :

حول الرقم ٤٣٦ إلى الأساس ٤ ، جدول [٧ - ٣] .



٤	٤٣٦			
٤	١٠٩	٦	صفر	: الباقي
٤	٢٧	٦	١	: الباقي
٤	٦	٦	٣	: الباقي
٤	١	٦	٢	: الباقي
				: الباقي
			١	صفر

جدول [٧ - ٣]

لاحظ أنه إذا كان الباقي = صفر فإنه يجب تسجيله حيث أنه يُعتبر أحد خانات الأرقام في النظام الجديد ذو الأساس ٤

$$\therefore ٤٣٦ = ١٢٣١٠$$

◀ مثال (٣) :

حول ١٠٨٥ إلى الأساس ٢ (النظام الثنائي) انظر جدول (٣ - ٨) .



٢	٨٥			
٢	٤٢	٦	١	الباقى :
٢	٢١	٦	صفر	الباقى :
٢	١٠	٦	١	الباقى :
٢	٥	٦	صفر	٦ والباقى :
٢	٢	٦	١	الباقى :
٢	١	٦	صفر	٦ والباقى :
	صفر	٦	١	٦ والباقى :

جدول [٨ - ٣]

$$\therefore ١٠١٠١٠١ = ١٠٨٥$$

٢ تدريبات :

(١) مسألة محلولة :

في المسألة الموضحة أدناه ، تم حلها ، ادرسها وحاول حل المسائل التي تشبهها مما يلي :

حول ١٠٣٤٩ إلى رقم ذو أساس ٥



٥	٤٣٩		
٥	٨٧	٦	الباقي = ٤
٥	١٧	٦	الباقي = ٣
٥	٣	٦	الباقي = ٢
	صفر	٦	الباقي = ٣

٤
٣
٢
٣

جدول [٩ - ٣]

$$\therefore ٤٣٩ = ١٠٠٣٢٣٤$$

- (٢) حول ١٠٥٨٣ لرقم أساسه ٥
- (٣) حول ١٠٢٦٩ لرقم أساسه ٧ .
- (٤) حول ١٠١٣٢٥ لرقم أساسه ٦ .
- (٥) حول ١٠٩٢٤ لرقم أساسه ٥ .
- (٦) حول ٢٩١١ لرقم أساسه ٨ .
- (٧) حول ٣٢٢ لرقم أساسه ٤ .
- (٨) حول ٧٦٧ لرقم أساسه ٣ .
- (٩) حول ١٥٣ لرقم أساسه ٢ .

[٧ - ٣] تحويل الأعداد ذات أساسات أخرى إلى أعداد ذات أساس ١٠ :

إذا فرضنا أن لدينا العدد ٥ ٤ ٣ ٦ للأساس ١٠ فإنه يمكن التعبير عنه في الصورة التالية :

١٠٠٠	١٠٠	١٠	١
آلاف	مئات	عشرات	آحاد
٦	٣	٤	٥

$$\begin{aligned} & \text{أو } ١٠٠٠ \times ٦ + ١٠٠ \times ٣ + ١٠ \times ٤ + ١ \times ٥ \\ & \text{أو } ٣١٠ \times ٦ + ٢١٠ \times ٣ + ١١٠ \times ٤ + ٥ \end{aligned}$$

٢ مثال (١) :

وسوف نكرر هذه العملية على أعداد من أساس مختلف عن الأساس ١٠. وليكن الأساس ٨، العدد هو ٨٦٣٤٥

٣٨	٢٨	١٨	آحاد
٦	٣	٤	٥

فالرقم الأول ٥ هو الآحاد كما في أعداد الأساس ١٠ .
والرقم الثاني ٤ هو الثمانيات وهو ما يناظر العشرات .
والرقم الثالث ٣ هو ٨ × ثمانيات أي ٢٨ وهو ما يناظر المئات .
والرقم الرابع ٦ هو ٨ × ٨ × ثمانيات أي ٣٨ وهو ما يناظر الآلاف .
وبذلك فإن العدد يمكن كتابته في نظام الأرقام ذات الأساس ٨ كالتالي :

٣٨	٢٨	١٨	آحاد
٥١٢ =	٦٤ =	٨ =	
٦	٣	٤	٥

جدول [٣ - ١٠]

- في الأساس ١٠
في الأساس ١٠
في الأساس ١٠
في الأساس ١٠

∴ ال ٦ تُمثل $3.72 = 512 \times 6$
ال ٦ ال ٣ تُمثل $192 = 64 \times 3$
ال ٦ ال ٤ تُمثل $32 = 8 \times 4$
ال ٦ ال ٥ تُمثل $5 = 1 \times 5$

٣٣٠١

∴ $1.3301 = {}_8 6345$

◀ مثال (٢) :

حول العدد 1011011 إلى الأساس ١٠
انظر جدول [٣ - ١١] :

٦٢	٥٢	٤٢	٣٢	٢٢	١٢	آحاد
٦٤ =	٣٢ =	١٦ =	٨ =	٤ =	٢ =	آحاد
١	٠	١	١	٠	١	١

جدول [٣ - ١١]

∴ $64 = 64 \times 1$

٦ صفر \times صفر $= 32$

$16 = 16 \times 1$

$8 = 8 \times 1$

٤ صفر \times صفر $=$

$2 = 2 \times 1$

$1 = 1 \times 1$

بالجمع $91 =$

∴ $1011011 = {}_9 91$

□ مثال (٣) :

حول ١٠٣٢ إلى الأساس ١٠ ، انظر جدول [٣ - ١٢] .

٤٥ ٦٢٥ =	٣٥ ١٢٥ =	٢٥ ٢٥ =	١٥ ٥ =	آحاد آحاد
٤	١	٠	٣	٢
٦٢٥×٤ $٢٥٠٠ =$	١٢٥×١ $١٢٥ =$	٢٥×٠ صفر =	٥×٣ $١٥ =$	١×٢ $٢ =$

جدول [٣ - ١٢]

∴ الإجمالي في الأساس ١٠ = ٢٥٠٠ .

$١٢٥ +$

$+ \text{صفر}$

$١٥ +$

$٢ +$

—————
 ١٠٢٦٤٢

∴ $١٠٢٦٤٢ = ٤١٠٣٢$.

[٣ - ٨] تدريبات :

شكل [٣ - ١] يمثل عدد ذو الأساس ٣ وهو يعادل العدد ١٧ في

الأساس ١٠ $١٠١٢٢ = ١٠١٧$

(١) بنفس الطريقة حول الأرقام التالية ذات الأساس ٣ إلى الأرقام المناظرة

ذات الأساس ١٠ .

(أ) ٢٠٢٢ (ب) ١٣٢٢ (ج) ٢٢٢١

(٢) أكمل الجدول التالي ، جدول [٣ - ١٣] .

٢٤ ١٦ =	١٤ ٤ =	آحاد آحاد	الأساس ١٠
٢	٣	٢	=
٣	٢	١	=
١	١	٣	=

جدول [٣ - ١٣] (أ)

٢٦ ٣٦ =	١٦ ٦ =	آحاد آحاد	الأساس ١٠
٤	٢	٣	=
٥	صفر	٤	=
٢	٤	١	=

جدول [٣ - ١٣] (ب)

٢٧ ٤٩ =	١٧ ٧ =	آحاد آحاد	الأساس ١٠
٢	٤	٥	=
٣	٣	١	=
١	٥	٤	=

جدول [٣ - ١٣] (ج)

(٣) أكمل الجدول التالي ، جدول [٣ - ١٤]

أساس ١٠	أساس ٤
	١٢٣٠
	٢١٢٣
	١٣٣٢

جدول [٣ - ١٤ - أ]

أساس ١٠	أساس ٧
	١٢٣٥
	٢٣١٤
	١٤٤٤

جدول [٣ - ١٤ - ب]

(٤) حول الأرقام التالية إلى الأساس ١٠.

$$\begin{aligned} &= {}_5 1232 \text{ (أ)} \\ &= {}_8 1355 \text{ (ج)} \\ &= {}_3 1212 \text{ (و)} \\ &= {}_9 1275 \text{ (ب)} \\ &= {}_7 266 \text{ (د)} \\ &= {}_5 32.4 \text{ (هـ)} \end{aligned}$$



[٣ - ٩] التحويل من أساس إلى أساس آخر (غير الأساس ١٠):

سبق وأن عرفنا كيفية تحويل أعداد ذات الأساس ١٠ إلى أعداد ذات أساس غير ١٠. وتعلمنا كذلك تحويل الأعداد ذات الأساسات المختلفة ← إلى أعداد ذات الأساس ١٠.

ولحل مسائل هذا البند فإننا نجري الحل على مرحلتين:

(أ) نحول أساس عدد إلى عدد ذو أساس ١٠.

(ب) ثم نحول العدد ذو الأساس ١٠ إلى العدد ذو الأساس المطلوب.

◀ مثال (١):

حول العدد ذو الأساس ٧، ٧٥٢٦ إلى أعداد الأساس ٤.

◀ الحل:

المرحلة الأولى:

نحول العدد ٧٥٢٦ إلى أعداد الأساس ١٠ انظر جدول [٣ - ١٥].

٢٧ ٤٩ =	١٧ ٧ =	الآحاد
٥ ٢٤٥ = ٤٩ × ٥	٢ ١٤ = ٧ × ٢	٦ ٦

جدول [٣ - ١٥]

$$\therefore ٧٥٢٦ = ٦ + ١٤ + ٢٤٥ = ٢٦٥$$

◀ المرحلة الثانية :

نحول العدد ١٠٠٢٦٥ إلى أعداد الأساس ٤ وذلك بعملية القسمة المتكررة على ٤ .

٤	٢٦٥	
٤	٦٦	، الباقي = ١
٤	١٦	، الباقي = ٢
٤	٤	، الباقي = صفر
٤	١	، الباقي = صفر
	صفر	، الباقي = ١

$$\therefore 100265 = 10021_4$$

$$\therefore 10021_4 = 100265_{10} = 7526_{10}$$

[٣ - ١٠] تدريبات :

١ - حول العدد ١٢٣٢ إلى :
(أ) أعداد الأساس ١٠

٢ - حول العدد ٦٤٢٥ إلى :
(ج) أعداد الأساس ١٠

(ب) أعداد الأساس ٦

(د) أعداد الأساس ٤

٣ - حول العدد ٢١٠١١٠ إلى :
(أ) أعداد الأساس ١٠

(ب) أعداد الأساس ٥

٤ - حول العدد ٣٢٠٢١ إلى :
(أ) أعداد الأساس ١٠

(ب) أعداد الأساس ٢

٥ - حول العدد ٨٥٤٢ إلى :
(أ) أعداد الأساس ١٠

(ب) أعداد الأساس ٥



الدروس الرابع

عمليات أخرى على الأعداد ذات الأساسات المختلفة

[٤ - ١] مقدمة :

من السهل تطبيق العمليات الحسابية الأربعة الأساسية على الأعداد ذات الأساسات المختلفة مثلما الحال عند إجرائها على الأعداد ذات الأساس ١٠ .
وفيما يلي طرق اجراء الأربع عمليات الأساسية من الجمع والطرح والضرب والقسمة وأمثلة على ذلك واتبعا تدريبات .

[٤ - ٢] الجمع :

◀ مثال (١) :

إجمع ٥ + ٨ للأساس ٩

في الأساس ١٠ = ٥ + ٨ = ١٣

ولكن ١٣ = ١٤_٩ لأن :

٩	١٣	
٩	١	٤ = الباقي
	صفر	١ = الباقي

$$\therefore ١٤ = ٩(٨ + ٥)$$

◀ مثال (٢) :

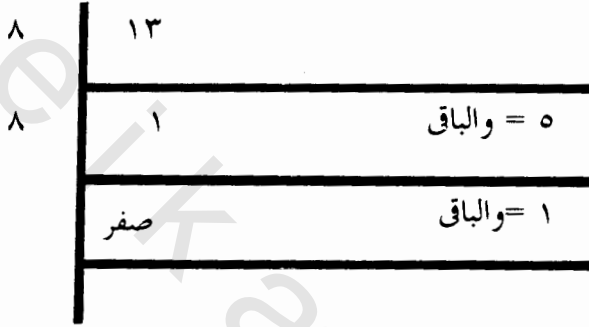
$${}_8{17} + {}_8{56}$$

(لا يوجد عدد أكبر من ٧ لمجموعات الأعداد ذات الأساس ٨)

$$\text{نبدأ بجمع الأحاد} = 7 + 6 = 13 = {}_{11}{13}$$

$$, \quad {}_{11}{13} = {}_8{15}$$

لأن :



${}_8{15}$ ، حيث تكتب ٥ في خانة الآحاد ويتبقى واحد يضاف لخانة

الثانويات ويجمع على (١ + ٥) ليصبح ٦ .

$$\begin{array}{r} \dots \\ {}_8{17} \\ + \\ {}_8{56} \\ \hline \end{array}$$

$${}_8{75}$$

◀ مثال (٣) :

$$\text{اجمع} \quad {}_{12}{121} + {}_{12}{102} + {}_{12}{1212}$$

(لا يوجد عدد أكبر من مجموعات الأعداد ذات الأساس ٣)

نبدأ بجمع الأحاد :

$$\therefore 1 + 2 + 2 = 5 = {}_{11}{5}$$

$$\text{ولكن} \quad {}_{11}{5} = {}_{12}{12}$$

∴ نبدأ بتسجيل آحاد ٣١٢ وهي الـ ٢ في المجموع ويتبقى ١ يُضاف إلى العمود التالي للآحاد :

$$∴ ٣١١ = ١٠٤ = ٢ + ٠ + ١ + ١$$

وبالمثل نسجل الرقم ١ في الخانة الثانية من المجموع ويتبقى واحد يضاف إلى العمود التالي

$$∴ ٣١٢ = ١٠٥ = ١ + ١ + ٢ + ١$$

وبالمثل نسجل ٢ في الخانة الثالثة في المجموع ويتبقى واحد يضاف إلى العمود التالي :

$$∴ ٣٢ = ١٠٢ = ١ + ١$$

ثم نسجل في الخانة الأخيرة للإجابة الرقم ٢

$$∴ \begin{array}{r} ٣١٢١٢ \\ ٣١٠٢ + \\ ٣١٢١ + \\ \hline ٣٢٢١٢ = \end{array}$$

$$٣١٠٢ +$$

$$٣١٢١ +$$

$$= ٣٢٢١٢$$

[٣ - ٤] تدريبات على الجمع :

(١) أوجد ناتج العمليات التالية للأساس ٥

$$٣٢١$$

$$٤٣٢ \quad (\text{ب})$$

$$٢٤ \quad (\text{أ})$$

$$١٣٢ + \quad (\text{ج})$$

$$٢٣٤ +$$

$$١٣ +$$

$$٤٤٤ +$$

(٢) أوجد ناتج العمليات التالية للأساس ٧ :

$$٣٤٥٦ \quad (\text{ج})$$

$$٦٦٦ \quad (\text{ب})$$

$$٦٥٤ \quad (\text{أ})$$

$$٦٥٤٣ +$$

$$٤٥٦ +$$

$$٣٢٥ +$$

$$٥٣٤٦ +$$

(٣) أوجد ناتج جمع الآتي :

$$= ٦٤١ + ٦٥٤٣ [أ]$$

$$= ٤١٢٣ + ٤٣٣٣ + ٤٢٢١ [ب]$$

$$= ٣١٢٠ + ٣٢٢١ + ٣١٢١ [ح]$$

$$= ٨٧٧٧ + ٨٣٦٧ + ٨٧٦ [د]$$

(٤) لقد تم جمع العمليات التالية وعليك إيجاد الأساس الذي أجريت عليه كل عملية جمع :

١٠١٢	٣٧٥ (ب)	٢٤٣ (أ)
١١٢١ +	١٤٣ +	٤٣٢ +
-----	-----	-----
٢٢١٠	٥٤٠	١٢٣٠
	٢٣١ (هـ)	٣٢٤ (د)
	٤٣٢ +	٥٤٠ +
	١١٢ +	١٢٣ +
	-----	-----
	١٢١٥	١٠٨٧

[٤ - ٤] الطرح :

مثال (١) :

$$\text{اطرح } ٧٣٤ - ٧١٥$$

(لا يوجد عدد أكبر من ٦ للأعداد ذات الأساس ٧)

ويتم حل هذه المسألة بنفس طريقة حل مسائل الأعداد ذات الأساس ١٠ مع شيء بسيط من الاختلاف .

وحيث أنه لا يمكن طرح ٥ من ٤ لذلك يلزم أن نستعير
من العمود الثاني ويقل هذا العمود بمقدار ما نستعيره ولما
كان العمود الثاني يحتوي على ثلاث سبعات ، لذا فإننا
نستعير ٧ واحدة ويتبقى عدد (اثنين × ٧) .

$$\begin{array}{r} ٧٣٤ \\ - ٧١٥ \\ \hline \end{array}$$

$$٧١٦$$

$$\therefore ١١ = ٧ + ٤$$

وبذلك يمكن طرح ٥ من ١١ فيتبقى ٦

ويتبقى بالعمود الثاني ٢ فنطرح منها ١ فيتبقى لنا ١

$$\therefore ٧١٦ = ٧١٥ - ٧٣٤$$

◀ مثال (٢) :

اطرح :

$$٨٤٥٠٦ - ٨٣٤٢٧$$

◀ الحل :

بالتبع من الصعب طرح ٧ من ٦ ، لذا سنستعير ٨
من العمود المجاور ولكن بما أنه صفر فسنقله إلى ٧ ونقل
الرقم الموجود في العمود المجاور إلى ٤ بدلاً من ٥ .

$$٨٤٥٠٦$$

$$- ٨٣٤٢٧$$

$$\hline ٨١٠٥٦$$

$$\therefore ١٣ = ٧ + ٦$$

$$٦ = ٧ - ١٣ \text{ (خانة الآحاد)}$$

$$٥ = ٢ - ٧ \text{ (العمود التالي)}$$

$$٤ - ٤ = ٠ \text{ (العمود التالي)}$$

$$١ = ٣ - ٤ \text{ (العمود التالي)}$$

$$\therefore ٨١٠٥٦ = ٨٣٤٢٧ - ٨٤٥٠٦$$

[٤ - ٥] تدريبات على الطرح :

(١) أوجد ناتج طرح ما يلي للأساس ٥

(ج) ٢٠٤٣	(ب) ٢٣٢	(أ) ٤٣٢
- ٣٢٤	- ١٤٣	- ٢٤٣
_____	_____	_____

(٢) أوجد ناتج طرح ما يلي للأساس ٨ .

(ج) ٢٣١٤	(ب) ٥٥٣	(أ) ٢٥٧
- ١٥٤٥	- ٢٦٦	- ١٥٣
_____	_____	_____

(٣) أوجد ناتج طرح ما يلي :

[أ]
 $= ٧٥٣٤ - ٧٣٦٤$
 [ب] $= ٣١٢٢٢ - ٣٢١٢١$
 [ج] $= ٩٥٦٧٨ - ٩٨٧٦٥$
 [د] $= ٦٢٥١٣ - ٦٥٣٢٤$
 [هـ] $= ٥١٤٤٤ - ٥٣٤٤١$

(٤) أوجد الأساس الذي استخدم في إجراء عمليات الطرح التالية :

[أ] $١٠٣٤ = ٣٤٣ - ١٤٣٢$
 [ب] $٢١٠ = ٣٣٢ - ١٢٠٢$
 [ج] $٤٥٣٥ = ٦٦٦ - ٥٤٢٣$
 [د] $٢٥٢٣ = ١٤٤٥ - ٤٤١٢$
 [هـ] $١٨٧٤ = ٢٣٧٦ - ٤٣٦١$
 [و] $٥٥ = ٣٥١ - ٤٣٦$

[٤ - ٦] الضرب :

◀ مثال (١) :

أوجد حاصل ضرب ١٣٠٤٥×٤ للأساس ٦
٦١٣٠٤٥ تحل هذه المسائل بطريقة مشابهة لمسائل الأساس ١٠
 $٦٤ \times ٤ = ٢٠$ وهي عبارة عن $٢ + (٣) \times ٦$
لذلك نسجل ٢ ويتبقى ٣ « ستات » فتضاف الثلاثة إلى
خانة الضرب التالية : ١٠٠٣١٢

∴ $١٩ = ٣ + ٤ \times ٤$ وهي عبارة عن $١ + (٣) \times ٦$

∴ ندون ١ ويتبقى ٣ تضاف لعملية الضرب التالية .

∴ $٣ = ٣ + ٠ \times ٤$ فدونها كما هي .

ثم $١٢ = ٣ \times ٤$ وهي عبارة عن $٠ + (٢) \times ٦$

∴ ندون الصفر ويتبقى ٢

ثم $٦ = ٢ + ٤ = ١ \times ٤$ وهي عبارة عن $٠ + (١) \times ٦$

∴ ندون الصفر ويتبقى ١ نضيفه كذلك .

لأن الـ ٦ في الأساس ٦ تعادل ١٠ في الأساس ١٠ .

◀ مثال (٢) :

اضرب ٧٤٥×٧٢٦٠٥

◀ الحل :

يتم حل هذا النوع من المسائل بنفس طريقة حل مسائل الأساس ١٠ .

نقوم بضرب العدد ٢٦٠٥ في العدد ٥ وهو آحاد الرقم	٧٢٦٠٥
٣٥ كما في مسائل الأساس ١٠ ثم نضع صفر في خانة	٧٤٥ ×
الآحاد في الصف التالي ، ثم نجرى عملية الضرب في	
٤ وتذكر أن المسألة للأساس ٧ .	٢٠٢٣٤
ثم نجرى عملية جمع الصفين كما سبق وأن تعلمنا عملية	١٤٣٢٦٠
الجمع .	
	١٦٣٥٢٤

[٤ - ٧] تدريبات على الضرب :

(١) أوجد حاصل ضرب ما يلي طبقاً للأساس المذكور :

$$= ٦٥ \times ٦٤ \text{ (أ)}$$

$$= ٨٦ \times ٨٧ \text{ (ب)}$$

$$= ٢٢ \times ٢٢١ \text{ (ج)}$$

$$= ٤٢ \times ٤٣٣ \text{ (د)}$$

$$= ٥٣ \times ٥٢٤١ \text{ (هـ)}$$

(٢) أوجد ناتج ما يلي مستخدماً نظرية الضرب المطول :

$$\begin{array}{r} \text{أ) } ٧٦٥٤ \\ \text{ب) } ٣٢٠١ \\ \text{ج) } ٥٤٣٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٥٤٣ \times \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٣١٢ \times \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٧٤٦ \times \\ \hline \end{array}$$

(٣) احسب الأساس الذي بناءً عليه تمت عمليات الضرب التالية :

$$٢٠ = ٣ \times ٤ \text{ (أ)}$$

$$١٢ = ٢ \times ٥ \text{ (ب)}$$

$$٣٣ = ٤ \times ٦ \text{ (ج)}$$

$$٤٤ = ٣ \times ١٣ \text{ (د)}$$

$$١٢١٢ = ٢ \times ١٢٢ \text{ (هـ)}$$

$$\begin{array}{r} ٢٣٥ \times \text{ (و)} \\ \hline ٣٢ \\ \hline ٥٠٣ \\ ١٠٤١٠ \\ \hline ١١٢١٣ \end{array}$$

$$١١٢١٣$$

[٤ - ٨] القسمة :

تختلف عملية القسمة هنا اختلافاً كبيراً عن القسمة للأساس ١٠ وذلك كما يتضح من الأمثلة التالية .

◀ مثال (١) :

$$\sqrt{6} \div \sqrt{4536} \text{ اقسم}$$

عند قسمة ٤ ÷ ٦ لا يصح وبالتالي فالإجابة تكون صفر ويتبقى ٤ وندون الصفر ؛ ثم أن الباقي هذا يضرب في الأساس ٧ .

$$\begin{array}{r} 0.041 \\ \hline \sqrt{6} \overline{) 4536} \end{array}$$

$$\therefore 28 = 7 \times 4 \text{ ، ثم يجمع على الرقم التالي هو } 0$$

$$\therefore 33 = 0 + 28$$

ولكن $6 \div 33 = 0$ والباقي ٣ فنقوم بتدوين رقم ٥ ثم أن الباقي هذا يضرب في الأساس ٧ .

$$\therefore 21 = 7 \times 3 \text{ ، ثم يجمع على الرقم التالي وهو } 3$$

$24 = 3 + 21$ ولكن $6 \div 24 = 4$ والباقي صفر فنقوم بتدوين رقم ٤ ويجمع الصفر على الرقم التالي وهو ٦ .

$$\therefore 6 = 6 + 0$$

$$1 = 6 \div 6$$

ويمكن التأكد من صحة الإجابة بضرب $\sqrt{6} \times \sqrt{541}$

$$\therefore \sqrt{541} = \sqrt{6} \div \sqrt{4536}$$

ويمكن بسهولة حل مسائل القسمة وذلك بتحويل العدد إلى الأساس ١٠ ثم نجرى عملية القسمة على هذا الأساس ، وفي النهاية نحول خارج القسمة من الأساس ١٠ إلى الأساس الذي كان عليه أساساً والمثال التالي يوضح ذلك :

◀ مثال (٢) :

اقسم ${}_8 7532 \div {}_8 6$

نقوم بتحويل العددين ${}_8 7532$ ، ${}_8 6$ إلى الأساس ١٠ كما سبق وعرفنا وباستخدام الجدول التالي : جدول (٤ - ١) .

	38 $512 =$	28 $64 =$	18 $8 =$	الآحاد
$1.393.0 =$	7 $3584 = 512 \times 7$	5 $320 = 64 \times 5$	3 $24 = 8 \times 3$	2 2
$1.6 =$				8^1

جدول [٤ - ١]

وبذلك تصبح المسألة : $1.600 = 1.6 \div 1.393.0$

ثم نحول الإجابة 1.600 إلى الأساس ٨ كما سبق :

$81217 = 1.600 \dots$

٨	600	
٨	81	= ٧ والباقي ،
٨	10	= ١ والباقي ،
٨	1	= ٢ والباقي ،
	صفر	= ١ والباقي ،

$$\therefore {}_8 1217 = {}_8 6 \div {}_8 7532$$

[٤ - ٩] تمارين على القسمة :

أجر عمليات القسمة التالية :

$$\begin{aligned} &= {}_5 14 \div {}_5 121 \quad (٢) & &= {}_6 12 \div {}_6 132 \quad (١) \\ &= {}_2 11 \div {}_2 1100 \quad (٤) & &= {}_4 13 \div {}_4 32 \quad (٣) \\ & & &= {}_3 10 \div {}_3 120 \quad (٥) \end{aligned}$$

أوجد ناتج قسمة ما يلي بالتحويل إلى الأعداد ذات الأساس ١٠ ثم إرجاع ناتج القسمة إلى الأساس الأصلي :

$$\begin{aligned} &(٦ \div ٤٨) & & {}_3 20 \div {}_3 1210 \quad (٦) \\ &٦ \div ١٤٤) & & {}_5 11 \div {}_5 1034 \quad (٧) \\ &(٥ \div 30) & & {}_2 101 \div {}_2 11110 \quad (٨) \\ & & & {}_6 15 \div {}_6 340 \quad (٩) \\ & & & {}_8 14 \div {}_8 234 \quad (١٠) \end{aligned}$$

