الفصل الثامن

تطبيقات الجبـــر الخطــــي
APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA

سنقدم في هذا الفصل سبعة تطبيقات على مواضيع الجبر الخطي التي شملتها الفصول السابقة . ولقد راعينا في اختيارنا لهذه التطبيقات التنوع في المواضيع وشمولها على غالبية المفاهيم التي درسها الطالب في هذا الكتاب . ولعلنا من خلال هذه التطبيقات نجيب ، ولو بشكل بسيط ، على السؤال الذي يطرحه غالبية دارسي الرياضيات وهو : ما فائدة الرياضيات ؟

سنبدأ بتطبيق للجبر الخطي في الهندسة التحليلية وذلك من باب " الأقربون أولى بالمعروف " ثم نتناول التطبيقات الحياتية الأخرى .

(٨ ، ١) إيجـــاد معادلة منحنى مار بنقط معطـــاة
Finding The Equation of A Curve Passing Through Given Points

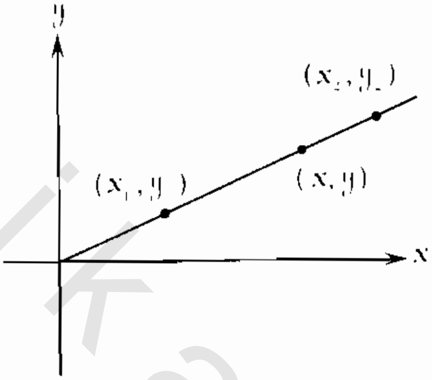
نبين في هذا التطبيق كيفية إستخدام المحددات لإيجاد معادلة منحنى مار بنقط معينة في المستوى الإقليدي . سيقتصر تطبيقنا على معادلة المستقيم والدائرة ولكن هذه الطريقة تصلح لإيجاد معادلة أي قطع مخروطي مار بنقاط معينة . كما أن هذه الطريقة مفيدة لإيجاد معادلة كل من المستوى ، الكرة وبعض السطوح المارة بنقاط معطاة في الفضاء الثلاثي .

إن فكرة هذا التطبيق ترتكز على النتيجة (٦ ، ٣) والتي يمكن إعادة صياغتها كما يلي : إذا كان لدينا نظام معادلات متجانس وفيه عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات فإن له حلاً غير تافه إذا وفقط إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفراً .

معادلة المستقيم

إذا كان لدينا النقطتان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) في المستوى ونريد إيجاد معادلة المستقيم المار بها فإن هذه المعادلة هي على الصورة $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ حيث a_1 ، a_2 و a_3 أعداداً حقيقية بحيث أن a_1 أو a_2 لا تساوي صفراً .

أنظر الشكل (١ ، ٨)



شكل (١، ٨)

إذا كانت (x, y) أي نقطة على هذا المستقيم فإننا نحصل على نظام المعادلات المتجانس التالي :

$$a_1x + a_2x + a_3 = 0$$
$$a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 = 0$$
$$a_1x_2 + a_2y_2 + a_3 = 0$$

حيث a_1 ، a_2 و a_3 هي المجاهيل . لاحظ أننا نبحث عن حل غير تافه للنظام أعلاه لذا فإن محدد مصفوفة المعاملات للنظام يجب أن يساوي صفراً . أي أن :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومعنى ذلك أن النقطة (x, y) تقع على المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا كان المحدد أعلاه يساوي صفراً . كما أن العكس صحيح . أي أن المحدد يساوي صفراً لكل نقطة (x, y) تقع على المستقيم .

مثال (١ ، ٨)

استخدم المحددات لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2,3)$ و $(-1,1)$.

الحل

مما تقدم نجد أن النقطة (x,y) تقع على المستقيم إذا وفقط إذا كان

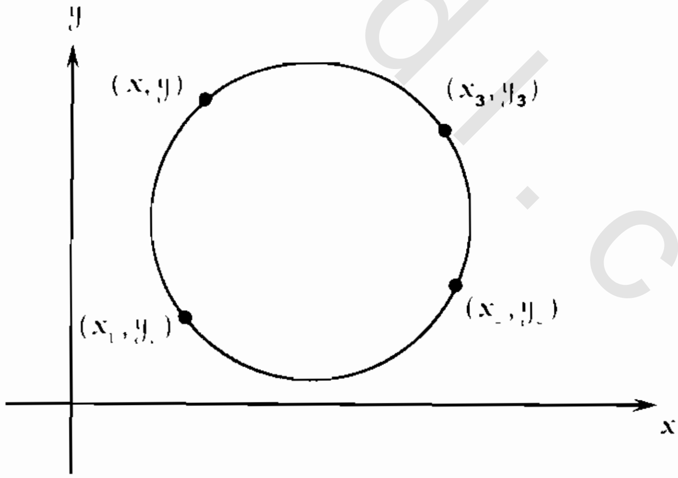
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدد نحصل على المعادلة : $2x-3y+5=0$. □

معادلة الدائرة

نعلم من دروس الهندسة أن أي ثلاث نقاط (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) في المستوى وليست على استقامة واحدة تعين دائرة وحيدة . إن معادلة الدائرة هي على الصورة : $a_1(x^2+y^2)+a_2x+a_3y+a_4=0$ حيث $a_1 \neq 0$.

إذا كانت (x,y) أي نقطة على الدائرة (أنظر الشكل (٢ ، ٨))



شكل (٢ ، ٨)

فإننا نحصل على النظام المتجانس التالي :

$$a_1\left(x^2+y^2\right)+a_2x+a_3y+a_4=0$$
$$a_1\left(x_1^2+y_1^2\right)+a_2x_1+a_3y_1+a_4=0$$
$$a_1\left(x_2^2+y_2^2\right)+a_2x_2+a_3y_3+a_4=0$$
$$a_1\left(x_3^2+y_3^2\right)+a_2y_3+a_3y_3+a_4=0$$

حيث المجاهيل هي a_1 , a_2 , a_3 , a_4 وأننا نبحث عن حل غير تافه للنظام. بإستخدام النتيجة (٦ ، ٣) نعلم أنه يوجد حل غير تافه للنظام أعلاه إذا وفقط إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفراً . أي أن

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 .$$

ومعنى ذلك أن (x , y) تقع على الدائرة إذا وفقط إذا كان المحدد أعلاه يساوي صفراً.

مثال (٢ ، ٨)

استخدم المحددات لإيجاد معادلة الدائرة المارة بالنقاط $(1,0)$ ، $(1,-1)$ و $(-1,1)$.

الحل

النقطة (x , y) تقع على الدائرة إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

وبفك المحدد نحصل على المعادلة :

$$\left(x^2+y^2\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 .$$

أي أن $\left(x^2+y^2\right)(-2)-x(2)+y(-2)-(-4)=0$. وبالتالي فإن

$x^2+y^2+x+y-2=0$ هي المعادلة المطلوبة . □

تمارين (١ ، ٨)

(١) جد معادلة المستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية :

(أ) $(2,5)$ ، $(4,7)$. (ب) $(2,4)$ ، $(-1,3)$.

(جـ) $(0,-1)$ ، $(1,0)$. (د) $(-4,7)$ ، $(2,4)$.

(هـ) $(1،1)$ ، $(2,2)$. (و) $(1,4)$ ، $(3,4)$.

(٢) جد معادلة الدائرة المارة بالنقاط الثلاثة في كل مما يلي :

(أ) $(0,0)$،$(1,2)$،$(2,1)$.

(ب) $(1,0)$،$(0,1)$،$(-1,0)$.

(جـ) $(3,7)$،$(1,1)$،$(-1,1)$.

(٣) هل توجد دائرة تمر بالنقاط $(2,5)$ ،$(-1,3)$ ،$(5,7)$ ؟ بين السبب ؟

(٤) المعادلة $ax^2+bx+cy+d=0$ ، $a\neq 0$ ، $c\neq 0$ تصف قطعاً مكافئاً .

(أ) باستخدام المحددات عين صيغة لمعادلة القطع المكافئ المار بالنقاط (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) التي لا تقع على استقامة واحدة .

(ب) استخدم (أ) لإيجاد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط :

$(2,0)$،$(1,3)$ و $(-1,2)$.

(٥) إذا كانت الصيغة $\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ تصف مساحة المثلث الذي رؤوسه (x_1,y_1)،(x_2,y_2) و (x_3,y_3) فاحسب مساحة المثلث الذي رؤوسه $(1,0)$، $(2,2)$ و $(4,3)$.

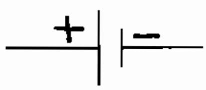
(٦) إذا كانت $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ هي معادلة المستوى المار بالنقاط (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) و (x_3, y_3, z_3) فاحسب معادلة المستوى المار بالنقاط $(0,1,0)$ ، $(-1,3,2)$ و $(-2,0,1)$.

(٢ ، ٨) الدوائر الكهربائية

Electrical Circuits

في هذا التطبيق نبين كيفية استخدام أنظمة المعادلات الخطية لإيجاد قيم التيار في الأجزاء المختلفة من الدائرة الكهربائية . سنقصر دراستنا في هذا التطبيق على الدوائر الكهربائية الحاوية على ما يسمى بالتيار المباشر (direct current) ولن نتطرق إلى دوائر التيار المتناوب (alternate current) لكونها تتبع قوانين فيزيائية مختلفة .

تتكون الدائرة الكهربائية من بطاريات هي مصدر التيار ومقاومات (resistors) تستهلك الطاقة مثل المصابيح . ولغرض تسهيل وصف الدائرة الكهربائية تستخدم الرموز التالية :

بطـــــارية 

مقـــــاومة 

هناك ثلاثة مقادير فيزيائية تتعلق بدراسة الدوائر الكهربائية هي :

(١) فرق الجهد ويرمز له بالرمز E ويقاس بوحدة الفولت (volt) أو V . فمثلاً أن قيمة E بين قطبي بطارية من نوع AA التي تباع في الأسواق هي 1.5 V .

(٢) المقاومة R وتقاس بوحدة الأوم (ohm) والتي يرمز لها بالرمز Ω .

(٣) التيار I ويقاس بوحدة الامبير (ampere) ويرمز له بالرمز A .

تحكم المقادير الثلاثة أعلاه ثلاثة قوانين فيزيائية تستخدم في دراسة الدوائر الكهربائية للتيار المباشر وهي :

(١) قانون أوم : ونعبر عنه بالمعادلة $E = R\,I$.

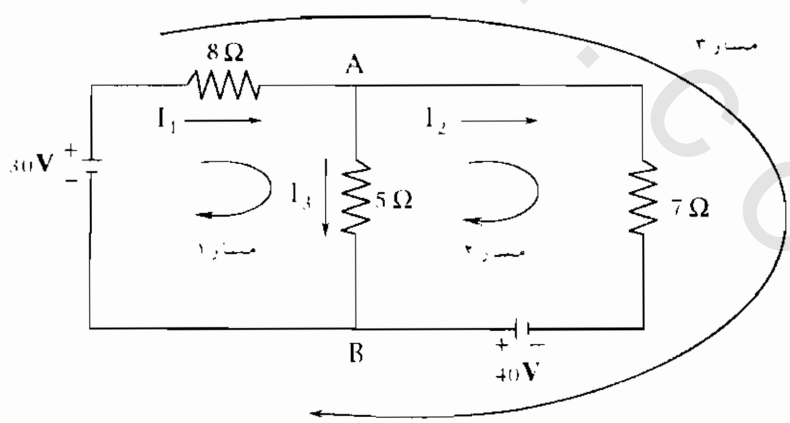
(٢) قانون كركوف للتيارات المباشرة : وهو أن مجموع قيم التيارات الكهربائية الداخلة في أي نقطة من الدائرة الكهربائية يساوي مجموع قيم التيارات الخارجة منها .

(٣) قانون كركوف للجهد : في كل مسار مغلق في الدائرة الكهربائية يكون مجموع فروقات الجهد مساوياً للصفر .

لأجل توضيح القوانين الثلاثة أعلاه وبيان كيفية استخدام أنظمة المعادلات الخطية في إيجاد قيم التيار الكهربائي في أجزاء الدائرة الكهربائية المختلفة ، نورد المثال التالي :

مثال (٣ ، ٨)

أحسب قيم التيارات I_1، I_2، I_3 في الدائرة الموضحة في الشكل (٣ ، ٨) .



شكل (٣ ، ٨)

الحل

لاحظ أولاً أننا عينا اتجاهاً لانسياب التيار في أجزاء الدائرة ويتم ذلك حسب اختيار الشخص وذلك لغرض وضع أساس يتم بناءً عليه اعتبار قيمة التيار بالاتجاه المعين موجب وبالاتجاه المعاكس سالب . كذلك لاحظ أننا عينا ثلاثة مسارات مغلقة ووضعنا اتجاهاً نعتبره الاتجاه الموجب . الآن نطبق قانون كركوف للتيارات في النقطتين A و B فنحصل على :

$$\text{للنقطة A} \quad I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{للنقطة B} \quad I_3 + I_2 = I_1$$

إن كلتا المعادلتين أعلاه تبسط إلى المعادلة الخطية :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (١)$$

من أجل إيجاد قيم I_1، I_2 و I_3 نحتاج إلى معادلتين أخريتين نحصل عليهما من استخدام قانون كركوف للجهد ولأجل تطبيق القانون في المسارات الموضحة في الدائرة يجب مراعاة ما يلي :

(١) التيار المار في مقاومة بالاتجاه الموجب للمسار يولد فرق جهد سالب والتيار المار بالاتجاه السالب للمسار يولد فرق جهد موجب .

(٢) التيار المار في البطارية بالاتجاه الموجب للمسار يولد فرق جهد سالب إذا مر من + إلى – وفرق جهد موجب إذا مر من – إلى + . أما التيار المار بالاتجاه السالب للمسار فيولد فرق جهد موجب إذا مر من + إلى – وفرق جهد سالب إذا مر من – إلى + ، أي عكس الحالة الأولى . الآن نطبق قانون كركوف للجهد على المسارين (١) و (٢) مع استخدام قانون أوم المذكور أعلاه فنحصل من المسار (١) على

$$30 - 8I_1 - 5I_3 = 0 \qquad (٢)$$

ومن المسار الثاني نحصل على :

$$40 + 5I_3 - 7I_2 = 0 \qquad (٣)$$

من المعادلات (١) ، (٢) و (٣) نحصل على النظام :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$8I_1 \quad + 5I_3 = 30$$
$$I_2 - 5I_3 = 40$$

ومنه نحصل على الحل : $I_1 = \frac{560}{131}$, $I_2 = \frac{670}{131}$, $I_3 = \frac{-110}{131}$.

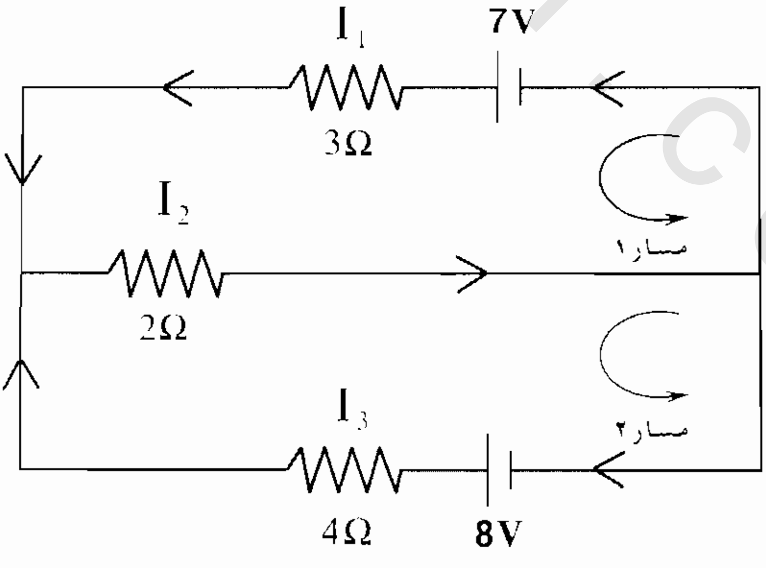
لاحظ أن I_3 سالب ويعني أن اتجاهه هو عكس الاتجاه الموضح في رسم الدائرة الكهربائية . قد يسأل القارئ : لماذا لم نستخدم المسار (٣) عند تطبيق قانون كركوف للجهد . والجواب أن تطبيق هذا القانون على المسار (٣) يعطينا معادلة مكررة ، بمعنى أنه يمكن استخدامها بدلاً من أي من المعادلتين المشتقتين من المسار (١) أو (٢) وتعطينا الجواب السابق نفسه . نرجو أن يتحقق القارئ من ذلك . □

تمارين (٢ ، ٨)

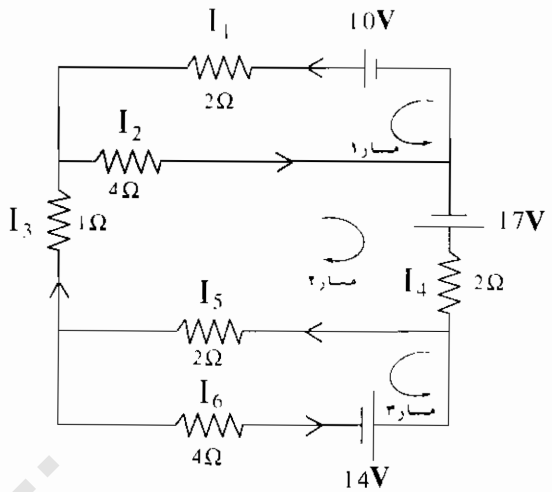
(١) في المثال الوارد أعلاه ، استخدم المسار (٣) بدلاً من المسار (٢) لإيجاد معادلة ثالثة ومن ثم إيجاد قيم التيارات I_1 ، I_2 و I_3 ، وتحقق من أن النتيجة هي ذاتها التي وردت في حل المثال .

(٢) جد التيارات في الدوائر التالية :

(أ)



(ب)



(٣ ، ٨) نظرية الرسومات

Graph Theory

في هذا التطبيق سنبين كيفية استخدام المصفوفات في تمثيل الرسومات الموجهة وغير الموجهة والتعرف على بعض خصائصها من خلال العمليات الحسابية على المصفوفات . نبدأ بالتعريف التالي :

تعريف (١ ، ٨)

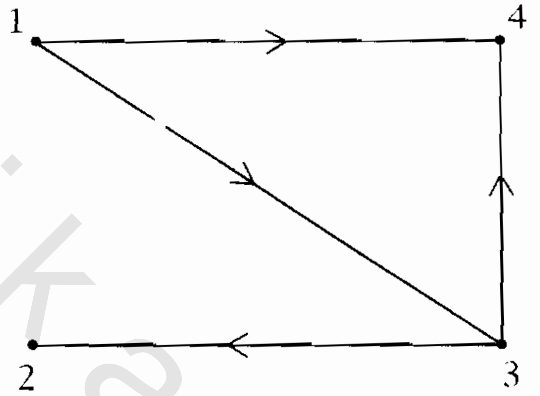
إذا كان لدينا مجموعة منتهية V ومجموعة $E \subseteq V \times V$ بحيث أن E لا تحوي على أي زوج من النوع (v, v) فنسمى الزوج الرتب (V, E) رسماً موجهاً (directed graph). تسمى عناصر V رؤوس الرسم (vertices) وعناصر E حواف الرسم الموجه (directed edges) . يمكن تمثيل الرسم الموجه (V, E) في المستوى وذلك باعتبار أن مجموعة الرؤوس V هي نقط في المستوى والحافة (v, u) في E عبارة عن خط متجه من v إلى u مع توضيح الاتجاه بواسطة سهم يوضع عليه كما في المثال التالي :

مثال (٤ ، ٨)

مثل الرسم التالي على المستوى

$V=\{1,2,3,4\}$ ، $E=\{(1,3),(1,4),(3,2),(3,4)\}$.

الحل



شكل (٤ ، ٨)

إن طريقة تمثيل الرسومات الموجهة في المستوى والموضحة في المثال (٤ ، ٨) هي الطريقة الشائعة والأكثر سهولة في وصف الرسومات . ولكن هناك طريقة أخرى للوصف تستخدم فيها المصفوفات تكون مفيدة جداً في التعرف على بعض خواص الرسومات الموجهة . لشرح هذه الطريقة نفرض أننا رتبنا V على شكل متتالية. أي $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. نمثل الآن (V, E) بواسطة مصفوفة مربعة $M=[m_{ij}]$ من الدرجة n ، حيث

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & ,(v_i, v_j)\in E\\ 0 & ,\text{فيما عدا ذلك}\end{cases} .$$

مثال (٥ ، ٨)

مثل الرسم الموجه الوارد في المثال (٤ ، ٨) بواسطة المصفوفات .

الحل

نعتمد ترتيب عناصر V بحيث أن $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, v_4 = 4$ فنحصل على المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \square$$

يطلق عادة اسم مصفوفة الرؤوس (vertex matrix) على المصفوفة أعلاه .

إن أي مصفوفة $M = [\, m_{ij} \,]$ تتمتع بالشرطيين التاليين :

(١) $m_{ij} = 0$ أو $m_{ij} = 1$ لكل i, j .

(٢) $m_{ii} = 0$ لكل i هي مصفوفة رؤوس لرسم موجه . نوضح هذا بالمثال التالي :

مثال (٦ ، ٨)

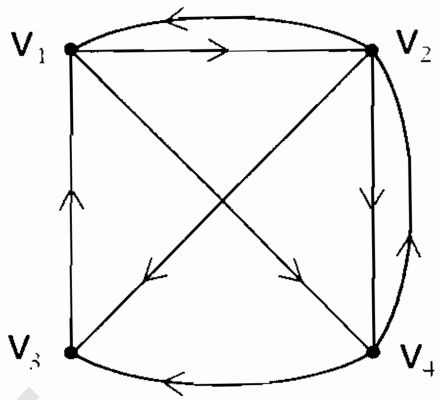
إذا كانت لديك المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فبين ما إذا كانت مصفوفة رؤوس أم لا ثم مثل الرسم الموجه في المستوى .

الحل

المصفوفة M تحقق شرطي مصفوفة الرؤوس الواردة أعلاه لذلك فهي مصفوفة رؤوس. وبالتالي فهي تمثل رسماً موجهاً نمثله في المستوى كما في الشكل (٨ ، ٥)

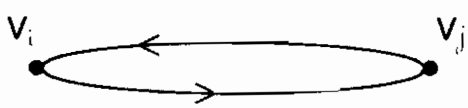


شكل (٥ ، ٨)

ملحوظة

لغرض تبسيط الشكل الممثل للرسم الموجه في المستوى نعمد فيما سيأتي إلى تمثيل الخطين المتعاكسين الواصلين بين رأسين مختلفين v_i و v_j كما يلي :

بدلاً من :



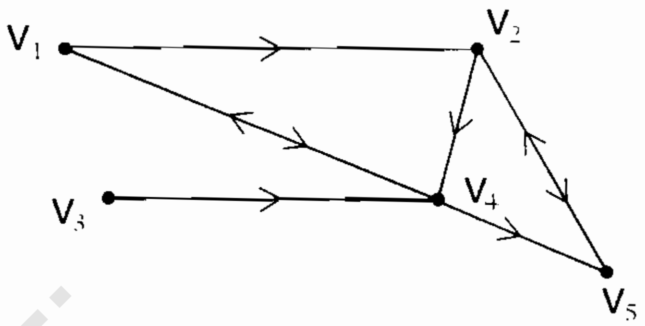
الآن نقدم التعريف التالي :

تعريف (٢ ، ٨)

إذا كان (V, E) رسماً موجهاً وكان $u, v \in V$ فنقول إن P مســـار موجه (direted path) من u إلى v إذا وجدت عناصر $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ حيث $u = v_1$ ، $v = v_r$ وكان $(v_{i-1}, v_i) \in E$ لكل $2 \le i \le r$ وفي هذه الحالة يقال أن طول P هو $r-1$ ونكتب P على الصورة : $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_r$.

مثال (٨ ، ٧)

إذا كان لديك الرسم الموجه التالي :



شكل (٨ ، ٦)

فعين جميع المسارات الموجهة من v_1 إلى v_5 ومن v_2 إلى v_3 .

الحل

من الرسم نلاحظ أن هناك ثلاثة مسارات من v_1 إلى v_5 وهي :

$v_1 \to v_4 \to v_5$ وطوله 2

$v_1 \to v_2 \to v_5$ وطوله 2

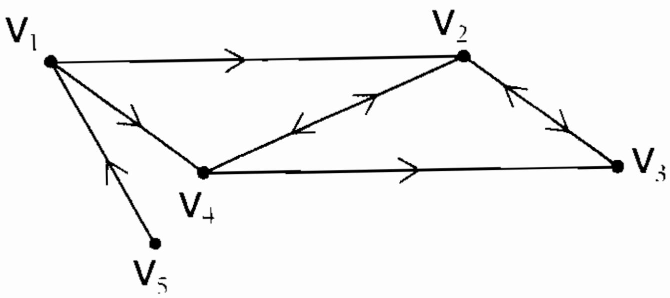
$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_5$ وطوله 3

لاحظ أنه لا يوجد مسار موجه من v_2 إلى v_3 . □

نوضح الآن كيفية استخدام المصفوفات في حساب عدد المسارات الموجهة من طول معين من رأس إلى آخر في رسم معطى . من أفضل الطرق لإيضاح الفكرة هي من خلال المثال التالي .

مثال (٨ ، ٨)

استخدم المصفوفات في إيجاد عدد المسارات الموجهة من الطول 2 من v_1 إلى v_3 .



شكل (٧ ، ٨)

الحل

أولاً نمثل هذا الرسم بواسطة مصفوفة الرؤوس كما يلي :

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ثم نجـد M^2 ونفسر ما تعينه كل قيمة من عناصرها .

$$.M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2&1&0\\0&2&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

إذا رمزنا لعناصر M^2 بالرمز $m_{ij}^{(2)}$ فإن :

$$m_{ij}^{(2)}=m_{i1}\,m_{1j}+m_{i2}\,m_{2j}+m_{i3}\,m_{3j}+m_{i4}\,m_{4j}+m_{i5}+m_{5j} \qquad (١)$$

ولما كان m_{rs} في M يساوي 1 إذا وجدت حافة موجهة من v_r إلى v_s و 0 فيما عدا ذلك فإن الحد $m_{i1}\,m_{1j}$ يساوي واحداً فقط في حالة وجود حافة من v_i إلى v_1 وحافة أخرى من v_1 إلى v_j . أي وجود مسار موجه طوله 2 من v_i إلى v_j ماراً بالرأس v_1 . وفيما عدا ذلك فإن $m_{i1}\,m_{1j}$ يساوي صفراً . إن هذا ينطبق على الحدود

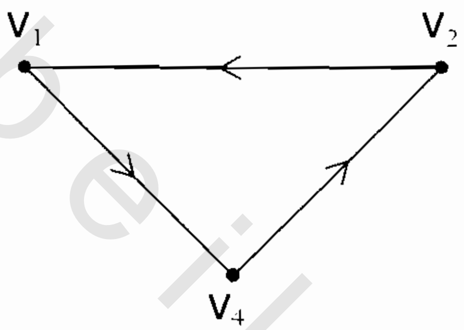
الأخرى في العلاقة (١) أعلاه . إذن يمكن الاستنتاج أن $m_{ij}^{(2)}$ يساوي عدد المسارات الموجهة التي طول كل منها 2 من الرأس v_i إلى v_j . لاحظ أن $m_{13}^{(2)}=2$. أي يوجد مساران موجهان من v_1 إلى v_3 من الطول 2. وبالرجوع إلى الشكل (٧ ، ٨) يمكنك التحقق من وجود هذين المسارين وهما $v_1 \to v_2 \to v_3$ و $v_1 \to v_4 \to v_3$. كذلك يمكنك أن تلاحظ أن M^2 ليست مصفوفة رؤوس لرسم موجه لان $m_{ii}^{(2)} \neq 0$ لكل i . وذلك لأن $m_{22}^{(2)}=2$ ، إن هذا يعني وجود مسارين موجهين من v_2 إلى نفسه وهما $v_2 \to v_3 \to v_2$ و $v_2 \to v_4 \to v_2$. □

يمكننا تعميم فكرة المثال السابق لنحصل على المبرهنة التالية والتي نقدمها دون برهان .

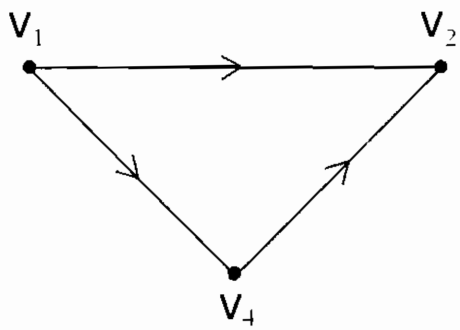
مبرهنة (١ ، ٨)
إذا كانت M مصفوفة رؤوس لرسم موجه وكانت $M^k = \left[m_{ij}^{(k)}\right]$ فإن $m_{ij}^{(k)}$ يساوي عدد المسارات الموجهة من الرأس v_i إلى v_j من الطول k . ♦

نقدم الآن فكرة العصبة (clique) في الرسم الموجه وكيفية استخدام المصفوفات للتعرف على الرؤوس الواقعة ضمن عصبة . نبدأ بالتعريف التالي :

تعريف (٣ ، ٨)
إذا كان لدينا رسم موجه (V, E) فنقول إن الرسم (V', E') رسم جزئي موجه من الرسم المعطى إذا كان :
(١) $V' \subset V$ (٢) $E' \subset E$ (٣) إذا كان $(v'_i, v'_j) \in E'$ فإن $\{v'_i, v'_j\} \subset E'$.
بالرجوع إلى الشكل (٧ ، ٨) نجد أن الشكل (٨ ، ٨) أدناه يشكل رسماً جزئياً منه بينما الشكل (٩ ، ٨) ليس كذلك .



شكل (٨ ، ٩)



شكل (٨ ، ٨)

تعريف (٨ ، ٤)

إذا كان (V', E') رسما جزئيا موجها من رسم معطى ، فيقال عن (V', E') أنه عصبة (clique) إذا تحققت الشروط التالية :

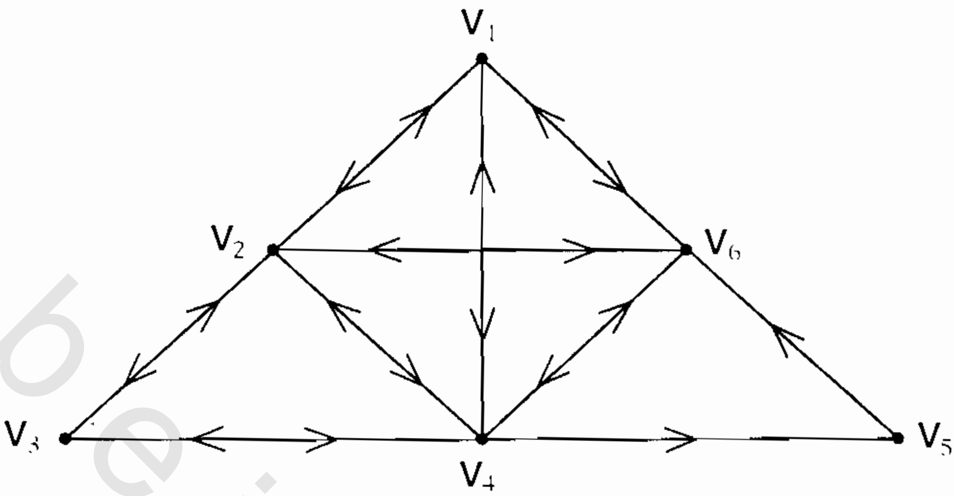
(١) V' تحوي على ثلاثة عناصر على الأقل .

(٢) $(v_i , v_j) \in E'$ و $(v_j , v_i) \in E'$ لكل $v_i , v_j \in V'$.

(٣) الرسم الجزئي (V', E') أعظمي ، أي لا يمكن إضافة رأس إلى V' بحيث يتحقق الشرط (٢) أعلاه .

مثال (٨ ، ٩)

بالنظر إلى الرسم الموجه في الشكل (٨ ، ١٠) أدناه :



شكل (١٠ ، ٨)

نجد أن الرسم الجزئي الذي رؤوسه $\{ v_1 , v_2 , v_4 , v_6 \}$ والرسم الجزئي الذي رؤوسه $\{ v_2 , v_3 , v_4 \}$ يكونان عصبتين في الرسم الموجه. لاحظ أنه قد توجد أكثر من عصبة في الرسم الواحد وأنه من الممكن إيجاد رأس أو أكثر مشترك في أكثر من عصبة . □

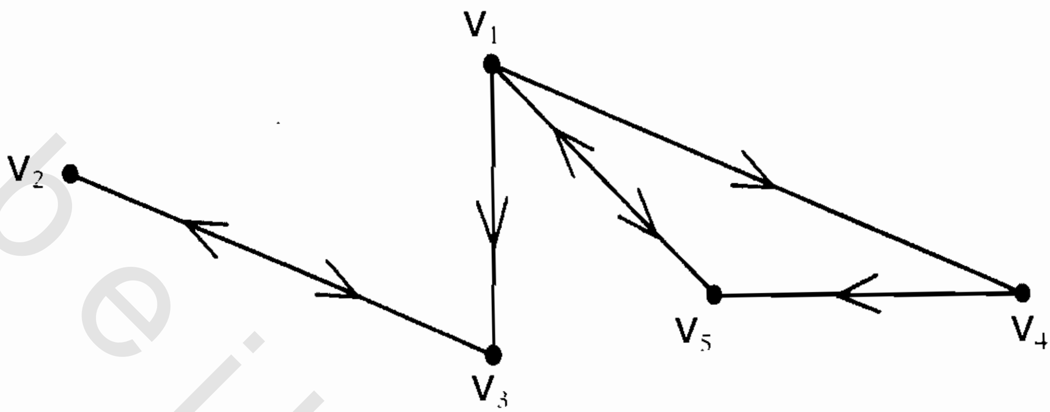
الآن ، إذا كانت لدينا مصفوفة الرؤوس $M = [m_{ij}]$ لرسم موجه (V , E) فإننا نكون مصفوفة متماثلة منها $S = [s_{ij}]$ حيث :

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & , m_{ij} = m_{ji} = 1 \text{ إذا كان } \\ 0 & , \text{ فيما عدا ذلك } \end{cases}$$

لاحظ أن $S = [s_{ij}]$ مصفوفة متماثلة وهي تمثل مصفوفة رؤوس للرسم الموجه الناتج من (V , E) بحذف جميع الحواف ذات الاتجاه الواحد فقط .

مثال (١٠ ، ٨)

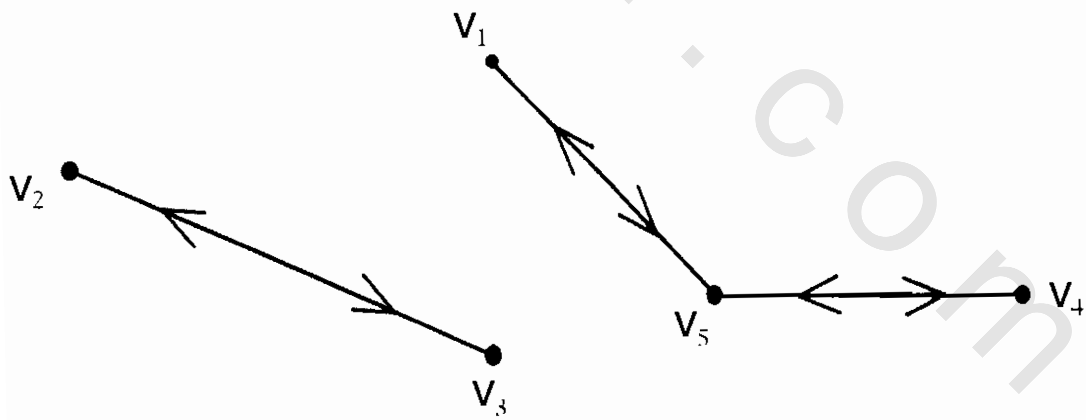
إذا كان لدينا الرسم الموجه



شكل (١١، ٨)

فإن
$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن S تمثل مصفوفة الرؤوس للرسم الموجه



شكل (١٢ ، ٨)

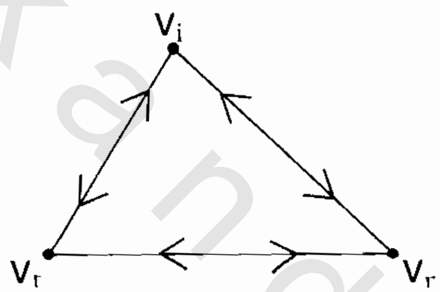
الآن نورد المبرهنة التالية :

مبرهنة (٢ ، ٨)

في الرسم الموجه (V, E) يقع الرأس v_i ضمن عصبة إذا وفقط إذا كان $s_{ii}^3 \neq 0$ حيث s_{ii}^3 هو عنصر القطر في S^3 .

البرهان

إذا كان الرأس v_i يقع ضمن عصبة فهذا يعني حسب التعريف وجود رأسين آخرين على الأقل v_r, v_t ويكون لدينا المثلث

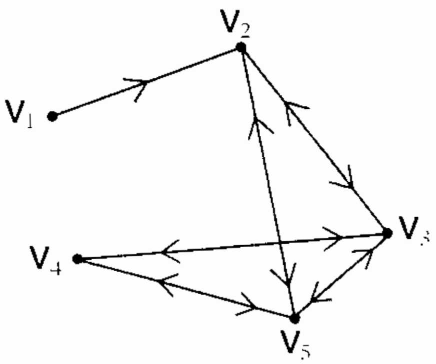


شكل (١٣ ، ٨)

وهذا يعني وجود مسار موجه من v_i إلى v_i من الطول 3 مما يجعل $s_{ii}^3 \neq 0$.
وبالعكس إذا كان $s_{ii}^3 \neq 0$ فإن هذا يعني وجود مسار موجه من v_i إلى v_i من الطول 3 . ولكن لاحظ أنه في الرسم الموجه الممثل بـ S كل حافة لها اتجاهين . هذا يعني وجود مثلث كما في الشكل (١٣ ، ٨) مما يعني أن v_i هو جزء من عصبة . □

مثال (١١ ، ٨)

جد جميع الرؤوس الواقعة ضمن عصبة في الرسم الموجه التالي :



شكل (١٤، ٨)

الحل

نظراً لأن عدد الرؤوس صغير يمكن إيجاد المطلوب بسهولة دون اللجوء إلى استخدام المصفوفات ولكن في حالة كون عدد الرؤوس كبيراً فإن طريقة المصفوفات تعتبر طريقة جيدة في التعرف على هذه الرؤوس . في حل هذا المثال سنبين كيفية استخدام طريقة المصفوفات . لأجل ذلك نجـــد أن

$$S=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix} \text{ و } S^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&5&2&5\\0&5&4&5&5\\0&2&5&2&5\\0&5&5&5&4\end{bmatrix} .$$

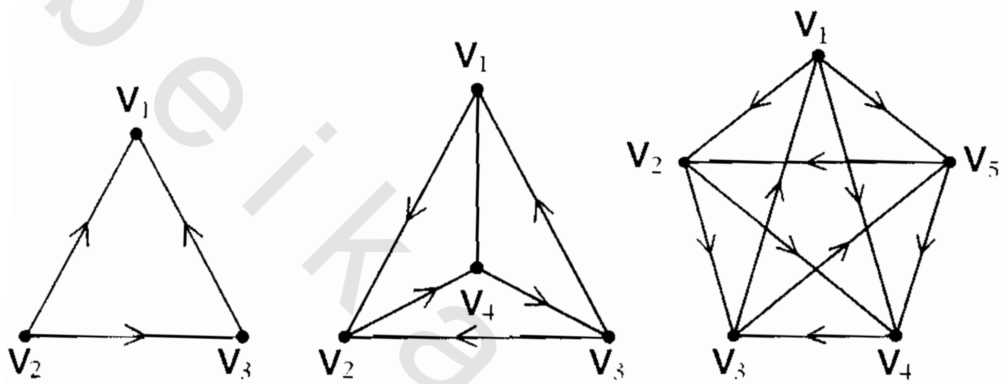
استناداً إلى المبرهنة (٢ ، ٨) نجد أن الرؤوس v_2 , v_3 , v_4 , v_5 تقع ضمن عصبة (قد لا تكون نفس العصبة) وأن الرأس v_1 لا يقع في أي عصبة . في الحقيقة يوجد لدينا عصبتان رؤوسهما هي $\{ v_2 , v_3 , v_5 \}$ و $\{ v_3 , v_4 , v_5 \}$. □

نقدم الآن تطبيقاً آخر على استخدام المصفوفات في دراسة الرسومات الموجهة وذلك من خلال ما يسمى برسومات المنافسة (dominance graphs) والتي تستخدم في بعض الأحيان كنموذج رياضي لدراسة بعض الدورات الرياضية ، لذا يطلق عليها اسم الدورات التنافسية (tournaments) .

تعريف (٥ ، ٨)

نقول عن الرسم الموجه (V,E) إنه رسم منافسة إذا كان لكل عنصرين v_i, v_j في V إما أن $(v_i, v_j) \in E$ أو أن $(v_j, v_i) \in E$ ولكن ليس كلاهما .

الشكل التالي يوضح بعض رسومات المنافسة :



(أ) (ب) (جـ)

شكل (١٥ ، ٨)

إن التطبيق الذي سنقدمه الآن يعتمد على الحقيقة التالية والتي نقدمها من خلال هذه المبرهنة :

مبرهنة (٣ ، ٨)

في أي رسم منافسة يوجد على الأقل رأس واحد يتجه منه مسار موجه إلى كل رأس من رؤوس الرسم ويكون طوله أما 1 أو 2 .

البرهان

ليكن v_0 رأساً بحيث يتجه منه مساراً من الطول 1 أو 2 إلى أكبر عدد من رؤوس رسم المنافسة ولنرمز إلى مجموعة هذه الرؤوس بالرمز S . إذا كان $S = V$ فينتهي البرهان لأن v_0 تحقق نص المبرهنة . لنفرض إذن أن $S \neq V$ و $w \notin S$. من تعريف S نستنتج وجود حافة متجهة من w إلى v_0 . وإذا كانت هناك حافة متجهة من v_0 إلى u فلابد من وجود حافة متجهة من w إلى u لأنه لو كان غير ذلك لأصبح الرأس w في نهاية مسار من الطول 2 ويبدأ بالرأس v_0 . ولكن هذا يجعل $w \in S$ مما يناقض فرضنا أعلاه . إذن ، هناك مسار من الطول واحد من w إلى أي رأس يرتبط مع v_0 بمسار من الطول واحد ، وهناك مسار من الطول 2 من w إلى أي رأس يرتبط مع v_0 بمسار من الطول 2 . وعليه نستنتج أن عدد الرؤوس الموجودة في نهاية مسار من الطول 1 أو 2 والمبتدئ بـ w يفوق عدد عناصر S بواحد على الأقل . وهذا يناقض اختيارنا لـ v_0 وبالتالي S . إذن ، $S = V$. ♦

نقدم الآن التطبيق التالي للمصفوفات في رسوم المنافسة من خلال المثال التالي :

مثال (٨ ، ١٢)

ليكن الشكل (٨ ، ١٥ جـ) ممثلاً لرسم منافسة لخمسة فرق في لعبة السلة حيث الرؤوس تمثل الفرق والحافة المتجهة من v_i إلى v_j تعني أن v_i تغلب على v_j في المباراة . استخدم مصفوفة الرؤوس M للتعرف على الرأس الذي يحقق المبرهنة (٨ ، ٣) .

الحل

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix} \text{ و } M^2=\begin{bmatrix}0&1&2&2&0\\1&0&1&0&1\\0&2&0&2&1\\1&0&0&0&1\\0&0&2&1&0\end{bmatrix}.$$

ولذا فإن

$$M+M^2=\begin{bmatrix}0&2&2&3&1\\1&0&2&1&1\\1&2&0&2&2\\1&0&1&0&1\\0&1&2&2&0\end{bmatrix}.$$

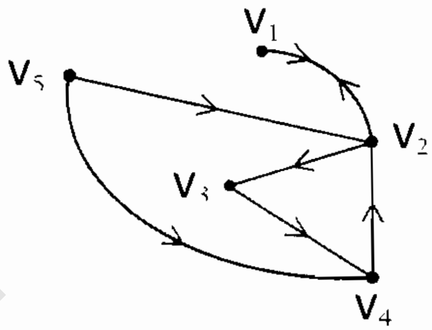
من المبرهنة (١، ٨) نستنتج أن n_{ij} في $M+M^2$ يعطينا عدد المسارات من الطول 1 أو 2 من v_i إلى v_j . وعليه نجد أن الرؤوس v_1, v_2, v_3 تحقق المبرهنة (٣ ، ٨) بينما v_4 و v_5 لا يحققانها لأنه لا يوجد مسار من الطول 1 أو 2 من v_4 إلى v_2 ولا من v_5 إلى v_1 . إن تفسير ما توصلنا إليه بلغة المباريات هو أن الفرق 1، 2، 3 غلبت الفرق الأخرى عن طريق مباراة مباشرة أو غير مباشرة وذلك عن طريق التغلب على فريق غلب الفريق المعني . للتمييز بين الفرق 1، 2، 3 نستخدم حاصل جمع الأعداد في الصف الممثل للفريق في المصفوفة $M+M^2$. ويسمى حاصل الجمع هذا قوة الفريق P_i . لاحظ أن :

$$P_1=2+2+3+1=8$$
$$P_2=1+2+1+1=5$$
$$P_3=1+2+2+2=7$$

إذن ، الفريق v_1 هو أقوى الفرق الخمسة لأنه فاز على الفرق الأخرى بثمان طرق مباشرة أو غير مباشرة . □

تمارين (٣ ، ٨)

(١) عين مصفوفة الرؤوس للرسم الموجه التالي ثم أحسب عدد المسارات الموجهة من الطول 3 من كل رأس من رؤوس الرسم



شكل (١٦ ، ٨)

(٢) ارسم الرسومات المقابلة لكل من المصفوفتين التاليتين :

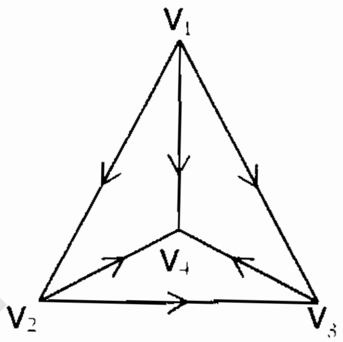
(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(٣) استخدم المبرهنة (٢ ، ٨) لإيجاد كل العصب في الرسم الممثل بمصفوفة الرؤوس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(٤) (أ) احسب مصفوفة الرؤوس M لرسم المنافسة التالي .

(ب) استعن بالمصفوفة M لحساب قوة كل رأس من رؤوس الرسم كما في المثال (١٢ ، ٨) .



شكل (١٧ ، ٨)

(٤ ، ٨) سلاسل ماركوف

Markov Chains

في هذا البند سوف ندرس دور المصفوفات في نموذج رياضي لنظام يتحول من حالة إلى أخرى . وسنحتاج في دراستنا إلى مفهوم نظام المعادلات الخطية كما نحتاج إلى مفهوم نهاية متتالية حقيقية .

لنفرض أن لدينا نموذجاً رياضياً لنظام يتغير من حالة إلى أخرى ولنفرض أن عدد حالات النظام الممكنة منته . على سبيل المثال ، حالة الطقس في منطقة معينة من العالم قد تكون ممطرة ، غائمة ، صحو ، أو مغبرة . أو حالة الاقتصاد في أحد البلدان قد يكون منتعش ، مستقر ، أو راكد . لو فرضنا أن مثل هذه الأنظمة تتغير مع مرور الوقت من حالة إلى أخرى وأننا في أوقات محددة قد سجلنا الحالة التي عليها النظام ولكننا لا يمكن أن نحدد بدقة الحالة التي سيكون عليها . وإنما يمكن حساب احتمال ما سيكون عليه النظام في حالة معينة من معرفة الحالة السابقة لها . إن مثل هذا الوضع

يســـــمى سلســـــلة مــاركوف (Markov chain) . ولوصــف مــا سـبق باسـتخدام الرموز نفرض أن لدينا نظاماً له k من الحالات وليكن p_{ij} هو احتمال أن يكون النظام فـي الحالـة i بعـد أن كـان فـي الحالـة j . يمكـن وضـع هـذه القـراءات فـي مصـفوفة $P=[p_{ij}]$ نطلق عليها مصفوفة الانتقال لسلسلة ماركوف.

مثال (٨ ، ١٣)

إذا كـان لديـنا سلسـلة مـاركوف بـثلاث حـالات فقـدم وصـفاً لذلـك باسـتخدام مصـفوفة الانتقال .

الحل

المصفوفة المطلوبة P هي :

الحالات السابقة

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ P= & \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}\right] & & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

الحالات اللاحقة

حيث p_{23} مثلاً هو احتمال تحول النظام من الحالة 3 إلى الحالة 2 وهكذا . □

مثال (٨ ، ١٤)

فـي مدينة ما توجد مكتبة عامة لها ثلاثة فروع يرمز لها بالرموز 1، 2 و 3 . يمكن لأي شخص أن يستعير كتاباً من أي من فروع المكتبة ويعيده إلى أحد الفروع . عند دراسة وضع المكتبة تم التوصل إلى مصفوفة الانتقال التالية :

$$P=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

أعطِ تفسيراً للأعداد الواردة في المصفوفة .

الحل

العدد 0.7 في الموقع p_{11} هو احتمال أن يستعير الشخص الكتاب من الفرع 1 ويعيده إلى نفس الفرع . العدد 0.6 في الموقع p_{23} هو احتمال أن يستعير الشخص كتاباً من الفرع 3 ويعيده للفرع 2 وهكذا . □

ملحوظة

في المثال السابق لاحظ أن حاصل جمع الأعداد الواردة في كل عمود هو 1 . إن هذا ليس مصادفة بل أن هذا صحيح في كل مصفوفة انتقال لأنه إذا كان النظام في الحالة j وكانت هناك k من الحالات المحتملة فلا بد أن يكون النظام في إحدى تلك الحالات.
أي أن : $p_{ij} + p_{2j} + \dots + p_{kj} = 1$.

مثال (١٥ ، ٨)

من دراسة سجل التبرعات السنوية لإحدى الجمعيات الخيرية تبين أن 70% من المتبرعين في إحدى السنوات يتبرعون في السنة اللاحقة وأن 40% من غير المتبرعين في إحدى السنوات يتبرعون في السنة اللاحقة . اكتب مصفوفة الانتقال لسلسلة ماركوف .

الحل

هناك حالتان : الأولى هي التبرع للجمعية والثانية هي عدم التبرع لها . إذن لدينا مصفوفة من الدرجة 2×2 وهي $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ حيث العمود الأول يمثل المتبرعين في إحدى السنوات والعمود الثاني يمثل غير المتبرعين . لاحظ أننا وضعنا العدد 0.3 في الموقع p_{21} مستفيدين من الملحوظة أعلاه . □

تعريف (٦ ، ٨)

يسمى المتجه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ متجه حالة (state vector) لسلسلة ماركوف المكونة من k من الحالات إذا كان $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$ وكان x_i هو احتمال كون النظام في الحالة i .

ملحوظة

أعمدة أي مصفوفة انتقال هي متجهات حالة .

أن فكرة متجه الحالة مرتبطة بالزمن ، فالمتجه X^t يصف احتمالية حالة النظام في الزمن t ، حيث t وحدة زمن غير كسرية ، كأن تكون دقيقة ، ساعة ، يوم ، شهر ، سنة وهكذا. إذا جعلنا متجه الحالة في الزمن t هو X^t فيمكن حساب X^{t+1} كالتالي

$$X^{t+1} = P X^t \qquad (١)$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال. إن سبب صحة العلاقة (١) يعود إلى قوانين الاحتمالات الشرطية وليس هذا مجال برهانها.

مثال (١٦ ، ٨)

إشارة إلى المثال (١٥ ، ٨) احسب متجه الحالة لأحد الأعضاء الذي تبرع في بداية عضويته في الجمعية وذلك بعد مرور ثلاث سنوات .

الحل

إن متجه الحالة في البداية هو $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. أي أن العضو في البداية كان في الحالة الأولى وهي حالة التبرع. إذا جعلنا X^t يرمز لمتجه الحالة بعد مرور t من السنين فإن : $X^1 = PX^0$ ، $X^2 = PX^1 = P^2X^0$ و $X^3 = PX^2 = P^3X^0$

حيث P هي مصفوفة الانتقال $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$. ولذا فإن

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.417 \end{bmatrix}.$$

وهذا يعني أنه بعد ثلاث سنوات سيكون احتمال تبرعه في تلك السنة 0.583 (أو 58.3%) واحتمال عدم تبرعه هو 0.417 (أو 41.7 %) . □

مثال (١٧ ، ٨)

عودة إلى المثال (١٤ ، ٨) احسب متجه الحالة لكتاب استعير من الفرع الثاني من المكتبة وذلك بعد مرور خمس فترات استعاره لهذا الكتاب .

الحل

لما كان الكتاب استعير حتماً من الفرع الثاني فإن $X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

من العلاقة (١) ، نحسب :

$$X^1 = PX^0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} \text{ ،}$$

$$X^2 = PX^1 = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.31 \\ 0.17 \end{bmatrix} \text{ ، } X^3 = PX^2 = \begin{bmatrix} 0.536 \\ 0.299 \\ 0.165 \end{bmatrix} \text{ ،}$$

$$X^4 = PX^3 = \begin{bmatrix} 0.5412 \\ 0.2959 \\ 0.1629 \end{bmatrix} \text{ و } X^5 = PX^4 = \begin{bmatrix} 0.54308 \\ 0.29475 \\ 0.16217 \end{bmatrix} . \square$$

ملحوظة

في المثالين (١٦ ، ٨) و (١٧ ، ٨) السابقين إذا استمرينا في حساب X^t لقيم عليا للمتغير t فإننا نجـد ما يلي :

(١) في المثال (١٦ ، ٨) سيكون $X^t = \begin{bmatrix} 0.571429 \\ 0.428571 \end{bmatrix}$ لكل $t \geq 11$.

(٢) في المثال (١٧ ، ٨) سيكون $X^t = \begin{bmatrix} 0.544117 \\ 0.294117 \\ 0.161765 \end{bmatrix}$ لكل $t \geq 12$.

إذن ، في المثالين (١٦ ، ٨) و (١٧ ، ٨) نجد أن متجه الحالة قد استقر عند قيمة ثابتة بعد مرور زمن معين . وهنا نسأل هل هذا صحيح في جميع سلاسل ماركوف ؟ الجواب بالنفي والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (١٨ ، ٨)

لنفرض أن مصفوفة الانتقال هي $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ وأن $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. احسب قيم X^t لكل $t \geq 1$.

الحل

لاحظ هنا أن $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^2$ مصفوفة الوحدة . لذا فإن $P^t = I$ لقيم t الزوجية

و $P^t = P$ لقيم t الفردية .

وعليه يكون $X^t = PX^{t-1} = P^t X^0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{زوجي } t \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{فردي } t \end{cases}$.

إذن، هذا النظام يتأرجح بين الحالتين $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ولا يستقر على حالة ثابتة . □

بعد هذا المثال يمكن أن نسأل : هل هناك شروط على مصفوفة الانتقال P لضمان الوصول إلى حالة الاستقرار ؟ للجواب على ذلك نحتاج إلى التعريف التالي :

تعريف (٧، ٨)

يقال عن مصفوفة الانتقال P أنها منتظمة إذا كانت جميع عناصر إحدى قواها P^n موجبة .

مبرهنة (٤ ، ٨)

إذا كانت P مصفوفة انتقال منتظمة فإنه عندما $n \to \infty$ ، P^n تؤول إلى

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 \cdots q_1 \\ q_2 & q_2 \cdots q_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_k & q_k \cdots q_k \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

حيث $q_i > 0$ لكل $1 \le i \le k$ و $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$. ♦

لن نقدم برهاناً لهذه المبرهنة هنا ولكن يمكن للقارئ الإطلاع على البرهان في أي كتاب لسلاسل ماركوف مثل (finite Markov chains) لمؤلفيه سنل (Snell) وكيمني (Kemeny) .

ملحوظة

إذا كان X متجه حالة و Q مصفوفة كما هي في (٢) فإن :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = QX$$. لبيان ذلك نفرض أن $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$. ولذا فإن

$$QX = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 \cdots q_1 \\ q_2 & q_2 \cdots q_2 \\ & \vdots \\ q_k & q_k \cdots q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 x_1 + q_1 x_2 + \cdots + q_1 x_k \\ q_2 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_2 x_k \\ \vdots \\ q_k x_1 + q_k x_2 + \cdots + q_k x_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\ q_2 (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\ \vdots \\ q_k (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

لان $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$ حسب تعريف متجه الحالة . مما تقدم نستنتج النتيجة التالية :

نتيجة (٨ ، ٥)

إذا كانت P مصفوفة انتقال منتظمة و X متجه حالة فإنه عندما $n \to \infty$ فإن المقدار $P^n X$ يؤول إلى $\mathbf{q}$ ، حيث $$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$.

البرهان

من المبرهنة (٨ ، ٤) نعلم أن $P^n \to Q$ عندما $n \to \infty$. إذن لأي متجه حالة يكون $P^n X \to QX$. ولكن $QX = \mathbf{q}$ حسب الملحوظة السابقة مما يبرهن النتيجة . ♦

تعريف (٨ ، ٨)

المتجه **q** الوارد في النتيجة (٨ ، ٥) يسمى متجه حالة الإستقرار (steady – state vector) .

لأجل حساب المتجه **q** نحتاج إلى المبرهنة التالية :

مبرهنة (٨ ، ٦)

إذا كان **q** متجه حالة الاستقرار لمصفوفة الانتقال المنتظمة P فإن **q** هو الحل الوحيد للمعادلة $PX = X$.

البرهان

لاحظ أن $\lim_{n\to\infty} P^n = Q$ وكذلك $\lim_{n\to\infty} P^{n+1} = Q$ وذلك من المبرهنة (٨ ، ٤). ولكن $\lim_{n\to\infty} P^{n+1} = P\lim_{n\to\infty} P^n = PQ$. من وحدانية النهاية نستنتج أن : $PQ = Q$. ومن هذا نجد أن $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$. ولإثبات أن **q** هو الحل الوحيد لهذه المعادلة نفرض أن **r** هو حل آخر . لذا فإن $P\mathbf{r} = \mathbf{r}$. ومنه فإن $P^2\mathbf{r} = P(P\mathbf{r}) = P\mathbf{r} = \mathbf{r}$. وبالاستقراء الرياضي نستطيع أن نثبت أن $P^n\mathbf{r} = \mathbf{r}$ لكل $n \geq 1$. إذن ، $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{r} = \mathbf{r}$ ولكن حسب النتيجة (٨ ، ٥)، $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{r} = \mathbf{q}$ إذن ، $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ من وحدانية النهاية . ♦

من المبرهنة (٨ ، ٦) نستنتج أن **q** هو الحل الوحيد لنظام المعادلات المتجانس $(I - P)X = 0$. نستخدم الآن هذه الطريقة لإيجاد **q** .

مثال (٨ ، ١٩)

استخدم المبرهنة (٨ ، ٦) لإيجاد متجه حالة الاستقرار في المثال (٨ ، ١٥) .

الحل

أولاً نلاحظ أن مصفوفة الانتقال P منتظمة . إذن يمكن استخدام المبرهنة (٦ ، ٨) .
ولذا فإن متجه حالة الاستقرار **q** هو الحل الوحيد للنظام المتجانس $\left(I-P\right)X=0$
حيث $P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.4\\0.3 & 0.6\end{bmatrix}$. وبحل هذا النظام نجد أن :
$\begin{bmatrix}0.3 & -0.4\\-0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. ومنه فإن :

$$0.3\,x_1-0.4\,x_2=0 \qquad (٣)$$

$$-0.3\,x_1+0.4\,x_2=0 \qquad (٤)$$

المعادلتين (٣) و (٤) هما نفس المعادلة . ولدينا الشرط الإضافي أن $x_1+x_2=1$
مما يجعل $x_2=1-x_1$. وبالتعويض في (٣) نحصل على :

$$0.3\,x_1-0.4\left(1-x_1\right)=0$$

$$0.7\,x_1=0.4$$

إذن ، $x_1=\dfrac{0.4}{0.7}\cong 0.571429$ و $x_2=1-x_1\cong 0.428571$. وعليه يكون :

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}0.571429\\0.428571\end{bmatrix}. \quad \square$$

مثال (٢٠ ، ٨)

بالرجوع إلى المثال (١٤ ، ٨) استخدم المبرهنة ، لإيجاد متجه حالة الاستقرار **q** .

الحل

لاحظ أولاً أن المصفوفة P منتظمة مما يتيح لنا استخدام المبرهنة (٦ ، ٨) . ولذا فإن
متجه حالة الاستقرار **q** هو الحل الوحيد للمعادلة المتجانسة $\left(I-P\right)X=0$ حيث
$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5 & 0.1\\0.2 & 0.3 & 0.6\\0.1 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$. ومنه فإن :

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.6 \\ -0.1 & -0.2 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$. وبالتالي فإن :

$$0.3x_1 - 0.5x_2 - 0.1x_3 = 0 \qquad (٥)$$

$$-0.3\,x_1 + 0.7\,x_2 - 0.6\,x_3 = 0 \qquad (٦)$$

$$-0.1\,x_1 - 0.2\,x_2 + 0.7\,x_3 = 0 \qquad (٧)$$

بالإضافة إلى العلاقة $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (٨)

إذا أخذنا المعادلات (٥) ، (٦) و (٨) نجد أن الحل هو :

$$x_1 = 0.544117$$
$$x_2 = 0.294118$$
$$x_3 = 0.161765$$

ونفس الحل يظهر إذا أخذنا المعادلة (٨) مع أي معادلتين أخريتين من بين (٥) ، (٦) و (٧) وعلى القارئ التحقق بنفسه من ذلك . إذن ، متجه الاستقرار $\mathbf{q}$ هو

$$\begin{bmatrix} 0.544117 \\ 0.294118 \\ 0.161765 \end{bmatrix} . \quad \square$$

تمارين (٤ ، ٨)

(١) إذا كان متجه الحالة $X^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ فأحسب $X^{(5)}$ إذا علمت أن مصفوفة الانتقال هي $P = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix}$.

(٢) إذا كانت متجه الحالة $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ فاحسب $X^{(3)}$ حيث مصفوفة الانتقال هي :

$$. \ P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(٣) هل مصفوفة الانتقال $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$ منتظمة ؟ إذا كانت كذلك فعين متجه حالة الاستقرار لها .

(٤) تحقق من أن المصفوفة التالية منتظمة ثم جد متجه حالة الاستقرار لها :

$$. \ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(٥) لتكن $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$.

(أ) أثبت أن P ليست منتظمة .

(ب) لكل متجه $X^{(0)}$ أثبت أن $\lim_{n \to \infty} P^{(n)} X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) ما علاقة هذا التمرين بالمبرهنة (٤ ، ٨) ؟

(٦) لتكن P مصفوفة منتظمة من الدرجة $n \times n$ بحيث أن مجموع الأعداد في كل صف من صفوفها يساوي 1 . برهن أن متجه حالة الاستقرار هو

$$\begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} .$$

(٧) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة إنتقال منتظمة ثم أحسب متجه حالة الاستقرار لها بإستخدام التمرين (٦) .

(٨) تتكون إحدى الدول من ثلاث مناطق سكانية هي 1، 2، 3 . وجدت مصلحة الاحصاءات أنه في كل سنة ينزح 5% من سكان المنطقة 1 إلى المنطقة 2 و 5% من المنطقة 1 إلى المنطقة 3 بينما ينزح 15 % من سكان المنطقة 2 إلى المنطقة 1 و 10% من المنطقة 2 إلى المنطقة 3 . كذلك ينزح 10% من سكان المنطقة 3 إلى المنطقة 1 و 5% إلى المنطقة 2. أحسب نسب توزيع السكان على المناطق الثلاث بعد مضي ثلاث سنوات ثم بعد مضي عدد غير محدود من السنين .

(٥ ، ٨) التعمية

Cryptography

نقدم في هذا البند ، احدى الطرق المستخدمة في الحفاظ على سرية الرسائل المرسلة عبر قنوات الإتصال المختلفة . إن العلم المعني بهذا الأمر يسمى علم التعمية ويسميه البعض علم التشفير . سنحتاج في هذا البند إلى حساب المصفوفات قياس n كما سنستخدم فكرة التحويلات الخطية وطريقة جاوس في الحذف .

يهتم علم التعمية بالمحافظة على سرية الرسائل المهمة المرسلة عبر قنوات الإتصال المختلفة . كما أن جانب من هذا العلم يُعنى بتحليل الرسائل المعماة لفرض كسر نظام التعمية المستخدم أو على الأقل الحصول على أكبر قدر من المعلومات التي يمكن الاستفادة منها . نبدأ هذا البند بتعريف بعض المصطلحات المستخدمة في علم التعمية .

(١) النص الواضح (plaintext) : ويعنى به الرسالة قبل تعميتها أو بمعنى آخر أي نص دون أي تغيير أو تبديل .

(٢) النص المعمى (ciphertext) : وهو النص الذي نحصل عليه بعد إجراء عملية التعمية .

(٣) التعمية أو التشفير (enciphering) : وهي عملية تحويل النص الواضح إلى نص معمى .

(٤) فك التعمية أو الشفرة (deciphering) : وهي عملية تحويل النص المعمى إلى نص واضح .

(٥) مفتاح التعمية أو الشفرة (enciphering key) : وهو القيمة أو مجموعة القيم التي تستخدم في وصف عملية التعمية.

إن أبسط الطرق في التعمية هي طريقة التعويض وهي عبارة عن إبدال كل حرف من حروف الهجاء بحرف آخر كما في الجدول التالي :

الحرف	الحرف المقابل	الحرف	الحرف المقابل	الحرف	الحرف المقابل	الحرف	الحرف المقابل
أ	ت	د	أ	ض	و	ك	د
ب	ل	ذ	ت	ط	ث	ل	خ
ت	ق	ر	ي	ظ	ج	م	ز
ث	م	ز	ش	ع	هـ	ن	ض
ج	س	س	ب	غ	ص	هـ	ذ
ح	ط	ش	ظ	ف	ن	و	ح
خ	ك	ص	ع	ق	ر	ي	غ

باستخدام هذا الجدول يمكن تعمية النص الواضح : أرسل الدبابات إلى المعمى :

ت ي ب خ ت خ أ ل ت ل ت ق .

إن طريقة التعمية هذه سهلة الكسر. أي من السهل فك الشفرة ومعرفة النص الواضح وذلك من حساب نسبة تكرار كل حرف في النص المعمى ومقارنة ذلك بالنسب المعروفة لتكرار الحروف في اللغة العربية . فمثلاً نسبة تكرار الحرف ج في النصوص العربية هي حوالي 1.02 % وعليه إذا وجدنا أن نسبة تكرار حرف الفاء مثلاً في النص المعمى هي نفس النسبة فإن هذا يقودنا إلى التخمين بأن حرف الفاء (على أرجح احتمال) يقابل حرف الجيم وهكذا بالنسبة لبقية الحروف . ولكن علينا أن ننوه بأن هذه الطريقة في كسر الشفرة لا تصلح لكسر جمل قصيرة كالتي ذكرناها أعلاه لأن حساب نسبة تكرار الحروف لا يكون دقيقاً .

إن إحدى الطرق المستخدمة للتغلب على مشكلة ضعف طريقة التعمية هذه هي أن تقسم النص الواضح إلى مجموعات متساوية من الحروف ثم تشفر كل مجموعة على حدة. وتدعى هذه الطريقة في التعمية بالطريقة التعددية (polygraphic) . في هذا البند سندرس إحدى الطرق التعددية المسماة بطريقة هِل في التعمية (Hill ciphers) نسبة إلى مكتشفها (Lester Hill) في عام ١٩٢٩م. وتعمد هذه الطريقة على استخدام المصفوفات كتحويلات خطية . لغرض شرح طريقة هِل للتعمية في اللغة العربية ، تقوم أولاً بترقيم حروف اللغة العربية كما في الجدول التالي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	0

الجدول (١ ، ٨)

ونلاحظ أننا أعطينا الحرف ي الرقم صفر لأننا سنعمل داخل الحلقة Z_{28} التي فيها $28 \equiv 0 \pmod{28}$. لكي نوضح طريقة هِل نقدم المثال التالي الذي يستخدم المصفوفات من الدرجة 2×2 على الحلقة Z_{28} .

مثال (٢١ ، ٨)

استخدم المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ لتعمية الرسالة : الهجوم غداً .

الحل

أولاً : نحول الرسالة إلى متتالية من الأعداد باستخدام الجدول (٨ ، ١) فنحصل على $1، 23، 26، 5، 27، 24، 19، 8، 1$ على التوالي .

ثانياً : لتكوين المصفوفة من الدرجة 2×2 فإننا نجمع كل عددين متتاليين في متجه كما يلي : $\begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 26 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 27 \\ 24 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (١)

لاحظ أننا كررنا العددين في المتجه الأخير لكون عدد حروف الرسالة فردياً .

ثالثاً : نقوم بتعمية الرسالة كما يلي $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ حيث $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ هو أحد المتجهات الواردة في (١) فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 26 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أننا قمنا بعملية الضرب والجمع قياس العدد(28). أي أننا نعمل في الحلقة Z_{28}.

رابعاً : نستخدم الجدول (١ ، ٨) لتحويل الرسالة إلى حروف فنحصل على الرسالة المشفرة : ج ذ ق ع ح ز ك ل خ ج .

لاحظ أن عدد حروف الرسالة المشفرة هو عشرة وذلك نتيجة لتكرار الحرف الأخير من النص الواضح كما ذكرنا في ثانياً . □

ملحوظة

في المثال السابق استخدمنا مصفوفات من الدرجة 2×2 لعملية التعمية مما دعانا إلى تجميع أرقام الحروف في متجهات ثنائية . إن هذه الطريقة في التعمية تسمى طريقة هِل من الرتبة 2 (Hill 2- cipher) . في حالة استخدامنا لمصفوفات من الدرجة $m\times m$ فإننا نجمع أرقام الحروف في متجهات من الرتبة m وتسمى طريقة التعمية عندئذٍ بطريقة هل من الرتبة (Hill m-Cipher).

إن استخدام طريقة هل في التعمية يتطلب إجراء حسابات داخل الحلقة Z_n ويمكن للقارئ الاستعانة بأي كتاب في نظرية الأعداد للتعرف على هذه الحسابات إذا لم يكن قد درسها من قبل . ومن أهم خصائص الحساب في Z_n المبرهنة التالية التي نذكر نصها دون برهان .

مبرهنة (٧ ، ٨)

يوجد معكوس ضربي للعدد a قياس n إذا وفقط إذا كان $1=\gcd(a,n)$. ♦

مثال (٢٢ ، ٨)

عين المعكوس الضربي (إن وجد) لكل من العددين 6 و 15 قياس 28 .

الحل

لاحظ أن $\gcd(6,28)=2$. إذن لا يوجد معكوس ضربي للعدد 6 قياس 28 استناداً إلى المبرهنة (٧ ، ٨) . بالنسبة للعدد 15 ، لاحظ أن $\gcd(15,28)=1$ ولذا فإنه يوجد معكوس ضربي للعدد 15 قياس 28 حسب المبرهنة (٧ ، ٨) . لغرض حساب المعكوس الضربي ، يمكننا أن نجرب الأعداد من 1 إلى 27 والأولية نسبياً مع 28 . أو يمكن استخدام خوارزمية القسمة كالتالي :

$$28=15\times1+13$$
$$15=13\times1+2$$
$$13=2\times6+1$$

ولذا فإن :

$$\begin{aligned}1&=13-2\times6\\&=13-(15-13)\times6\\&=13-15\times6+13\times6\\&=13\times7-15\times6\\&=(28-15)\times7-15\times6\\&=28\times7-15\times13\end{aligned}$$

من هذا نحصل على $1\equiv(-13)(15)\equiv(15)(15)\pmod{28}$.

وبالتالي فإن المعكوس الضربي للعدد 15 قياس 28 هو 15 . □

في المثال (٢١ ، ٨) استخدمنا المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&5\\1&4\end{bmatrix}$ لتعمية الرسالة : "الهجوم غداً ". إن الرسالة المعماة ترسل عبر قناة اتصال مناسبة إلى المعني بالأمر . وهذه الجهة المعنية عليها بعد الاستلام فك الشفرة لمعرفة محتوى الرسالة . إن عملية فك الشفرة هذه تتطلب إجراء عكس العمليات المكتوبة في المثال (٢١ ، ٨) . لذا فإن علينا الحصول على معكوس المصفوفة A باعتبارنا نعمل في $\mathbf{Z}_{28}$. وقبل حساب A^{-1} (إن وجد) نقدم المبرهنة التالية والتي برهانها مطابق تماماً لما قدم آنفاً في حالة كون عناصر المصفوفة في حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.

مبرهنة (٨ ، ٨)
إذا كانت A مصفوفة عناصرها في Z_n فإنه يوجد معكوس لها إذا وفقط إذا وجد معكوس ضربي للعدد $\det(A)$ قياس n . ♦

ومن المبرهنة (٨ ، ٧) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٨ ، ٩)
إذا كانت A مصفوفة عناصرها في Z_n فإن لها معكوس إذا وفقط إذا كان $\gcd(\det(A), n) = 1$. ♦

مثال (٨ ، ٢٣)
أحسب معكوس المصفوفة A في المثال (٨ ، ٢١) .

الحل
$\det A = 8 - 5 = 3$. ولما كان $\gcd(3, 28) = 1$ فإنه يوجد معكوس للمصفوفة A حسب النتيجة (٨ ، ٩) . من حسابات بسيطة كما في المثال (٨ ، ٢٢) ، نجد أن $3 \times 19 \equiv 1 \pmod{28}$. أي أن $\det(A)^{-1} \equiv 19 \pmod{28}$. ولذا فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \equiv 19 \begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 27 & 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 20 & 17 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \pmod{28} .$$

وهو ما نريد إيجاده . □

كما ذكرنا آنفاً . إن المصفوفة A^{-1} تستخدم لفك الشفرة المعماة بالطريقة الموضحة في المثال (٨ ، ٢١) . فلو فرضنا أننا استعملنا الرسالة المعماة :

ج ذ ق ع ح ز ك ل خ ج

وأردنا فك التعمية فإننا أولاً نحول النص المعمى إلى أرقام استناداً إلى الجدول(٨ ، ١)

فنحصل على : 5 7 23 22 11 6 18 21 9 5

ثم نضع كل عددين مع بعضهما في متجهات ثنائية . بعد ذلك نضرب كل متجه بالمصفوفة A^{-1} لنحصل على الجزء المقابل في النص الواضح ، فمثلاً :

$$\begin{bmatrix} 20 & 17 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 253 \\ 135 \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} \pmod{28}$$

من الجدول (١ ، ٨) نجد أن الحرفين المقابلين لـ ج ذ هما الحرفان ا ل ويمكن للقارئ الاستمرار في فك الشفرة بهذه الطريقة ليحصل في النهاية على النص الواضح " الهجوم غداً ".

ملحوظة

من المثال (٢٣ ، ٨) يتضح للقارئ أن الاحتفاظ بسرية المصفوفة A أمر مهم جداً لأنه من معرفة A يمكن حساب A^{-1} ومنها يتم فك التعمية . إن المصفوفة A هي مثال على ما يسمى بمفتاح التعمية (enciphering key) .

إن استخدام طريقة هِل في التعمية لا يعني أننا في مأمن من إمكانية فك التعمية من قبل العدو . إن معرفة العدو بجزء كاف من النص الواضح وما يقابله من نص معمى يكفي لمعرفة المفتاح وهو المصفوفة ومن ثم فك التعمية . فمثلاً إذا عرف العدو أن الرسالة تبدأ بـ السلام عليكم واستطاع أن يعرف النص المشفر المقابل لها فإن هذا أكثر من كاف لمعرفة المفتاح وهو مصفوفة من الدرجة الثانية 2×2 ومن ثم فك التعمية . إن الفكرة وراء ذلك بسيطة جداً ، وهي :

إذا كان لدينا مصفوفة A من النوع $n\times n$ بحيث أن A^{-1} موجودة وكان لدينا n من المتجهات $\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \ldots \mathbf{P}_n$ المستقلة خطياً فإن معرفة A تكافيء معرفة المتجهات $A\mathbf{P}_1 , A\mathbf{P}_2 , \ldots , A\mathbf{P}_n$. ولرؤية ذلك فإننا نكون المصفوفتين :

$$P=[\,\mathbf{P}_1 \ , \mathbf{P}_2 , \ldots \mathbf{P}_n \,]$$
$$C=[\,\mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \ldots , \mathbf{C}_n \,]$$

حيث $\mathbf{C}_i = A\mathbf{P}_i$ لكل $1\le i\le n$. لاحظ أن المصفوفة P من الدرجة $n\times n$ وفيها العمود i هو المتجه $\mathbf{P}_i$ وكذلك الحال بالنسبة للمصفوفة C . من الواضح أن

$C = A\,P$ ونعلم نحن أن P لها معكوس لأن أعمدة P مستقلة خطياً إذن ،

$$A = C\,P^{-1} \qquad (١)$$

مثال (٨ ، ٢٤)

إذا إستطعنا أن نحصل على الرسالة المشفرة ص ل ن ر ذ ذ وعرفنا بطريقة ما أنها تقابل كلمة " السلام " وأن طريقة التعمية المستخدمة هي طريقة هِل من النوع 2×2 . فاستخدم هذهِ المعلومات لإيجاد مفتاح الشفرة .

الحل

نحول الرسالة المشفرة إلى الأرقام المقابلة باستخدام الجدول (١) فنحصل على :

$$24 \quad 17 \quad 10 \quad 25 \quad 22 \quad 14$$

لما كانت طريقة هِل المستخدمة هي من النوع 2×2 فنكون المتجهات الثنائية التالية :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

الآن نحــــول الكــــلمة المقابـــلة " الســـلام" إلى أرقـــام فنحصـــل عــــلى $1 \quad 23 \quad 12 \quad 23 \quad 1 \quad 24$ وتكون المتجهات :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 24 \end{bmatrix}$$

نختـار متجهين فقط من بيـن الثلاثة أعلاه ونـتأكد أنهمـا مستقلان خطيـاً علـى الحلقة $\mathbb{Z}_{28}$. المتجهات P_1 ، P_2 يفيـان بالشرط (تحقق من ذلك) نختـار المتجهين المقابلين C_1 ، C_2 وتكون المصفوفتان :

$$P = [P_1 , P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 23 & 23 \end{bmatrix}, C = [C_1 , C_2] = \begin{bmatrix} 14 & 25 \\ 22 & 10 \end{bmatrix}$$

(يمكــن الــتأكد مــن أن P_1 ، P_2 مســتقلة خطيــاً عــلى $\mathbb{Z}_{28}$ مــن ملاحظـــة أن $\gcd(\det(P), 28) = 1$ ، برهن ذلك !) الآن نحسب P^{-1} فنجد :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{bmatrix} 23 & -12 \\ -23 & 1 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{-253}\begin{bmatrix} 23 & 16 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\equiv 27\begin{bmatrix} 23 & 16 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 23 & 27 \end{bmatrix} (\bmod 28)$$

إذن حسب الصيغة الواردة في (١) أعلاه نجد أن المفتاح

$$A = C\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 25 \\ 23 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 23 & 27 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} (\bmod 28) .$$

من معرفة هذا المفتاح نستطيع تحويل بقية النص المشفر في الرسالة إلى نص واضح عن طريق الضرب بالمصفوفة A^{-1} . □

تمارين (٥ ، ٨)

(١) أحسب معكوس المصفوفات التالية قياس 28 ، إن وجدت

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$

(٢) استخدم طريقة هِل في التعمية لتشفير الرسالة : " الجنود مستعدون " باستخدام المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(٣) لدينا الرسالة المعماة : خ س ك غ ز د ك خ د م وقد علمنا أن مفتاح الشفرة هو المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. استخدم A لفك الشفرة والحصول على النص الواضح.

(٤) تمكن أحد محللي الشفرة من معرفة أن الرسالة المعماة : ض ص أ ي ذ ض تقابل الكلمة " تحياتي " وكانت طريقة هِل هي المستخدمة في التعمية مع مفتاح A من الدرجة 2×2 . احسب المصفوفة A .

(٦ ، ٨) تطبيقات من علم الإقتصاد

Applications From Economics

نعرض في هذا البند نموذجين لتطبيقات الجبر الخطي في الإقتصاد . وينسب هذان النموذجان إلى عالم الإقتصاد ليونتيف (Leontief) وهو أحد العلماء الحائزين على جائزة نوبل . النموذج الأول يسمى نموذج ليونتيف المغلق والثاني يسمى النموذج المفتوح. في كلا النموذجين نتعامل مع بعض القراءات الاقتصادية لوحدات الإنتاج في اقتصاد معين مثل الأسعار ، كمية الناتج الخ. ويكون غرضنا تحقيق بعض الأهداف الاقتصادية .

نبدأ أولاً بالنموذج المغلق ونقدمه من خلال المثال المبسط التالي :

مثال (٢٥ ، ٨)

اتفق نجار ، كهربائي و سباك على إنجاز بعض أعمال الصيانة في بيوتهم الثلاثة على أن يعمل كل منهم ما مجموعه 10 أيام فقط . كما اتفقوا أن يدفع كل منهم أجراً للآخر مع عدم إهمال احتساب أجر الشخص الذي يعمل في بيته وذلك لضمان الدقة في إجراءات المحاسبة . إن الأجر اليومي المعتاد لكل شخص هو 100ريال ولكن تم الاتفاق على تعديل هذا الأجر بحيث يصبح المبلغ المدان به كل شخص بعد انتهاء أعمال الصيانة يعادل المبلغ الذي له . احسب الأجر اليومي لكل عامل إذا علمت أن توزيع أيام العمل كما في الجدول التالي :

	العمل منجز من قبل		
	السباك	الكهربائي	النجار
عدد أيام العمل في بيت النجار	2	5	3
عدد أيام العمل في بيت الكهربائي	4	2	3
عدد أيام العمل في بيت السباك	4	3	4

الحل

نفرض أن الأجر اليومي للنجار p_1 وللكهربائي p_2 وللسباك p_3 . العامل الأول وهو النجار عليه أن يدفع مبلغ $3p_1 + 5p_2 + 2p_3$ وهو يستلم لقاء عمله $10p_1$.

ولذا فإن نحصل على المعادلة :

$$3p_1 + 5p_2 + 2p_3 = 10p_1 \qquad (١)$$

وبالمثل نحصل على المعادلتين التاليتين للكهربائي والسباك :

$$3p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 10p_2 \qquad (٢)$$

$$4p_1 + 3p_2 + 2p_3 = 10p_3 \qquad (٣)$$

بقسمة المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) على 10 واستخدام المعادلة المصفوفية المقابلة للنظام نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (٤)$$

حيث اعتبرنا $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$.

وباستخدام طريقة جاوس لحل النظام المتجانس نجد أن مجموعة الحل هي :

$$\left\{ \left(t, \frac{17}{18} t, \frac{41}{36} t \right) : t \in \mathbf{R}^+ \right\} .$$

لاحظ أننا اشترطنا أن تكون t موجبة وليست صفراً كي لا يكون الحل تافهاً وهو الحل الذي لا يتقاضى أي من العمال أجراً . كذلك لاحظ أن هناك عدداً غير منته من الحلول للمسألة ولكن علينا أن نختار حلاً " معقولاً " والمقصود بذلك هو حل قريب من

الأجرة اليومية المعتادة للعمال . لذا يمكن أن نأخذ $t = 100$ فتكون الأجور $p_1 = 100$ ، $p_2 = 94.40$ و $p_3 = 113.89$. □

إن المثال السابق يوضح السمات الرئيسة لنموذج ليونتيف المغلق . فهو يمثل اقتصاداً معتمداً على ذاته وهو في حالة توازن (equilibrium) ، ينتج ما يستهلكه ويستهلك ما ينتجه . إن الوصف العام لهذا النموذج المغلق هو كالتالي :

لنفرض أن هناك نظام اقتصادي في n من الصناعات والخدمات ولنفرض أنه في فترة زمنية معينة يتم استهلاك كل ناتج الصناعات والخدمات ضمن قطاعات الاقتصاد نفسه وبنسب محددة ثابتة . المطلوب هو تحديد اسعار ناتج الصناعات والخدمات بحيث يكون مجموع المصروفات يساوي مجموع الدخول وبذلك يكون الاقتصاد متوازناً .

لتكن p_i هي قيمة ناتج الصناعة أو الخدمة i ولتكن a_{ij} نسبة ما تشتريه أو تستهلكه الصناعة أو الخدمة i من الصناعة أو الخدمة j . إذن لدينا الخصائص التالية :

(١) $p_i \geq 0$ لكل $1 \leq i \leq n$.

(٢) $a_{ij} \geq 0$ لكل $1 \leq i, j \leq n$.

(٣) $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} = 1$ لكل $1 \leq j \leq n$.

المتجة $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ يسمى متجه السعر والمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ تسمى مصفوفة النسب . لاحظ أن الشرط (٣) أعلاه يعني أن حاصل جمع العناصر في كل عمود من A يساوي 1 (المصفوفة A مشابهة للمصفوفات التي تطرقنا إليها في موضوع سلاسل ماركوف ولكن دلالة قيمة عناصر المصفوفة في هذا البند تختلف عن التي درسناها سابقا). كما وجدنا في المثال (٨ ، ٢٥) كي نحصل على متجه السعر $\mathbf{p}$ الذي يعطينا التوازن الاقتصادي فإن $\mathbf{p}$ يجب أن يحقق :

$$Ap = p \qquad (٥)$$

أو

$$(I - A)p = 0 \qquad (٦)$$

إن المعادلة (٦) هي عبارة عن نظام معادلات متجانس وأن هذا النظام له حل غير تافه إذا وفقط إذا كان محدد المصفوفة $I - A$ يساوي صفراً .

مبرهنة (١٠ ، ٨)

إذا كانت A مصفوفة نسب فإن $\det(I - A) = 0$.

البرهان

لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ مصفوفة نسب . عندئذٍ ،

$I - A = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix}$. مجموع العمود j من $I - A$ هو:

$1 - a_{1j} - a_{2j} - \cdots - a_{nj} = 1 - 1 = 0$ لكل $1 \le i \le n$.

ولذا ، بإضافة الصفوف $2، 3، \ldots، n$ إلى الصف الأول نحصل على المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{22} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

من خواص المحددات تعلم أن $\det(I - A) = \det(B)$. ولكن $\det(B) = 0$.
وبالتالي فإن $\det(I - A) = 0$. ♦

إن المبرهنة (١٠ ، ٨) تضمن وجود حل غير تافه للنظام في (٦) ولكن هذا

لا يكفي ، وذلك لأن عناصر متجه السعر **p** يجب أن تكون غير سالبة ونرمز لذلك بالرمز $\mathbf{p} \geq 0$. إن وجود هذا الحل مضمون حسب المبرهنة التالية والتي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (١١ ، ٨)

إذا كانت A مصفوفة نسب فإنه يوجد حل غير تافه للمعادلة $A\mathbf{p} = \mathbf{p}$ بحيث $\mathbf{p} \geq 0$. ♦

مثال (٢٦ ، ٨)

عين الحلول $\mathbf{p} \geq 0$ غير التافهة إذا علمت أن مصفوفة النسب هي $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$.

الحل

$I - A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ومجموعة حل هذا النظام هي $\{(0, t) : t \in \mathbf{R}^+\}$. □

مثال (٢٧ ، ٨)

عين الحلول $\mathbf{p} \geq 0$ غير التافهة إذا علمت أن مصفوفة النسب هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل

$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. الحل العام لهذا النظام هو $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. نأخذ $s \geq 0$ و $t \geq 0$ بشرط أن لا يكون كلاهما صفراً . □

ملحوظة

في المثال (٨،٢٦) نجد أن $p_1 = 0$ في جميع الحلول الممكنة وفي المثال (٨،٢٧) نجد أن بالإمكان إيجاد عدد غير منته من أزواج الحلول كل زوج منها يحوي متجهين مستقلين خطياً . إن وجود مثل هذه الحالات لا يتفق مع مصداقية النموذج الرياضي الذي نبحثه لأنه لا يمكن مثلاً أن يبيع أحد المصانع بضاعته مجاناً ، كما أن وجود حلول مستقلة خطياً يعني عدم ثبات النظام الاقتصادي .

من الملحوظة أعلاه يتبين أنه لا بد من وضع شروط إضافية على مصفوفة النسب A لتلافي الحالات غير الواقعية . المبرهنة التالية توضح أحد هذه الشروط ونقدمها دون برهان لأن برهانها يخرجنا عن نطاق الكتاب .

مبرهنة (٨ ، ١٢)

إذا كانت A مصفوفة نسب بحيث أن $A^m > 0$ لعدد صحيح موجب m فإن بعد فضاء حل النظام $(I - A)\mathbf{p} = 0$ يساوي واحد . ♦

نموذج ليونتيف المفتوح

في هذا النموذج نفترض أن لدينا اقتصاداً فيه n من وحدات الإنتاج الصناعية والخدمية . وإن ناتج هذه الوحدات يفيض عن الحاجة المحلية . كما نفرض أن هناك التزاماً من قبل وحدات الإنتاج بتصدير كمية محددة من إنتاجها للخارج . إن الغرض من هذا النموذج ليس تحديد سعر بيع ناتج الوحدة كما رأينا في النموذج المغلق وإنما هو تحديد كمية الإنتاج مع افتراض وجود سعر محدد مسبقاً لكل منتج .

من أجل وصف هذا النموذج نستخدم الترميز التالي :

x_i = القيمة المالية لإنتاج الوحدة i .

d_i = القيمة المالية من ناتج الوحدة i والواجب تصديرها للخارج .

c_{ij} = القيمة المالية لناتج الوحدة i والذي تحتاجه الوحدة j لإنتاج ما قيمته وحدة نقدية واحدة .

لنفرض أن $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ هما متجها الانتاج والطلب على التوالي وأن

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الاستهلاك حيث :

(١) $\mathbf{x} \geq 0$ ، $\mathbf{d} \geq 0$ (٢) $c_{ij} \geq 0$ (٣) $c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{nj} \leq 1$

لكل $1 \leq j \leq n$.

مما تقدم يمكن أن نستنتج أن القيمة $c_{i1}\, x_1 + c_{i2}\, x_2 + \dots + c_{in}\, x_n$ تمثل قيمة ناتج الوحدة i والذي تحتاجه جميع الوحدات في هذا النظام الاقتصادي . إذن الفائض هو:

$$x_i - (c_{i1}\, x_1 + c_{i2}\, x_2 + \dots + c_{in}\, x_n) .$$

وهذا الفائض يجب أن يساوي d_i . من هذا نحصل على العلاقة :

$$\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d} \text{ أو } (I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \qquad (٧)$$

لنأخذ الآن مثالاً توضيحياً .

مثال (٨ ، ٢٨)

لنفرض أن هناك مدينة فيها ثلاث وحدات إنتاجية هي منجم للفحم ، شركة توليد طاقة كهربائية وشركة سكك حديدية . ولنفرض أن الوحدة النقدية في هذه المدينة هي الدينار الذي يعادل عشرة ريالات . إذا كان إنتاج ما قيمته دينار واحد من الفحم يتطلب 0.25 دينار تيار كهربائي و 0.25 دينار نقل في السكك الحديدية . ولإنتاج ما قيمته دينار واحد من الكهرباء تحتاج الشركة إلى 0.65 دينار من الفحم و 0.05 دينار تيار كهربائي و 0.05 نقل. ولغرض توفير خدمة النقل في السكة الحديدية بقيمة دينار واحد

تحتاج الشركة إلى 0.55 دينار من الفحم و 0.10دينار من الكهرباء . في أحد الأسابيع ألتزم منجم الفحم بتصدير ما قيمته 50,000 دينار من الفحم إلى الخارج والتزمت شركة الكهرباء تزويد مدن مجاورة بما قيمته 25,000 دينار من الكهرباء . ولم تلتزم شركة السكك الحديدية بتقديم أي خدمة إلى الخارج . كم يجب على وحدات الإنتاج الثلاثة أن تنتج في ذلك الأسبوع كي تفي بالتزاماتها المحلية والخارجية ؟

الحل

لتكن x_1 القيمة المالية لإنتاج الفحم في ذلك الأسبوع .

x_2 القيمة المالية لإنتاج الكهرباء في ذلك الأسبوع .

x_3 القيمة المالية لخدمات النقل في ذلك الأسبوع .

من المعلومات الواردة في نص المثال تستنتج أن $C=\begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$.

النظام الخطي $(I-C)\mathbf{x}=\mathbf{d}$ يصبح :

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة على اليسار لها معكوس (غير شاذة) مما يعطينا حلاً وحيداً للنظام هو :

$$\mathbf{x}=(I-C)^{-1}\mathbf{d}=\frac{1}{503}\begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 102,087 \\ 56,163 \\ 28,330 \end{bmatrix}.$$

إذن ، على منجم الفحم أن ينتج ما قيمته 102,087 دينار وعلى شركة الكهرباء إنتاج ما قيمته 56,163 دينار وعلى شركة السكك الحديد تقديم خدمة قيمتها 28,330 دينار . □

لنعود الآن إلى المعادلة في (٧) . لاحظ أنه في حالة وجود معكوس للمصفوفة $I-C$ فإنه يمكن إيجاد $\mathbf{x}$ بالعلاقة $\mathbf{x}=(I-C)^{-1}\mathbf{d}$.

وإضافة إلى ذلك ، إذا كانت عناصر $(I-C)^{-1}$ كلها غير سالبة فإن هذا يضمن أن يكون $\mathbf{x}\geq 0$ لكل $\mathbf{d}\geq 0$. إن الشرط الأخير أعلاه أمر محبذ لأنه يعني أن النظام الاقتصادي قيد الدراسة يستطيع أن يلبي أي طلب خارجي وذلك إذا تجاهلنا معوقات الإنتاج الأخرى . إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٩ ، ٨)

يقال عن مصفوفة الاستهلاك C إنها منتجه إذا كانت $(I-C)^{-1}$ موجودة وغير سالبة .

لدينا الآن المبرهنة التالية .

مبرهنة (١٣ ، ٨)

تكون مصفوفة الاستهلاك C منتجه إذا وفقط إذا وجد متجه إنتاج $\mathbf{x}\geq 0$ بحيث $\mathbf{x}>C\mathbf{x}$.

البرهان

لنفرض أن C منتجة . عندئذٍ ، $(I-C)^{-1}$ موجودة وغير سالبة . اختر $\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1\\ I\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$.

لاحظ أن $(I-C)^{-1}\mathbf{d}>0$ لأنه لا يمكن أن يوجد صف في $(I-C)^{-1}$ كله أصفار وإلا أصبحت $(I-C)^{-1}$ شاذة وهذا مستحيل .

لنجعل $\mathbf{x}=(I-C)^{-1}\mathbf{d}$ وبالضرب في $(I-C)$ نحصل على :

$(I-C)\mathbf{x}=\mathrm{d}>0$. أي $\mathbf{x}-C\mathbf{x}>0$ ومنه فإن $\mathbf{x}>C\mathbf{x}$.

ولبرهان العكس نفرض وجود $\mathbf{x}\geq 0$ بحيث $\mathbf{x}-C\mathbf{x}>0$ (٨)

جميع إحداثيات $\mathbf{x}$ يجب أن تكون موجبة لأنه لو كان $x_i = 0$ لأحد قيم i فإنه بحساب الإحداثي i للمتجه $(I - C)\mathbf{x}$ نحصل على :

$$-c_{i1}\, x_1 - c_{i2}\, x_2 - \cdots - c_{i\,i-1}\, x_{i-1} - c_{i\,i+1}\, x_{i+1} - \cdots - c_{in}\, x_n \le 0$$

لأن $c_{ij} \ge 0$ ولأن $x_i \ge 0$. ولكن هذا يناقض الفرض في (٨) . إذن ، $\mathbf{x} > 0$.

ليكن $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$. فتصبح العلاقة (٨) $\mathbf{y} < \mathbf{x}$. الآن لكل $1 \le i \le n$ ضع $\mu_i = \dfrac{x_i + y_i}{2x_i}$. لاحظ أن $0 < \mu_i < 1$ و $y_i < \dfrac{x_i + y_i}{2} = \mu_i\, x_i$. ليكن $\mu = \max\{\mu_i : 1 \le i \le n\}$. إذن ، $y_i < \mu\, x_i$ لكل $1 \le i \le n$. أي أن ،

$$C\mathbf{x} < \mu\, \mathbf{x} \qquad (٩)$$

الآن $C^2\mathbf{x} \le C(\mu\, \mathbf{x}) = \mu\, C\mathbf{x} < \mu^2\, \mathbf{x}$ لأن $C \ge 0$ ولأن $\mu \ge 0$. وبالاستقراء الرياضي نستطيع أن نثبت أن $C^m\mathbf{x} < \mu^m\mathbf{x}$ لكل $m \ge 1$. من هذا نستنتج أن $\lim_{m\to\infty} C^m\, \mathbf{x} = 0$ لأن $\lim_{m\to\infty} \mu^m = 0$ بسبب كون $\mu < 1$ ولأن $C^m \ge 0$ لكل $m \ge 1$.

(استخدمنا هنا مبرهنة الخاصة البينية والتي تسمى أحياناً مبرهنة الساندويش) ولما كان $\mathbf{x} > 0$ فإن هذا يجعل $\lim_{m\to\infty} C^m\, \mathbf{x} = 0$.(نحقق من ذلك) .

لاحظ أن $(I - C)(I + C + \cdots + C^m) = I - C^{m+1}$.

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $m \to \infty$ نحصل على $(I - C)B = I$ حيث

$$B = I + C + C^2 + \cdots \qquad (١٠)$$

إذن ، $B = (I - C)^{-1}$ و $B \ge 0$ من تعريفها أعلاه ولكون $C \ge 0$. وهذا ينهي برهان العكس . ♦

نتيجة (١٤ ، ٨)

إذا كانت C مصفوفة استهلاك فيها مجموع كل صف من صفوفها أقل من 1 فإن C مصفوفة منتجة .

البرهان

خذ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ ولاحظ أن كل أحداثي من $C\,\mathbf{x}$ هو مجموع صف من صفوف C. إذن من الفرض $\mathbf{x} > C\,\mathbf{x}$ ومن هذا نستنتج أن C مصفوفة منتجة حسب المبرهنة (١٣ ، ٨) . ♦

نتيجة (١٥ ، ٨)

إذا كانت C مصفوفة استهلاك فيها مجموع كل عمود من أعمدتها أقل من 1 فإن C مصفوفة منتجة .

البرهان

(يترك كتمرين للقارئ) . □

تمارين (٦ ، ٨)

(١) لكل من مصفوفات النسب التالية في نظام ليونتيف المغلق ، جد متجه السعر الذي يحقق حالة التوازن كما في العلاقة (٦) :

(أ) $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$.

(٢) استخدم المبرهنة (٨ ، ١٣) والنتيجة (٨ ، ١٤) لإثبات أن كلاً من مصفوفتي الاستهلاك التاليتين منتجة :

(أ) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 \end{bmatrix}$.

(٣) استخدم المبرهنة (٨ ، ١٢) لإثبات وجود متجه سعر وحيد لمصفوفة النسب

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.5 \\ 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} .$$

(٤) أثبت النتيجة (٨ ، ١٥) . (إرشاد : استخدم C^T) .

(٥) مكتب استشارات هندسية يتكون من مهندس مدني ، مهندس كهربائي ، مهندس ميكانيكي ، قرروا استخدام طريقة محاسبة دقيقة تحسب مساهمة كل منهم في إنجاز العمل ، فتبين لهم ما يلي :

لكل 100ريال من قيمة العمل الذي ينتجه المهندس المدني هناك 10ريال مساهمة المهندس الكهربائي و 30 ريال مساهمة المهندس الميكانيكي . لكل 100 ريال من قيمة العمل الذي ينتجه المهندس الكهربائي هناك 20 ريال مساهمة من المهندس المدني و 40 ريال من المهندس الميكانيكي . لكل 100 ريال من قيمة العمل الذي ينتجه المهندس الميكانيكي هناك 30 ريال مساهمة من المهندس المدني و 40 ريال من المهندس الكهربائي . في أحد الأسابيع تمكن المكتب الاستشاري من الحصول على عمل كالتالي :

50,000 ريال للمهندس المدني .

70,000 ريال للمهندس الكهربائي .

60,000 ريال للمهندس الميكانيكي .

ما قيمة ما حصل عليه كل مهندس في ذلك الأسبوع لأجل إنجاز الأعمال المطلوبة .

(٦) ثلاثة مزارعين يشتركون في مزرعة . المزارع أ يزرع طماطم ، المزراع ب يزرع قمح والمزراع جـ يزرع خس . اتفقوا فيما بينهم أن يقسموا المحصول كالتالي :

(أ) يحصل على نصف الطماطم ، ثلث القمح ، ربع الخس .

(ب) يحصل على ثلث الطماطم ، ثلث القمح ، ربع الخس .

(جـ) يحصل على الباقي من الطماطم والقمح والخس .

حدد سعر كل محصول بحيث يتكون لدينا نظام اقتصادي متوازن مع الأخذ بنظر الاعتبار أن قيمة أرخص محصول يجب أن تكون 1000 ريال .

(٧) إذا كانت كل من مصفوفتي الاستهلاك والطلب في مجتمع مكون من مزارع ، خباز وبقال هما :

$$A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.5\\ 0.3 & 0 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0\end{bmatrix}$$ و $$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1000\\ 1000\\ 1000\end{bmatrix}$$ فاحسب مصفوفة الإنتاج .

(٨) تحتوي مدينة على ثلاث وحدات إنتاجية هي الصناعة ، الزراعة والخدمات وكانت مصفوفتي الاستهلاك والطلب هما :

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$ و $$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}50\\ 30\\ 20\end{bmatrix}$$. احسب مصفوفة الإنتاج .

(٧ ، ٨) نموذج لسلي

Leslie Model

يعتبر نموذج لسلي (Leslie) من النماذج المعروفة للمشتغلين في دراسة نمو السكان . ويعتمد هذا النموذج على استخدام المصفوفة للتنبؤ بعدد الإناث ضمن السكان في زمن معين و لتجمع سكاني معين . إن فكرة هذا النموذج هي كالتالي :

نقوم بتقسيم الإناث من السكان إلى مجموعات حسب أعمارهن فإذا كان أقصى عمر لأنثى هو L من السنين (أو أي وحدة زمنية أخرى) فإننا نقوم بتقسيم مجموعة الإناث إلى n من المجموعات A_i حيث :

$$A_i = \left\{ x : (i-1)\frac{L}{n} \le \text{عمر } x < i\frac{L}{n} \right\} \text{ ، } i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

من الواضح أن A_i تعتمد على الزمن t لأنه بمرور الوقت تنتقل عناصر من مجموعة أعمار إلى التي تليها كما قد يتوفى بعض أعضاء المجموعة أو يضاف إليهم نتيجة للولادة. لهذا فإننا سنستخدم الرمز $A_i^{(t)}$ للتأكيد على اعتماد المجموعة على الزمن t . عندما تكون $t = 0$ ، نضع $x_i^{(0)} = \left| A_i^{(0)} \right|$ فنحصل بذلك على المتجه

$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ ويسمى بمتجه توزيع السكان الابتدائي . في نموذج لسلي ندرس عدد عناصر المجموعات $x_i^{(t)} = \left| A_i^{(t)} \right|$ في أزمان $t_0, t_1, t_2, \ldots$ بحيث أن $t_i - t_{i-1} = \frac{L}{n}$. لذا فيمكننا أن نجعل $t_0 = 0, t_1 = \frac{L}{n}, t_2 = \frac{2L}{n}, \ldots, t_k = \frac{kL}{n}, \ldots$. كذلك $x_i^{(k)} = \left| A_i^{(t_k)} \right|$. لغرض حساب $x_i^{(k)}$ لابد لنا من نأخذ ثلاثة عوامل بنظر الاعتبار هي الولادة ، الوفاة والتقدم في السن . ومن اجل ذلك نجعل :

a_i ترمز لمعدل عدد البنات اللاتي يلدن لأمهات في A_i .

b_i ترمز لنسبة عدد الإناث في A_i واللاتي ينتقلن إلى المجموعة A_{i+1} بعد مرور $\frac{L}{n}$ من الوقت (أي يبقين على قيد الحياة في هذه الفترة من الزمن) .

لاحظ أن $a_i \ge 0$ لكل $1 \le i \le n$ و $0 < b_i \le 1$ لكل $1 \le i \le n-1$. مما تقدم نجد أن:

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} \qquad (١)$$

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i \, x_i^{(k-1)} \qquad (٢)$$

لكل $1 \le i \le n-1$. باستخدام المصفوفات يمكن أن تكتب المعادلتين (١) و (٢)

كالتالي :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} \qquad (٣)$$

نطلق على المصفوفة $n \times n$ في العلاقة أعلاه اسم مصفوفة لسلي (Leslie matrix) ونرمز لها بالرمز L . ولذا يمكن التعبير عن العلاقة(٣) كالتالي :

$$\mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(k-1)} \qquad (٤)$$

حيث $\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$. ومن العلاقة (٤) وبالحساب الإرجاعي نجد أن :

$$\mathbf{x}^{(k)} = L^k \mathbf{x}^{(0)} \quad \text{لكل } k \geq 1 \qquad (٥)$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أنه من معرفة متجه توزيع السكان الابتدائي ومصفوفة لسلي نستطيع أن نحسب توزيع السكان (من الإناث) في أي فترة زمنية لاحقة (بصورة تقريبية) .

مثال (٢٩ ، ٨)

لنفرض أنه في أحد التجمعات السكانية لا تعيش المرأة لأكثر من 90 عاماً. وأننا قسمنا السكان من الإناث إلى ثلاث مجموعات أعمار، فترة عمر كل مجموعة 30 عاماً. إذا علمت أن مصفوفة لسلي هي $L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$ وأن عدد الإناث في كل

مجموعة عمر هو 1000. فاحسب عدد الإناث اللاتي أعمارهن بين الثلاثين والستين بعد مرور 60 عاماً ، 150عاماً .

الحل

متجه توزيع السكان الابتدائي هو $\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$. طول الفترة الزمنية للأعمار هو 30 عاماً .إذن ، بعد 60 عام يكون $k=\frac{60}{30}=2$ وبعد 150عاماً يكون $k=\frac{150}{30}=5$. ولذا فإن

$$\mathbf{x}^{(2)}=L^2\mathbf{x}^0=\begin{bmatrix} 17.5 & 8 & 0 \\ 3 & 1.5 & 0 \\ \frac{3}{32} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25500 \\ 4500 \\ 93.75 \end{bmatrix} .$$

إذن ، بعد ستين عاماً يوجد في هذا التجمع السكاني 4500 امرأة أعمارهن بين الثلاثين والستين . الآن :

$$\mathbf{x}^{(5)}=L^5\,\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 1435 & 660.5 & 0 \\ \frac{3963}{16} & 114 & 0 \\ \frac{57}{8} & \frac{105}{32} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2095500 \\ 361687.5 \\ 10406.25 \end{bmatrix}$$

إذن ، بعد مائة وخمسين عاماً يصبح عدد النساء اللاتي أعمارهن بين الثلاثين والستين 361688 (لاحظ أننا حولنا العدد 361687.5 إلى أقرب عدد صحيح لأنه يمثل عدد سكان) . □

على الرغم من أن العلاقة في (٥) تعطينا التوزيع السكاني في أي فترة زمنية مستقبلية إلا أنها لا تعطينا فكرة دقيقة عن ديناميكية النمو الحاصل في مجموعات

الأعمار . إذن لا بد من تبسيط تلك العلاقة مستخدمين في ذلك فكرة القيم المميزة والمتجهات المميزة . من أجل ذلك نحسب كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة لسلي :

$$L=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

فنحصل على :

$$p(x)=\det(xI-L) \qquad (٦)$$

$$=x^n-a_1x^{n-1}-a_2b_1x^{n-2}-a_3b_1b_2x^{n-3}-\cdots-a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}$$

إذا كان $\lambda\neq 0$ جذراً لكثيرة الحدود $p(x)$ فإن :

$$\lambda^n=a_1\lambda^{n-1}+a_2b_1\lambda^{n-2}+a_3b_1b_2\lambda^{n-3}+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}$$

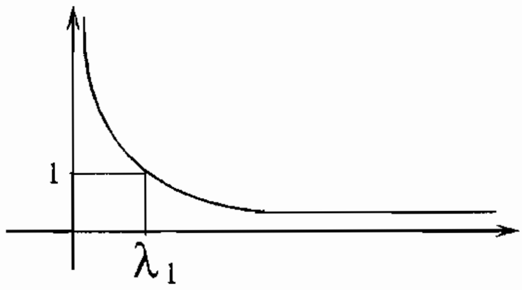
بقسمة الطرفين على λ^n نحصل على :

$$1=\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2b_1}{\lambda^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

نستنتج أن $\lambda\neq 0$ جذر لكثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كانت $q(\lambda)=1$ حيث

$$q(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2b_1}{x^2}+\frac{a_3b_1b_2}{x^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{x^n}.$$

ولما كانت $a_i\geq 0$ و $b_j>0$ لكل $1\leq i\leq n$ و $1\leq j\leq n-1$ فإن $q(x)$ هي دالة تناقصية فعلاً عندما تكون $x\in(0,\infty)$. كما أن $\lim_{x\to\infty}q(x)=0$ و $\lim_{x\to 0}q(x)=\infty$ ونلاحظ أن المشتقة الثانية لـ $q(x)$ بالنسبة لـ x موجبة فنستنتج من هذا كله أن بيان $q(x)$ على الفترة $(0,\infty)$ هو كما في الشكل (٨ ، ١٨)



شكل (١٨ ، ٨)

من هذا نجد أنه توجد قيمة وحيدة λ_1 بحيث أن. $q(\lambda_1)=1$ إذن توجد قيمة مميزة موجبة وحيدة للمصفوفة L ويمكن للقارئ أن يبرهن أن هذا الجذر λ_1 هو جذر بسيط (أنظر التمارين). أي أن بعد الفضاء المميز هو 1 . كما أنه من حسابات بسيطة يمكن أن تجد أن المتجه المميز المقابل للقيمة المميزة هو :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{\lambda_1} \\ \dfrac{b_1\, b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^{n-1}} \end{bmatrix}$$

وهذا المتجه - بطبيعة الحال - يولد الفضاء المميز . إن الحقائق التي تطرقنا إليها يمكن أن توضع في نص المبرهنة التالية والتي قدمنا معظم برهانها .

مبرهنة (١٦ ، ٨)

إذا كانت L مصفوفة لسلي فإن لها قيمة مميزة موجبة وحيدة . كما أن بعد الفضاء المميز المقابل لهذه القيمة هو 1 . ♦

فيما سيأتي ، سنبين أن القيمة المميزة الموجبة الوحيدة للمصفوفة L هي التي لها الأثر الأكبر في تقدير التوزيع السكاني مستقبلاً وتتضح أهمية هذه القيمة المميزة من المبرهنة التالية والتي نترك برهانها كتمرين للقارئ .

مبرهنة (١٧ ، ٨)

لتكن λ_1 هي القيمة المميزة الموجبة الوحيدة لمصفوفة لسلي L ، ولتكن λ أي قيمة مميزة أخرى لنفس المصفوفة . عندئذٍ، $|\lambda| \le \lambda_1$. ♦

في الحقيقة أننا نطمح أن تكون $|\lambda| < \lambda_1$ لكل قيمة مميزة λ للمصفوفة L ولكن هذا غير صحيح دائماً كما يتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٣٠ ، ٨)

احسب القيم المميزة لمصفوفة لسلي التالية :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

الحل

لاحظ أن :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$$

ولذا فإن القيمة المميزة الموجبة الوحيدة هي $\lambda_1 = 1$ وأن :

$$\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right| = 1 \ . \ \square$$

ملحوظة

في المثال (٣٠ ، ٨) لاحظ أن $L^3 = I$ وباستخدام العلاقة (٥) نجد أن :

$$x^{(0)} = x^{(3)} = \cdots = x^{(3k)} = \cdots$$

أي أن التوزيع السكاني يعيد نفسه بعد كل ثلاث فترات زمنية .
إن هذا النمط الدوري من التوزيع السكاني يسمى في علم السكان بالموجات السكانية (population waves) . أن مثل هذه الظاهرة لا تحصل في حالة كون $\lambda_1 > |\lambda|$ لكل القيم المميزة الأخرى λ لمصفوفة لسلي .

تعريف (٨ ، ١)
إذا كانت L مصفوفة لسلي و λ_1 هي القيمة المميزة الموجبة لها . وكانت $\lambda_1 > |\lambda|$ لكل القيم المميزة الأخرى λ فإننا نسمي λ_1 القيـــمة الممـــيزة الغـــــــالـــبة (dominant eigenvalue).

إن البحث في الشروط الكافية واللازمة على المصفوفة L كي تكون λ_1 غالبة هو أمر ليس باليسير ويخرجنا عن مستوى هذا الكتاب ولكن يمكن أن نورد المبرهنة التالية بدون برهان .

مبرهنة (٨ ، ١٨)
إذا كانت L مصفوفة لسلي ووجد فيها عنصران متتاليان a_i و a_{i+1} غير صفريين فإن القيمة المميزة الموجبة الوحيدة للمصفوفة L تكون غالبة . ♦

فيما سيأتي نفرض أن لدينا مصفوفة لسلي L والتي فيها القيمة المميزة λ_1 غالبة .
إن هذه هي التي غالباً ما تحصل في نموذج لسلي للسكان وتعكس الواقع الطبيعي لنمو السكان ضمن مجموعات الأعمار . ولغرض تبسيط حساباتنا نفرض أن المصفوفة L قابلة للاستقطار ، أي يمكن إيجاد n من المتجهات المميزة المستقلة خطياً . لنفرض

أن هذه المتجهات هي $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ وأن قيمها المميزة المقابلة هي $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ على التوالي . (لاحظ أن القيم المميزة لا يشترط أن تكون مختلفة). لتكن P هي المصفوفة التي أعمدتها هي المتجهات المميزة للمصفوفة L .

أي $P = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n]$. إذن :

$$L = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1} .$$

ومن هذا نحصل على :

$$L^k = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1} \qquad (٧)$$

لكل $k \geq 1$ (تحقق من ذلك) . الآن ، إذا كان $\mathbf{x}^{(0)}$ متجه توزيع سكان ابتدائي فإننا نحصل على :

$$\mathbf{x}^{(k)} = L^k \mathbf{x}^{(0)} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \qquad (٨)$$

لكل $k \geq 1$. نقسم طرفي المعادلة في (٨) على λ_1^k فنحصل على :

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix}P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \qquad (٩)$$

ولما كانت λ_1 غالبة فإن $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|<1$ لكل $2\le i\le n$. وعليه فإن $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k=0$

لكل $2\le i\le n$. الآن نأخذ النهاية لطرفي العلاقة في (٩) عندما $k\to\infty$ فنحصل على :

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right)=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\cdots & 0\\ 0 & 0 & 0\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\cdots & 0\end{bmatrix}P^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)} \qquad (١٠)$$

إذا وضعنا $P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_3\end{bmatrix}$ فإنه من السهل التأكد من أن الطرف الأيمن في العلاقة (١٠) يصبح $c_1\mathbf{x}_1$ (أنظر التمرين (٤)) . إذن ،

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right)=c_1\,\mathbf{x}_1 \qquad (١١)$$

العلاقة (١١) تعطينا قيمة تقريبية للمتجه $\mathbf{x}^{(k)}$ في حالة كون k كبيراً بصورة كافية ، وهذا التقريب هو :

$$\mathbf{x}^k\approx c_1\lambda_1^k\,\mathbf{x}_1 \qquad (١٢)$$

كذلك نحصل على :

$$\mathbf{x}^{(k-1)}\approx c_1\,\lambda_1^{k-1}\,\mathbf{x}_1 \qquad (١٣)$$

من (١٢) و (١٣) نحصل على :

$$\mathbf{x}^{(k)}\approx\lambda_1\,\mathbf{x}^{(k-1)} \qquad (١٤)$$

ونؤكد هنا أن العلاقة (١٤) تعطينا تقريباً جيداً فقط في حالة كون k كبيراً بصورة كافية. إن كون متجه توزيع السكان في الفترة k هو مضاعف لمتجه توزيع السكان في الفترة السابقة $k-1$ يعني أن نسب عدد عناصر مجموعة الأعمار في التوزيع السكاني للإناث تؤول إلى الثبات .

مثال (٣١ ، ٨)

بالعودة إلى المثال (٢٩ ، ٨) احسب ما تؤول إليه نسب الأعداد في مجموعات الأعمار للإناث من السكان وذلك عندما تؤول k إلى ما لا نهاية (أي بعد زمن طويل).

الحل

لدينا مصفوفة لسلي $L=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$ عند حساب كثيرة الحدود المميزة نجدها $p(x)=x^3-4x^2-\frac{3}{2}x$. ولذا فإن جذورها هي 0, $\frac{4+\sqrt{22}}{2}$ و $\frac{4-\sqrt{22}}{2}$.

لاحظ أن الجذر الموجب الوحيد هو $\frac{4+\sqrt{22}}{2}$ وهو ما رمزنا له λ_1 . كما نلاحظ أن λ_1 جذر غالب وهذا متوقع من المبرهنة (١٨ ، ٨)لأن $a_1=4\neq 0$ وأن $a_2=2\neq 0$. كما وجدنا في بداية الموضوع أن المتجه المميز المقابل للقيمة λ_1 هو :

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1b_2/\lambda_1^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2\left(4+\sqrt{22}\right)} \\ \frac{3}{16\left(4+\sqrt{22}\right)} \end{bmatrix} .$$

من العلاقة (١٢) نجد أن

$$\mathbf{x}^{(k)}\approx c_1\left(\frac{4+\sqrt{22}}{2}\right)^k\mathbf{x}_1 .$$

إذن، عندما تكون k كبيرة بصورة كافية نجد أن أعداد مجموعات الأعمار الثلاثة تتوزع حسب إحداثيات $\mathbf{x}_1$. لذا تكون نسب الأعداد :

$1=\frac{3}{2\left(4+\sqrt{22}\right)}=\frac{3}{16\left(4+\sqrt{22}\right)}$. وهذا يعني أنه بعد زمن طويل تكون نسبة الإناث في المجموعة الأولى 83.7 % وفي المجموعة الثانية 14.5 % . وفي المجموعة الثالثة هي 1.8 % . أي أن معظم الإناث وهو ما يزيد عن 83 % لا تزيد أعمارهن عن 30 عاماً . □

تمارين (٧ ، ٨)

(١) أثبت أن مصفوفة لسلي لها قيمة مميزة موجبة وحيدة وأن تكرارها هو 1 كجذر لكثيرة الحدود المميزة (إرشاد : استعن بالحقيقة القائلة أن x_0 جذر غير مكرر لكثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان $p(x_0)=0 , p'(x_0)\neq 0$) .

(٢) في دراسة للتوزيع العمري لمجموعة من الحيوانات تقرر تقسيمهم إلى مجموعتين عمريتين مع تطبيق نموذج لسلي والمصفوفة التالية :

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} .$$

(أ) احسب القيمة المميزة الموجبة λ_1 والمتجه المميز $\mathbf{x}_1$.

(ب) ابتداءً بمتجه توزيع السكان الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$ احسب $\mathbf{x}^{(4)}$.

(جـ) لحسب $\mathbf{x}^{(6)}$ مستخدماً الصيغة الصحيحة $\mathbf{x}^{(6)}=L\mathbf{x}^{(5)}$ ثم احسبها بالصيغة التقريبية $\mathbf{x}^{(6)}\approx\lambda_1\mathbf{x}^{(5)}$.

(٣) أثبت المبرهنة (١٧ ، ٨) . (إرشاد : استعن بكثيرة الحدود $q(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2b_1}{x^2}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{x^n}$ المشتقة من مصفوفة لسلي بعد العلاقة (٦)) .

(٤) أثبت أن $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right)=c_1\,\mathbf{x}_1$ حيث أن $\mathbf{x}_1$ هو المتجه المميز المقابل

للقيمة المميزة الغالبة λ_1 و c_1 كما ورد في العلاقة (١٠) .

(٥) أثناء القيام بتجارب مخبرية على مجموعة من الأرانب تبين ما يلي :

(أ) نصف الأرانب يموت في السنة الأولى ويموت نصف المتبقي في السنة الثانية والباقي يموت مع نهاية السنة الثالثة .

(ب) لا تلد الأرانب في السنة الأولى ، متوسط عدد المواليد خلال السنة الثانية هو 6 ومتوسط عدد المواليد خلال السنة الثالثة هو 8 .

إذا علمت أن المختبر يحتوي الآن على 24 أرنباً عمر كل منها أقل من عام ، 24 أرنباً عمر كل منها أكثر من عام وأقل من عامين و 20 أرنباً عمر كل منها بين عامين وثلاثة أعوام فاحسب :

(أ) متجه التوزيع السكاني الإبتدائي .

(ب) مصفوفة لسلي .

(جـ) عدد الأرانب في كل فترة عمرية بعد عام واحد وبعد عامين .

(د) القيمة المميزة الغالبة لمصفوفة لسلي وبعد الفضاء المميز المقابل لها .