الجزء الثالث

الجبر

ALGEBRA

الدرس الخامس عشر :

مبادىء الجبر — الكميات المتجهة
Directed Numbers

[١٥ ـ ١] تعـريف :

مثال (١) : للتعرف على الأعداد أو الكميات المتجهة ، ننظر إلى الجدول التالى جدول (١٥ ــ ١) ، الذى يوضح أعمار بعض الأشخاص .

الإسم	العمر	الفارق فى العمر بين عمر كل واحد ، وعمر أحمد
محمد	٥٥	+ ٢٥
على	٤٢	+ ١٢
عصام	٣٧	+ ٧
أحمد	٣٠	صفر
مجدى	٢٨	− ٢
هشام	٢١	− ٩
خالد	١٥	− ١٥

جدول [١٨ ـ ١]

فإذا ما قارنا عمر كل واحد من المذكورين بالجدول وقارناه بعمر واحد منهم وليكن أحمد مثلاً ، فنجد أن عمر عصام (٣٧) يزيد عن عمر أحمد (٣٠) بمقدار (٧) ،

فعمر عصام = ٣٠ + ٧

= عمر أحمد + ٧

= ٠ + ٧

وذلك باعتبار أحمد بداية القياس أو أساس القياس فنقول عمر عصام = « + ٧ » أى (موجب ٧) بالنسبة لعمر أحمد .

أما على فيعتبر « + ١٢ » (موجب ١٢) بالنسبة لأحمد .

ويتربع محمد فى قائمة الأعمار فنجد أنه (موجب ٢٥) بالنسبة لأحمد .

أما أعمار كل من مجدى وهشام وخالد فهى أقل من عمر أحمد ويعبر عن مقدار هذا النقص بإشارة سالب « − » .

فمثلاً نقول عمر هشام « − ٩ » أى « سالب ٩ » بالنسبة لعمر أحمد .

أما خالد وهو أصغر القائمة عمراً فنقول أن عمر خالد « − ١٥ » أى (سالب ١٥) بالنسبة لعمر أحمد .

أما بالنسبة لعمر أحمد فقد سُجل أمامه (صفر) لأنه هو نقطة البداية والتى بدأنا منها المقارنة وتُسمى بنقطة الصفر أو نقطة الأصل .

مثال (٢) : فى امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطالبات كالتالى : كما هو مبين بجدول (١٥ ــ ٢) :

اسم الطالبة	الدرجات	الفارق بين درجة كل طالبة ودرجة إيمان
رانيا	٥٠	+ ٨٠
ياسمين	٤٦	+ ٤
هبة	٤٥	+ ٣
إيمان	٤٢	صفر
هند	٣٥	− ٧
ثناء	٣٠	− ١٢
أمل	٢٦	− ١٤

جدول [١٥ ـ ٢]

فإذا ما قارنا درجة كل طالبة بالجدول وقارناها بدرجة إيمان مثلاً سنجد أن درجة هبة تزيد بثلاث درجات عن الدرجة التى حصلت عليها إيمان وكذلك نجد أن رانيا الحاصلة على الدرجة النهائية فى الرياضيات ، تزيد عن درجة إيمان بمقدار ثمانية درجات .

وعلى هذا فإننا نقول أن درجة رانيا « + ٨ » أو (موجب ٨) بالنسبة لدرجة إيمان .

وكذلك درجة هبة « + ٣ » أو (موجب ٣) بالنسبة لدرجة إيمان .

وبنفس الطريقة فإن درجة أمل « – ١٤ » بينما درجة هند « – ٧ » أو تقل عن إيمان بمقدار « ٧ » درجات .

أما بالنسبة لإيمان فقد سجلنا أمامها (صفر) لأنها المقياس الذى بدأنا به المقارنة وتُسمى درجة إيمان (٤٢) بنقطة الصفر أو نقطة الأصل أو نقطة بداية القياس .

شكل [١٥ ـ ١]

[١٧ ـ ٢] خط الأعداد The Number Line :

هو خط تُسجل عليه جميع الأرقام الموجبة والسالبة ويفصل بينهما الصفر ويمتد الاتجاه الموجب مبتعداً عن الصفر وهى نقطة الأصل ويزداد تدريجياً حتى يصل إلى قيمة هائلة يصعب حصرها وتسمى :

موجب ما لا نهاية (+ ∞) وبالمثل يمتد الاتجاه السالب فى الاتجاه المعاكس ويتناقص تدريجياً حتى يصل إلى قيمة يصعب حصرها وتُسمى سالب ما لا نهاية (– ∞).

ويوضح شكل (١٥ ــ ١) ، خط الأعداد سواء كان أفقياً أو رأسياً .

[١٧ ـ ٣] أكبر من ، أصغر من : Greater than, Less than

يُعبر عن كلمة أكبر من حسابياً الرمز >

فمثلاً نقول ١٥ > ١٤ أى أن ١٥ أكبر من ١٤ فى حين يُعبر عن كلمة أصغر من حسابياً بالرمز <

فمثلاً نقول أن ١٠ < ١٢ أى أن ١٠ أصغر من ١٢ .

فإذا طبقنا هنا هذا المعنى على خط الأعداد السابق فى شكل (١٥ ـ ١) .

نجد أن :.

+ ٣ > صفر ، + ٣ > + ٢ > + ١

كما وأن الصفر > - ١ كما وأن - ١ > - ٣

وبالتالى فإن + ١ > - ١ ، صفر > - ٤

، - ٣ < صفر ، - ١ < + ١ < + ٣ وهكذا .

[١٧ ـ ٤] جمع الكميات (الأعداد) المتجهة :

إذا افترضنا أن سيارة ما تتحرك على خط الأعداد ابتداء من نقطة الصفر فى اتجاه اليمين لخط الأعداد الأفقى أو فى اتجاه الأعلى لخط الأعداد الرأسى شكل (١٥ ــ ١) فإنه يقال أن السيارة تتحرك حركة موجبة ، والعكس فإذا تحركت السيارة لليسار بخط الأعداد الأفقى أو للأسفل بخط الأعداد الرأسى فإن حركة السيارة تكون حركة سالبة .

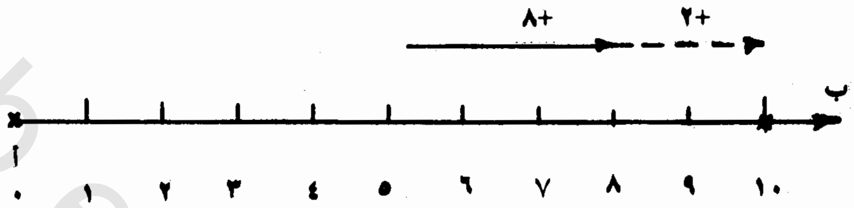
مثال (١) : إذا تحركت مبتدئة من مدينة « أ » (سنعتبر هذه المدينة هى نقطة القياس أو نقطة الأصل أو الصفر فى خط الأعداد) .

وسارت ٨ كم فى اتجاه مدينة (ب) ثم استمرت فى السير مرة ثانية لمسافة ٢ كم فى نفس الاتجاه فإنه يقال أن السيارة تحركت مسافة ١٠ كم فى الاتجاه من ا إلى ب .

وإذا اعتبرنا هذا الاتجاه من مدينة (أ) إلى مدينة (ب) هو الاتجاه الموجب « لخط الأعداد » .

فإن السيارة تكون قد سارت : (+ ٨) + (+ ٢) = + ١٠ كم .

، انظر الرسم شكل (١٥ – ٢) .



شكل [١٥ ـ ٢]

مثال (٢) : سار محمد فوق خط الأعداد مبتدئاً من (+ ١) مقدار ٥ كم ثم عاد أدراجه على نفس الخط فى الاتجاه المعاكس مسافة ٣ كم فأين ينتهى به المطاف ؟

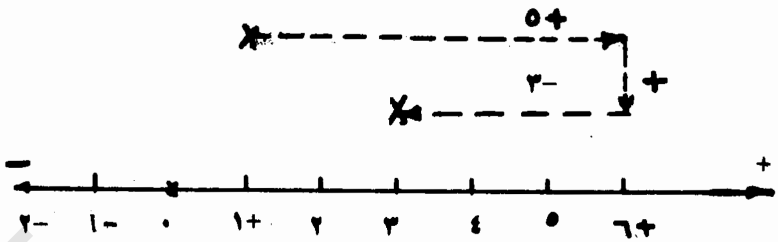
الحـل :

كما فى شكل (١٥ – ٣) من الرسم نلاحظ أن محمد ابتدأ من نقطة (+ ١) وهى نقطة تبعد بمقدار ١ كم عن نقطة بدء القياس وهى الصفر وحيث أنه سار بعد ذلك خمسة كيلومترات فإنه فى النهاية يكون قد ابتعد بمسافة ٦ كيلومتر عن نقطة الصفر أى عند النقطة (+ ٦) وحيث أنه سيعود مرة ثانية فى الاتجاه السالب لخط الأعداد مسافة ٣ كم ، أى أنه سيتحرك جبرياً أو مقداراً متجهاً قدرة (– ٣) كم فى اتجاه نقطة الصفر .

وفى النهاية سنجد أنه وصل لبعد ٣ كم عن نقطة الصفر وهى نقطة (+ ٣) على خط الأعداد .

وذلك يؤكد صحة المقدار : (+ ٦) + (– ٣) = (+ ٣) .

ويلاحظ كذلك أننا نضع علامة + أى أننا نجرى عملية جمع بين مقدارين مختلفى الاتجاه .



بالكيلومتر

شكل [١٥ - ٣]

[١٧ - ٥] طرح الأعداد المتجهة :

سبق لنا وأن أوضحنا عملية الطرح فى الدرس الثالث ، البند الثالث إلا أن طرح الكميات أو الأعداد المتجهة ، يختلف ولتوضيح ذلك ، نورد هنا بعض الأمثلة :

مثال (١) : إن الفرق بين ٨ ، ٣٠ هو :

٨ - ٣ = ٥ وليس له قيمة غير ذلك ، كما عرفنا فى الدرس الثالث ، البند الثالث إلا أن طرح الكميات أو الأعداد المتجهة ، يختلف ولتوضيح ذلك ، نوزد هنا بعض الأمثلة :

مثال (١) : إن الفرق بين ٨ ، ٣ هو :

٨ - ٣ = ٥ وليس له قيمة غير ذلك ، كما عرفنا فى الدرس الثالث ، البند الثالث (٣ - ٣) ،

إلا أنه عند إيجاد الفرق بين كميتين متجهتين فإن الأمر يختلف فالفرق بين + ٨، + ٣ ، يُمكن أن يكون + ٥ أو قد يكون - ٥ وذلك يتوقف على طريقة المقارنة :

فمن الواضح على أي خط أعداد ، أن المسافة بين + ٣ ، + ٨ هى ٥ وحدات وكذلك المسافة بين - ٣ ؛ -٨ هى ٥ وحدات .

أى أن الفارق بينهما عددياً = ٥ وحدات مسافة .

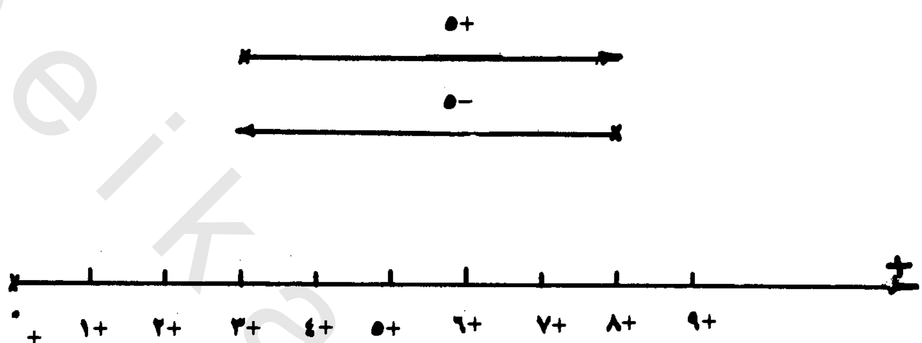
إلا أننا إذا تحركنا بادئين من نقطة + ٣ ومتجهين إلى نقطة + ٨ فإن الفارق يكون + ٥ أى ٥ وحدات فى الاتجاه الموجب لخط الإعداد .

∴ (+ ٨) − (+ ٣) = + ٥

بينما إذا تحركنا من نقطة + ٨ ومتجهين إلى نقطة + ٣ فإن الفارق يكون − ٥ أى ٥ وحدات فى الاتجاه السالب لخط الأعداد .

∴ (+ ٣) − (+ ٨) = − ٥

ويتضح ذلك من الشكل (١٥ − ٤) .

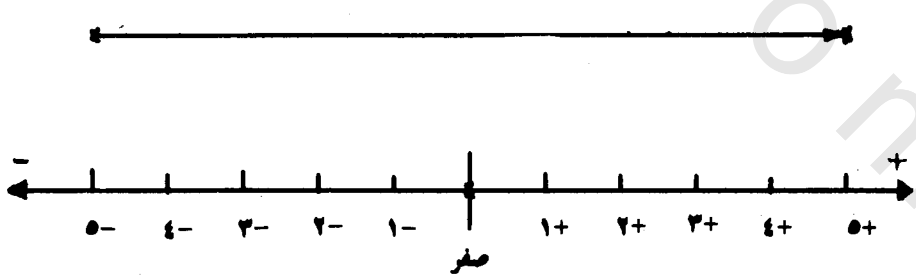


شكل [١٥ ـ ٤]

مثال (٢) : إذا تحركنا على خط الأعداد من النقطة − ٥ قاصدين النقطة + ٥ فما الفرق بين النقطتين .

الحـــل :

انظر الرسم شكل (١٥ ـ ٥) ، نلاحظ منه أن مسافة التحرك الفعلية هى ١٠ وحدات .



شكل [١٥ ـ ٥]

والفرق بين النقطة التى وصلنا لها (+ ٥) والتى بدأنا منها (− ٥) يكون جبرياً :

(+ ٥) − (− ٥) = + ١٠

أى أنه = عشر وحدات فى الاتجاه الموجب لخط الأعداد .

والآن وبعد أن فهمنا عمليات جمع وطرح الكميات (الأعداد) المتجهة فإننا من الآن فصاعداً ، لن نكون بحاجة إلى استخدام خط الأعداد . ويمكننا حل هذه النوعية بسهولة ، ولنأخذ الكميات التالية :

+ ٩ − + ٢ = + ٧
+ ٢٠ − + ٥ = + ١٥
+ ٢٠ − − ٥ = + ٢٥
− ٢٠ − − ٥ = − ١٥
− ٢٠ − + ٥ = − ٢٥
− ٢ − − ٢ = صفر
+ ٢ − − ٢ = + ٤
+ ٢ − + ٢ = صفر
− ٩ − − ٢ = − ٧
− ٩ − + ٢ = − ١١
صفر − − ٢ = + ٢
صفر − + ٢ = − ٢
+ ١٥ − − ١٥ = + ٣٠
+ ١٣ − + ٧ = + ٦
+ ١٣ − − ٧ = + ٢٠
− ١٣ − صفر = − ١٣
− ١٧ − − ١٢ = − ٥
+ ١٧ − + ١٢ = + ٥
+ ١٢ − − ١٧ = + ٢٩
− ١٢ − + ١٧ = − ٢٩

تدريبات

[أ] فيما يلى بعض العلاقات (المتباينات)؛ بعضها صحيح وبعضها خطأ . والمطلوب منك وضع علامة ✓ أمام الصحيح منها وعلامة ✗ أمام الخطأ منها .

(١) +١٥ > +١٢
(٢) −١٥ > −٢٠
(٣) −٣ > −٢
(٤) +١ > +٥
(٥) +٣ > +٢
(٦) +٨ > −٨
(٧) +٨٩ > −٩٨
(٨) −١٥ > +٥١
(٩) صفر > −٥
(١٠) صفر > +٣
(١١) +٥ < +١٥
(١٢) +٥ < −١٢
(١٣) −٩ > +١٠
(١٤) −١٠ > +٩
(١٥) +١٢ < −١٣
(١٦) +١٣ > −١٢
(١٧) +١ > −١٠٠
(١٨) +١٠٠ < −١٠١
(١٩) +١٤ > +١٧
(٢٠) −١٧ < −١٥

[ب] ضع علامة < أو > فيما بين كل كميتين متجهتين من الكميات المتجهة التالية ، بحيث تتحقق صحة العلاقة الجبرية (المتباينة) :

(١) +٦ ؟ −١٤
(٢) −٥ ؟ −٣
(٣) −٢ ؟ +١١
(٤) +٨ ؟ −٩
(٥) +١٨ ؟ −٢٨
(٦) صفر ؟ −٩
(٧) −٣ ؟ +٣
(٨) −١٢ ؟ +١٥
(٩) −١٧ ؟ +١٢
(١٠) −١ ؟ −٢
(١١) +٣ ؟ −٥
(١٢) −٨ ؟ +١٢
(١٣) +٩ ؟ −١٤
(١٤) +١٧ ؟ −٢٧
(١٥) −٣٨ ؟ +٥٠
(١٦) +١١ ؟ −٢١
(١٧) صفر ؟ −٣٠
(١٨) −١٠ ؟ صفر
(١٩) −٩ ؟ +٩
(٢٠) −٥١ ؟ +١٥

[جـ] أوجد قيمة ما يلى :

(١) +٩ − ٩

(٢) صفر − ٥

(٣) +١٣ − ٥

(٤) +٢٧ − ٣٠

(٥) +٣٣ − ٢٢

(٦) −١٥ + ٢٠

(٧) −٢٠ + ١٥

(٨) −٢٠ − ٢٠

(٩) +١٥ + ١٠

(١٠) +٣٠ − ٣٧

(١١) +١١ − ٧

(١٢) −١٥ + ١٧

(١٣) −١٧ − ١٥

(١٤) +١٥ + ١٧

(١٥) −٢٠ + ٣٠

(١٦) +٩ − ٧

(١٧) −٩ + ١٠

(١٨) +٥ − ١

(١٩) −١ − ٥

(٢٠) +٨ − ٧

[د] أوجد قيمة ما يلى :

ملاحظة :- الإجابة فى هذه النوعية من المسائل تحتاج إلى خطوة زيادة فى الحل عن السابق .

(١) +٥ −٣ +٤

(٢) −٧ −٣ +٥

(٣) +١٣ −٥ +١٢

(٤) +٧ −٨ +٩

(٥) +١٠ −٥ +١٣

(٦) +١٢ −١١ −١٠

(٧) −١٨ +٢٠ −٢٢

(٨) +٤٠ −٥٠ +١٠

(٩) +١١ −١٢ +١٤

(١٠) +٢١ −٧ −١٤

(١١) −٣ +٢ −٣

(١٢) −٦ +٨ −١١

(١٣) +١٧ −١١ +١٣

(١٤) −٢٣ −١٧ +٥٠

(١٥) +٧ −٨ −٩

(١٦) −٦ +٥ −٤

(١٧) +٢٧ −٣ +١٥

(١٨) −١٨ −١٢ +٣١

(١٩) +١٤ −١٣ −١٦

(٢٠) −٢٠ +٣٠ −٤٠

[هـ] ضع فى كل مما يلى الكمية المتجهة المناسبة الناقصة . حتى تتحقق صحة العلاقة :

(١) + ٧   − ٢ = + ٥

(٢) + ١٣ □ = − ٨

(٣) − ٨ + ٥ □ = + ١٩

(٤) + ٧ − ٣ □ = − ٨

(٥) − ٩ □ = صفر

(٦) − ١٠ □ = + ٢٠

(٧) + ١٥ □ = − ٧

(٨) − ١١ □ + ٨ = + ١٩

(٩) + ٢٣ − ٨ □ = − ١٠

(١٠) − ١٥ □ = + ١

(١١) + ١٨ − ٥ □ = − ١٣

(١٢) + ٣٠ − ٢٥ □ = + ١١

(١٣) − ١١ □ + ٧ = + ٢٠

(١٤) − ٣ □ + ٧ = − ٢٥

(١٥) + ١٧ □ − ٤ = صفر

(١٦) + ١٢ □ − ٨ = + ١١

(١٧) − ٢٣ □ + ٩ = + ١٥

(١٨) + ١٤ □ − ١١ = − ١٣

(١٩) − ٨ □ + ١٣ = − ٣٠

(٢٠) + ٥ □ − ٢٠ = + ٤٠

[١٧ ـ ٦] ضرب وقسمة الكميات المتجهة (الأعداد الجبرية) :

عند ضرب أو قسمة أى كمية متجهة يجب ملاحظة التالى :

أولاً ـ الضرب :

حاصل ضرب عدد موجب × عدد موجب = عدد موجب .

حاصل ضرب عدد سالب × عدد سالب = عدد موجب .

حاصل ضرب عدد موجب × عدد سالب = عدد سالب .

حاصل ضرب عدد سالب × عدد موجب = عدد سالب .

ثانياً : القسـمة :

ناتج قسمة عدد موجب ÷ عدد موجب = عدد موجب .

ناتج قسمة عدد سالب ÷ عدد سالب = عدد موجب .

ناتج قسمة عدد موجب ÷ عدد سالب = عدد سالب .

ناتج قسمة عدد سالب ÷ عدد موجب = عدد سالب .

تدريبات عامة على الكميات المتجهة

ملاحظة : سنكتفى ابتداء من الآن أن نكتب الكمية المتجهة الموجبة بدون إشارة

+

[أ] اختصر ما يلى :

(١) ١٠ – (–٧) = ١٠ + ٧ = ١٧

(٢) ٥ + (– ٥) =

(٣) – ٨ + (– ٧) – (– ٣) =

(٤) – ١٢ – (– ١٣) – ١٩ =

(٥) – ١٥ – (– ٢٣) – (– ٨) =

(٦) – ٥ – (– ٨) – ٦ =

(٧) – ١١ – ٩ – (– ٨) =

(٨) – ١١ + (– ٥) – (– ٣) =

(٩) ١٧ – ٣ – (– ٩) =

(١٠) – ١٢ – (– ٩) =

(١١) – (– ٨) – (– ٦) – ٣ =

(١٢) – (– ٥) – (– ٩) + (– ٢) =

(١٣) – ٣ + (– ٦) – (– ٧) =

(١٤) – ١٣ – (– ١٥) + (– ٩) =

(١٥) ٢١ – (– ٩) – (– ٨) =

(١٦) – ١٨ – (– ٧) – (– ٩) =

(١٧) ١٣ – (– ١٢) + (– ٥) =

(١٨) – ١٩ + (– ٥) – (– ١٠) =

(١٩) ١٠ – (– ١١) – ١٥ =

(٢٠) ١٥ – (– ١٠) – ٢٥ =

[ب] اضرب الكميات المتجهة التالية :

(١) – ٥ × – ٦ =

(٢) ٥ × – ٨ =

(٣) ١٥ × – ١/٣ =

(٤) – ٧/٣ × ٣/٩ =

(٥) – ١٦/٩ × – ٢٧ =

(٦) – ٨ × ٥ =

(٧) – ٧ × ٩ =

(٨) – ٩ × – ١١ =

(٩) ٦ × – ٨ =

(١١) – ١١ × – ٤ =

(١٢) – ٣ × – ٥ =

(١٣) – ١٧ × – ٨ =

(١٤) – ٣/١١ × ١٣٢ =

(١٥) ٢/٧ × – ٦٣ =

(١٦) ٨/١٣ × – ٥٢ =

(١٧) – ٤ × – ٩ =

(١٨) ١١ × – ١١ =

(١٩) – ١٠ × – ١٠ =

(١٠) − ٤ × − ٣ =

(٢٠) ١٠٠ × − ١/١٠ =

[جـ] اقسم الكميات المتجهة التالية :

(١) ٦ ÷ − ٢ =

(٢) − ٩ ÷ − ٣ =

(٣) − ٧ ÷ ١/٧ =

(٤) − ٩ ÷ − ١٨ =

(٥) − ٣ ÷ ١/٣ =

(٦) ٤ ÷ − ١/٢ =

(٧) − ١٦ ÷ − ٤ =

(٨) − ٢٥ ÷ − ١/٥ =

(٩) ٢٥ ÷ − ٥ =

(١٠) − ٣٠ ÷ − ٦ =

(١١) − ٢٧ ÷ ٩ =

(١٢) − ٨١ ÷ − ٩ =

(١٣) − ١٥ ÷ ١٥ =

(١٤) − ٧ ÷ − ١/٧ =

(١٥) − ٦٣ ÷ − ٩ =

(١٦) ٨٨ ÷ − ٤ =

(١٧) ٨٤ ÷ − ٧ =

(١٨) − ١٣٢ ÷ − ١١ =

(١٩) − ١٠٨ ÷ ٩ =

(٢٠) − ١٠٠ ÷ − ١٠ =

الدرس السادس عشر :

جمع الحدود الجبرية المتشابهة
Collecting Like Terms

إذا كان فى حقيبتك ٤ كتب واشتريت عدد ٣ كتب أخرى فإنه يقال أن معك ٧ كتب ، ولكن إذا كان عندك ٤ كتب واشتريت ٣ كراسات فإن ما معك ليس ٧ كتب ولا هو ٧ كراسات لأنه لا يمكن جمع نوعين مختلفى الوحدات ولكن يمكننا جمع أى كميات جبرية من نفس النوعية .

وبالمثل فإن ٣ كيلو تفاح ، ٤ كيلو موز لا يمكننا أن نقول أنها ٧ كيلو تفاح ولا هى ٧ كيلو موز لاختلاف الوحدات .

فإذا فرضنا أن رمز الكتاب س بينما رمز الكراسة ص .

فإن فى الحالة الأولى لدينا ٤ س وإشترينا ٣ س .

فيكون مجموع مالدينا = ٤ س + ٣ س = ٧ س **أى سبعة كتب .**

ويطلق على ٤ س ، ٣ س ، .. حدوداً متشابهة بينما فى الحالة الثانية ، لدينا ٤ س وإشترينا ٣ ص .

فيكون مجموع مالدينا = ٤ س + ٣ ص = ٤ س + ٣ ص .

ويطلق على ٤ س ، ٣ ص حدوداً غير متشابهة .

مثال (١) : اختصر الآتى :

٤ س + ٣ س + ٩ س + س ..

ملاحظة : س تعنى ١ س ولكن جبرياً لا يتم كتابة رقم ١ وبالمثل ١ ص = ص ، ١ م = م ، وهكذا ..

والمجموع = ١٧ س .

مثال (٢) : اختصر الآتى :

٧ س + ٥ س − ٨ س + ٩ س − ٣ س .

ويلاحظ فى هذه المسألة أنه لدينا حدود متشابهة فى س كما أن بعضها موجب وبعضها سالب .

ومن السهل فى مثل هذه المسائل أن نجمع الحدود الموجبة معاً والحدود السالبة معاً ثم نوجد الفرق بينهما كما يلى :

٧ س + ٥ س + ٩ س − ٨ س − ٣ س .

(حدود موجبة)　　　(حدود سالبة)

∴ ٢١ س − ١١ س = ١٠ س

مثال (٣) : اختصر الآتى :

٧ س + ٣ ص + ٨ س + ١٠ ص − س

فى هذا المثال لدينا حدود جبرية غير متشابهة فى س ، ص ولحل هذا النوع علينا بتجميع كل الحدود المتشابهة معاً كما يلى :

٧ س + ٨ س − س + ٣ ص + ١٠ ص =

= ١٥ س − س + ١٣ ص = ١٤ س + ١٣ ص .

ويلاحظ أنه لا يمكننا أن نختصر هذه المجموعة من الحدود إلى أقل من هذه الصيغة .

مثال (٤) : اختصر الآتى :

٧ س + ٦ − ٢ س + ٩ ص − ٥ − ٣ ص .

ويلاحظ فى هذه المسألة أن الحدود الغير متشابهة ذات ثلاث نوعيات أحدهما تحتوى على س والثانية على ص والثالثة عبارة عن أرقام مطلقة (حدود مطلقة) وهى + ٦ ، − ٥ .

وبنفس الطريقة علينا بتجميع كل نوعية بمفردها كما يلى :

٧ س + ٦ − ٢ س + ٩ ص − ٥ − ٣ ص =

= (٧ س − ٢ س) + (٩ ص − ٣ ص) + (٦ − ٥) =

= ٥ س + ٦ ص + ١

وهى أبسط صورة لاختصار هذه الحدود المعطاه لنا فى المثال .

مثال (٥) : اختصر الآتى :

٥ س ص + ٢ س م + ٣ ص س + ٧ م س

يبدو فى هذه المسألة ، لأول وهلة أنها عبارة عن ٤ حدود جبرية غير متشابهة ، ولكن دعنا نتأمل الحدين : ٥ س ص ، ٣ ص س .

يلاحظ أن س ص تعادل تماماً ص س مثلما الحال فى :

٤ × ٦ = ٦ × ٤

وبمعنى آخر نجد أن س ص = ١ س × ١ ص = ١ س ص

أو ١ ص س = س ص = ص س

وكذلك الأمر بالنسبة للحدود المحتوية على س م ، م س فهى متعادلة تماماً حيث أن س × م = م × س = س م

∴ المسألة تعتبر نوعين فقط مختلفى الحدود وهما س ص ، س م .

∴ ٥ س ص + ٢ س م + ٣ ص س + ٧ م س =

= ٥ س ص + ٣ س ص + ٢ س م + ٧ س م =

= ٨ س ص + ٩ س م .

وهذه الحدود لا يمكن اختصارها لصورة أبسط من هذه .

تدريبات

[أ] اختصر ما يلى :

(١) ٥ س + ٤ س + س .

(٢) ٩ أ + أ + ٣ أ .

(٣) ١١ ب + ٣ ب + ٨ ب .

(٤) ٦ م + ٩ ص + ٣ س

(٥) ٦ س + ٤ س − ٩ س .

(٦) ٨ س − س − ٣ س .

(٧) ٣ ص − ٥ ص + ٧ ص .

(٨) ٧ أ − ٨ ب + ٩ أ .

(٩) ٨ س + ٣ ص − ٢ س + ٩ ص + ٦ .

(١٠) ٧ س − ٥ + ٢ س − ٣ ص + ٧ ص + ٩

(١١) ٣ أ + ٢ ب − أ − ٧ ب .

(١٢) ٧ أ + ٥ س − ٣ أ − س .

(١٣) ٢ ص + س − أ + ٣ س + ٥ ص .

(١٤) ٢ أ − ٣ س −٣ أ + ٤ س .

(١٥) ٤ ص − ٥ أ − ٣ ص + ٧ .

(١٦) ٦ − ٢ س + ٧ + ٧ س .

(١٧) ١٥ أ − ١٤ ب + ١٣ ص − ١٢ .

(١٨) س − ص + ٧ س − ٨ ص .

(١٩) ٧ أ + ب − ٣ جـ + ٢ أ − ٤ ب − جـ .

(٢٠) ٨ س + أ + ٦ ب − ٥ ب + ٣ أ − ٢٠ س

(٢١) ٢ م + ن + ل − ن + ٣ ل .

(٢٢) ٣ أ + ٥ ب + أ + ٣ ب + ٢ أ + ٦ ب .

(٢٣) ٧ س + ٥ ص + س − ٢ ص − ٨ س .

(٢٤) ١٦ س + ٨ ص − ٩ س + ٧ ص − ٥ .

(٢٥) أ + ب − ٨ أ + ٩ أ − ٥ ب + ٩ .

[ب] اختصر ما يلي وتذكر أن س ص = ص س ، اب = ب ا وهكذا .
(١) ٢ ب جـ + ب جـ ا + جـ ٢ ب .
(٢) ٢ س ص + ٣ ص س - ٥ س ص ٢ .
(٣) ٥ س ص + ٦ ص س - ٣ س ص .
(٤) ٨ س ص ع + ٢ ع ص س - ٢ س ص .
(٥) ٦ س ص + ٣ ص ٢ - ٥ ص س - ٢ ٢ ص .
(٦) ٨ ٢ ب + ٩ ب جـ - ٧ ب ٢ - ٩ جـ ب .
(٧) ٢ ٢ ب + ٥ س ص - ٣ ب ٢ + ٧ ص س .
(٨) س ص + ٣ ص س + س - ص .
(٩) ٥ ٢ ب - ٢ ب ٢ + ب - ٢ .
(١٠) ٦ س ص - ٢ ٢ ص - ٤ ص س + ٢ ص ٢ .

[جـ] اختصر ما يلي ثم أوجد قيمة الناتج بعد الاختصار باعتبار الآتي :
ا = ٥ ، ب = ٣ ، جـ = ٢ .
(١) ٥ ٢ + ٦ ب - ٧ جـ + ٣ جـ .
(٢) ١٢ ا - ٥ ب + ٣ جـ - ٤ ب .
(٣) ٧ ا - ٨ ب + ٩ جـ .
(٤) ١٢ ٢ - ٦ ب + ٢ جـ - ٤ ٢ .
(٥) ٥ ٢ ب + ٦ ب جـ - ٣ ٢ + ٦ ب .
(٦) ٣ ٢ جـ - ٥ جـ ب + ٦ ٢ ب .
(٧) ١٢ ا - ٦ جـ + ٣ ب - ٧ ا جـ .
(٨) ٢ + ب + جـ - ٢ ب .
(٩) ٢ - ب - جـ + ٢ جـ .
(١٠) ٢ ٢ - ٢ ب + ٢ جـ - جـ ب .
(١١) ٣ جـ - ٥ ب ٢ + ٦ ٢ جـ - ٣ ب .
(١٢) ٢ ٢ جـ - ٢ ب جـ + ٣ ٢ جـ .
(١٣) ٥ ٢ جـ - ٥ ب جـ + ٣ جـ ٢ - جـ .
(١٤) ٢ ٢ ب جـ + ٣ جـ ب ٢ - ٥ ب جـ .
(١٥) ٥ ٢ ب جـ - ٢ جـ ب ٢ + ٣ جـ .

الدرس السابع عشر :

قوانين المعادلات الجبرية

Laws of Equations

[١٧ ـ ١] قوانين الإبدال والدمج والتوزيع :

Commutative, Associative and Distributive Laws :

(أ) قانون الإبدال :

إذا كانت س ، ص ، ع تُمثل أعداداً فإن :

(١) س + ص = ص + س .

(٢) س ص = ص س .

أى أنه فى (١) أى فى الجمع فإن الكميات الجبرية يمكن إبدالها .

وكما فى (٢) أى فى الضرب فإن الكميات الجبرية يمكن إبدالها كذلك .

إلا أن قانون الإبدال لا ينطبق على عمليتى الطرح والقسمة .

ففى الطرح :

إذا اعتبرنا س – ص فإنها لا تساوى ص – س .

ومثال ذلك : ٥ – ٦ لا تساوى ٦ – ٥ .

فالأولى تساوى – ١ بينما الثانية تساوى + ١ .

وفى القسمة :

إذا قلنا $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ فإنها لا تساوى $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$.

ومثال ذلك :

$\frac{٤}{٢}$ لا تساوى $\frac{٢}{٤}$.

فالأولى ($\frac{٤}{٢}$) = ٢ بينما الثانية ($\frac{٢}{٤}$) فتساوى $\frac{١}{٢}$.

(ب) قانون الدمج :

إذا كانت ا ، ب ، جـ تمثل أعداداً جبرية فإنه :

فى الجمع : ا + ب + جـ = ا + (ب + جـ) = ب + (ا + جـ) = جـ + (ا + ب) .

ومثال ذلك :

٥ + ٦ + ٧ = ٥ + (٦ + ٧) = ٦ + (٧ + ٥) = ٧ + (٦ + ٥) = ١٨

وفى الضرب : (ا ب) جـ = ا (ب جـ) .

ومثال ذلك : (٥ × ٦) × ٢ = ٥ × (٦ × ٢) = ٦٠ .

(جـ) قانون التوزيع :

إذا كانت س ، ص ، ع تمثل أعداداً جبرية فإن :

س (ص + ع) = س ص + س ع .

ومثال ذلك : إذا اعتبرنا س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٤ .

∴ ٢ (٣ + ٤) = ٢ × ٣ + ٢ × ٤ = ٦ + ٨ = ١٤

وكذلك : (ص + ع) س = ص س + ع س .

فإن (٣ + ٤) × ٢ = ٣ × ٢ + ٤ × ٢ = ٦ + ٨ = ١٤ .

[١٧ ـ ٢] التعويض عن الرموز الجبرية :

Simple Substitution

إن الرموز الجبرية المستعملة فى المقادير الجبرية تعنى فى كثير من الحالات وترمز إلى مقادير عددية أو قيم عددية .

والأمثلة التالية تُوضح ذلك :

مثال (١) : إذا افترضنا أن س = ٥ ، فأوجد قيمة ٥ س + ٦

∴ ٥ س + ٦ = ٥ × ٥ + ٦ = ٢٥ + ٦ = ٣١

مثال (٢) : إذا افترضنا أن س = − ٢ فأوجد قيمة ٧ س − ٨ − ٣ س .

∴ ٧ س − ٨ − ٣ س = ٤ س − ٨ = ٤ × (− ٢) − ٨ = − ٨ − ٨ = − ١٦

مثال (٣) : إذا افترضنا أن س = ٣ ، ص = ٢ ، فأوجد قيمة : ٧ س − ٥ ص ؟

٧ س − ٥ ص = ٧ × ٣ − ٥ × ٢ = ٢١ − ١٠ = ١١

مثال (٤) : أوجد قيمة ٥ س ص − ٣ س − ٦ ص س − ٤ ص إذا علمت أن س = ٣ ، ص = − ٢ .

الحــل :

∵ ٥ س ص − ٦ ص س = ٥ س ص − ٦ س ص = − س ص

∴ ٥ س ص − ٣ س − ٦ ص س − ٤ ص = − س ص − ٣ س − ٤ ص =

= − ٣ × − ٢ − ٣ × ٣ − ٤ × − ٢ = ٦ − ٩ + ٨ = ١٤ − ٩ = ٥

مثال (٥) : أوجد قيمة $\frac{\text{٦ س ص}}{\text{٤ م}} - \frac{\text{٢ س ع}}{\text{ص}}$

إذا كانت س = ٣ ، ص = ٢ ، ع = ١ ، م = ١,٥

الحــل :

$\frac{\text{٦ × ٣ × ٢}}{\text{٤ × ١,٥}} - \frac{\text{٢ × ٣ × ١}}{\text{٢}}$ = ٦ − ٣ = ٣

تدريبات

[أ] إذا كانت قيمة س = ٢ فأوجد قيمة ما يلي :

(١) ٧ س

(٢) ١٩ س

(٣) ٣ س − ٤

(٤) ١٢ س − ٥ + س

(٥) ٧ س + ٦ − ٢ س

(٦) $\frac{١}{٢}$ ٤ س − ٦ − س

(٧) $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٢}$ ٣

(٨) ٦ − ٥ س

(٩) ١٠ س − ٧

(١٠) − $\frac{٣}{٢}$ س − ٢ + $\frac{٧}{٢}$ س

[ب] إذا كانت قيمة س = ٥ ، ص = ٢ فأوجد قيمة ما يلى :

(١) ٣ س − ٢ ص
(٢) ٥ ص − ٣ س
(٣) $\frac{\text{٧}}{\text{٥}}$ س − $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ ص
(٤) ٢ س − ٥ ص
(٥) ٢ س − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ٢ ص
(٦) ٧ س − ٣ ص .
(٧) ٦ س + ص .
(٨) س − ص
(٩) ٣ س + ٢ ص
(١٠) ٥ س − ٣ ص

[جـ] إذا كانت ا = ٤ ، ب = ٥ ، جـ = ٢ فأوجد قيمة ما يلى :

(١) ٣ أ − ٢ ب − جـ − أ
(٢) $\frac{\text{٤ ب}}{\text{٥ أ}} - \frac{\text{٢ جـ}}{\text{أ}}$ + ب
(٣) ٦ أ − جـ + ٤ ب
(٤) $\frac{\text{٦ أ}}{\text{جـ}}$ − ٢ ب جـ + ٣
(٥) $\frac{\text{١٣ أ − جـ}}{\text{٢ ب}}$
(٦) ٦ ب ÷ ٥ جـ .
(٧) ٥ أ ÷ ٢ ب جـ .
(٨) ٣ أ ب جـ ÷ ٨ ب
(٩) ٢ ا جـ + ٣ ب جـ − ٥ أ ب جـ
(١٠) ٥ ب ÷ (٤ أ + ٢ جـ)

مسائل أخرى متنوعة :

[١] إذا كانت العلاقة بين عمر رجل س وعمر ابنه ص تتوقف على فارق السن بينهما ع .

فإذا علمت أن ٢ س = ٣ ع + ٢ ص

فأوجد :

(أ) عمر الرجل إذا كان الفارق بينهما ع = ٢٢ سنة ، عمر الابن = ٧ سنوات .

(ب) عمر الابن إذا كان عمر الرجل = ٤٦ والفارق بينهما = ٢٤ سنة .

[٢] إذا كانت مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ حاصل ضرب مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع المحصور بينهما .

وكان طول القاعدة الصغرى = س ، طول القاعدة الكبرى = ص ، الارتفاع = ع

فأوجد مساحة شبه المنحرف إذا كان :

(أ) س = ٦ سم ، ص = ١٢ سم ، ع = ٣ سم

(ب) س = ٥ ، ص = ٨ ، ع = ٦ سم

وإذا كانت مساحة شبه المنحرف = ١٠٠ سم٢ فأوجد :

(أ) طول القاعدة الصغرى إذا كان طول القاعدة الكبرى = ٢٠ سم ، الارتفاع = ٨ سم .

(ب) الارتفاع إذا كان مجموع القاعدتين = ٥٠ سم .

[٣] إذا كانت تكلفة نقل طن من الفاكهة س تتوقف على قيمة إيجار السيارة ص وعلى بعد المسافة المنقولة منها ف .

وكانت تربطهم العلاقة الجبرية التالية :

س = $\frac{١}{٥}$ ص + $\frac{١}{٣}$ ف جنيهاً .

فأوجد :

(أ) تكلفة نقل الطن إذا كان إيجار السيارة ٢٠٠ جنيهاً والمسافة = ٩٠ كم .

(ب) قيمة إيجار السيارة إذا كانت الكمية المنقولة هى ٥ طن والمسافة ١٢٠ كم وتكلفة نقل الطن = ٨٠ جنيهاً .

[١٧ ـ ٣] حل المعادلات البسيطة :

Solving simple equations :

إذا قلنا أن ٨ + ٢ = ١٠ فهى فى لغة الرياضيات تعنى معادلة حسابية .

والآن لو ذكرنا هذه المعادلة فى صورة لغز بسيط كالتالى :

ما هو العدد الذى إذا أضيف إليه العدد ٢ لأصبح الناتج ١٠ ولحل هذا اللغز نعتبر أن العدد المجهول = س

∴ لو أضفنا على العدد س ، العدد ٢ يُصبح الناتج ١٠ ويمكن تحويل هذا الكلام إلى معادلة رياضية كالتالى :

س + ٢ = ١٠

ويطلق على هذه المعادلة بمعادلة جبرية لأن بها رموز أو مجاهيل ، وهى ذات مجهول واحد وهو س ، حيث أنه توجد معادلات فى مجهولين وفى ثلاثة مجاهيل وهكذا ،..

وهذا المجهول فى المعادلة المذكورة له قيمة واحدة فقط ولحسابة نقول :

∵ س + ٢ = ١٠

∴ س = ١٠ − ٢ = ٨

∴ س = ٨

مثال (١) : لنعتبر المعادلة : ٣ س − ٥ = ١٠

ويكون حل هذه المعادلة ، أى إيجاد قيمة س التى تجعل طرفى المعادلة متعادل .

أو إيجاد قيمة س التى لو ضربت فى ٣ وطرح منها ٥ لكان الناتج = ١٠ .

وتعنى علامة = أن الطرف الأيمن للمعادلة " ٣ س − ٥ " يعادل تماماً أو يتزن تماماً مع الطرف الأيسر للمعادلة " ١٠ " .

وهذا يلزمنا بأن أى تغيير يتم فى الطرف الأيمن لابد وأن **يعادله** نفس التغيير بالضبط فى الطرف الأيسر .

وذلك بمعنى أننا إذا أضفنا فرضاً + ٥ للطرف الأيمن فإنه لا بد وأن **نضيف** كذلك + ٥ للطرف الأيسر وبذلك تُصبح المعادلة كالتالى :

٣ س − ٥ + ٥ = ١٠ + ٥

∴ ٣ س = ١٥ وهى نفس المعادلة الأصلية تماماً .

لاحظ أن الطرف الأيمن هنا (٣ س) ينقص عن الطرف الأيمن فى المعادلة الأصلية (٣ س − ٥) بمقدار ٥ .

بينما الطرف الأيسر فى المعادلة الأخيرة (١٥) يزيد عن الطرف الأيسر فى المعادلة الأصلية (١٠) بمقدار ٥ .

وحيث أن ٣ س = ١٥ ∴ بقسمة كل طرف على ٣

ينتج أن ٣ س ÷ ٣ = ١٥ ÷ ٣

∴ س = ٥

وهذا هو حل المعادلة أى أن س = ٥ تحقق المعادلة المعطاة لنا .

مثال (٢) : ٥ س − ٦ = ١٠ + ٣ س

نلاحظ فى هذا المثال أن المجهول س يظهر فى كلٍ من طرفى المعادلة ويلزم أولاً وقبل كل شيء آن نجمع الحدود التى تحتوى على س مع بعضها فى طرف واحد من طرفى المعادلة ،

ولحل هذه المسألة نقوم بطرح ٣ س لكلٍ كلا من طرفى المعادلة .

∴ ٥ س − ٦ − ٣ س = ١٠ + ٣ س − ٣ س

∴ ٢ س − ٦ = ١٠

وبإضافة ٦ لكلٍ من طرفى المعادلة .

∴ ٢ س − ٦ + ٦ = ١٠ + ٦

∴ ٢ س = ١٦

وبقسمة طرفى المعادلة على ٢ :

∴ ٢ س ÷ ٢ = ١٦ ÷ ٢

∴ س = ٨ وهذا هو حل المعادلة .

موجز للمسألة ∵ ٥ س − ٦ = ١٠ + ٣ س

∴ بطرح ٣ س من كلا الطرفين ∴ ٢ س − ٦ = ١٠

وبإضافة ٦ **لكلٍ** من الطرفين ∴ ٢ س = ١٦

وبقسمة كلا الطرفين على ٢ ∴ س = ٨

تدريبات

[أ] ضع الجمل التالية فى صورة معادلات جبرية :

(١) عدد مجهول ، نضاعفه وننقص منهم ٥

(٢) عدد مجهول نطرح منه ٥ والناتج = ١٠

(٣) عدد مجهول نضيف إليه ٥ والناتج = ١٠ + ١/٢ العدد المجهول .

(٤) عدد مجهول نضربه فى ٦ والناتج = ١٢ ـ ضعف العدد المجهول .

(٥) عدد مجهول نضربه فى نفسه ثلاث مرات ونطرح منه ٩ .

(٦) عدد مجهول نضربه فى ٤ ونطرح منهم ٣ فيكون الناتج ٩ .

[ب] حل المعادلات التالية وذلك بطرح نفس العدد من كلا الطرفين :

(١) س + ٩ = ١٠

(٢) س + ٢ = ٨

(٣) ٢ + ٢ س = ٦

(٤) ٣ أ + ٩ = ٢

(٥) ص + ١ = ٧

(٦) ٢ س + ٢ س = ١٤

(٧) ٢ س + ٨ = ١٠

(٨) ٦ + ٥ س = ٢٦

(٩) س + ٣ = ٣

(١٠) س + ١٠ = ٨

[جـ] حل المعادلات التالية وذلك بإضافة نفس العدد لكلا الطرفين :

(١) س − ٥ = ٤

(٢) س − ٢ = ٨

(٣) س − ١ = ٩

(٤) س − ٢ = صفر

(٥) س − ١٠ = ١

(٦) س − ٨ = ٢

(٧) س − ٢ = ٢

(٨) ١٠ = س − ١

(٩) ٤ = أ − ٧

(١٠) ١٣ = ب − ٢

[د] حل المعادلات التالية :

(١) ٥ س = ١٥

(٢) ٢ س = ١٢

(٣) ٧ س = ٢٨

(٤) ١٢ س = ١٢

(٥) ٦ س = ٤٢

(٦) س − ٤ = ١٢

(٧) س − ٨ = ٣

(٨) س + ٩ = ٩

(٩) ١٣ = س − ٣

(١٠) س − ٩ = ١٨