الفصل السادس

التحويلات الخطيـــــــة
LINEAR TRANSFORMATIONS

يلعب مفهوم الدالـة (التطبيق) دوراً أساسياً ليس في الرياضيات فحسب وإنما في مواضيع أخرى كثيرة مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد وغيرها . في هذا الفصل سنتعرف على نوع خاص ولكنه هام من هذه الدوال والذي يلعب دوراً رئيساً في موضوع الجبر الخطي ، ويدعى هذا النوع الهام من الدوال بالتحويل الخطي الذي له أهمية بالغة في دراسة الجبر الخطي بالإضافة إلى تطبيقاته المختلفة في مواضيع أخرى مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد .

(٦ ، ١) خواص أساسية
Basic Properties

تعريف (٦ ، ١)

ليكن كل من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ فضاء متجهات وليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تطبيقاً . نقول أن T تحويل خطي (linear transformation) إذا كان لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha\in\mathbf{R}$:

(١) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$

(٢) $T(\alpha\mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\mathbf{V}=\mathbf{W}$ فإننا نقول أن T مؤثر خطي على $\mathbf{V}$ (linear operator on $\mathbf{V}$) .

قبل أن نقدم أمثلة على التحويلات الخطية نبرهن بعض الخواص الأساسية لها .

مبرهنة (٦ ، ١)

إذا كان $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن :

(١) $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

(٢) $T(-\mathbf{u})=-T(\mathbf{u})$ لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$.

(٣) $T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

البرهان

(١) لاحظ أنه لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ لدينا $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$. الآن ، $T(\mathbf{0})=T(0\mathbf{u})=0T(\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

(٢) $T(-\mathbf{u})=T((-1)\mathbf{u})=(-1)T(\mathbf{u})=-T(\mathbf{u})$.

(٣) $T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=T(\mathbf{u}+(-\mathbf{v}))=T(\mathbf{u})+T(-\mathbf{v})=T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v})$. ♦

مبرهنة (٢ ، ٦)

يكون التطبيق $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً إذا وفقط إذا كان
$T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+\beta T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

البرهان

لنفرض أولاً أن T تحويل خطي . عندئذٍ ،

$T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=T(\alpha\mathbf{u})+T(\beta\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+\beta T(\mathbf{v})$.

ولبرهان العكس نفرض أن $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+\beta T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. على وجه الخصوص إذا كان $\alpha=\beta=1$ فإننا نحصل على $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$ وإذا كان $\beta=0$ فإننا نحصل على $T(\alpha\mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})$ إذن ، T تحويل خطي . ♦

باستخدام الاستقراء الرياضي والمبرهنة (٢ ، ٦) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٣ ، ٦)

إذا كان $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن

$$T(\alpha_1\mathbf{u_1}+\alpha_2\mathbf{u_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{u_n})=\alpha_1 T(\mathbf{u_1})+\alpha_2 T(\mathbf{u_2})+\ldots+\alpha_n T(\mathbf{u_n})$$

لكـــل $\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\ldots,\mathbf{u_n}\in\mathbf{V}$ ولكـــل $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. ♦

نقدم الآن بعض الأمثلة على التحويلات الخطية .

مثال (١ ، ٦)

ليكن كل من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ فضاء متجهات . كل من التطبيقات التالية تحويل خطي (من السهل التحقق من ذلك) :

(أ) التحويل المحايد (identity transformation) $I:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ المعرف بالقاعدة $I(\mathbf{v})=\mathbf{v}$ لكـــل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(ب) التحويل الصفري (zero transformation) $0:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ المعرف بالقاعدة $0(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ لكـــل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(جـ) الضرب بعدد $\alpha\in\mathbb{R}$ وهو $T_\alpha:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ المعرف بالقاعدة $T_\alpha(\mathbf{v})=\alpha\,\mathbf{v}$ لكـــل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. □

مثال (٢ ، ٦)

ليكـــن $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ تطـــبيقاً معـــرفاً بالقـــاعدة $T(x,y,z)=(x+z,y-z)$ لكـــل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. عندئذٍ T تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}=(x_1,y_1,z_1)$ وأن $\alpha\in\mathbb{R}$ ، عندئذٍ :

$$(١)\quad T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T[(x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)]$$

$$\begin{aligned}
&= T(x+x_1, y+y_1, z+z_1) \\
&= (x+x_1+z+z_1, y+y_1-z-z_1) \\
&= (x+z, y-z) + (x_1+z_1, y_1-z_1) \\
&= T(x,y,z) + T(x_1,y_1,z_1) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= (\alpha x + \alpha z, \alpha y - \alpha z) \\
&= (\alpha(x+z), \alpha(y-z)) \\
&= \alpha(x+z, y-z) \\
&= \alpha T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

إذن ، T تحويل خطي . □

مثال (٣ ، ٦)

التطبيق $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y) = (x, x-y, y)$ لكل $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{u} = (x,y), \mathbf{v} = (x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ وأن $\alpha \in \mathbf{R}$ ، عندئذ :

(١)
$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(x+x_1, y+y_1) \\
&= (x+x_1, x+x_1-y-y_1, y+y_1) \\
&= (x, x-y, y) + (x_1, x_1-y_1, y_1) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha x, \alpha y) \\
&= (\alpha x, \alpha x - \alpha y, \alpha y) \\
&= \alpha(x, x-y, y) \\
&= \alpha T(x,y) \\
&= \alpha T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

إذن ، T تحويل خطي . □

مثال (٦ ، ٤)

التطبيق $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(x+y,2y+1)$ لكل $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ ليس تحويلاً خطياً . فعلى سبيل المثال لاحظ أن $\mathbf{v}=(2,3), \mathbf{u}=(1,2)\in\mathbf{R}^2$ وأن $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(-1,5)=(-1+5,10+1)=(4,11)$. و لكن :

$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=T(1,2)+T(-2,3)=(3,5)+(1,7)=(4,12)$.

ولذا فإن $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})\neq T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$. □

مثال (٦ ، ٥)

التطبيق $T:\mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{nm}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=A^T$ لكل $A\in\mathbf{M}_{mn}$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $A,B\in\mathbf{M}_{mn}$ وأن $\alpha\in\mathbf{R}$. عندئذٍ

(١) $T(A+B)=(A+B)^T=A^T+B^T=T(A)+T(B)$.

(٢) $T(\alpha A)=(\alpha A)^T=\alpha A^T=\alpha T(A)$. □

مثال (٦ ، ٦)

التطبيق $T:\mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{R}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=tr(A)$ لكل $A\in\mathbf{M}_{nn}$ تحويل خطي .

الحل

$$T(A+B)=tr(A+B)=tr(A)+tr(B)=T(A)+T(B) \quad (١)$$

$$T(\alpha A)=tr(\alpha A)=\alpha\, tr(A)=\alpha T(A) \quad (٢)$$. □

مثال (٦ ، ٧)

ليكن $\mathbf{W}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ المنتهي البعد . التطبيق $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ المعرف بالقاعدة $T(\mathbf{v})=\text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ أساس عياري متعامد للفضاء $\mathbf{W}$. عندئذٍ باستخدام مبرهنة الإسقاط لدينا : $T(\mathbf{v})=\text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})=\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m$

لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. ومن ثم لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}(١)\quad T(\mathbf{u}+\mathbf{v})&=\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\\ &=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\\ &=\left[\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\right]+\left[\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\right]\\ &=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(٢)\quad T(\alpha\mathbf{u})&=\langle\alpha\mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\alpha\mathbf{u},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\\ &=\alpha\left(\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\cdots+\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_m\rangle\mathbf{u}_m\right)\\ &=\alpha T(\mathbf{u})\end{aligned}$$

إذن ، T تحويل خطي . □

مثال (٦ ، ٨)

التطبيق $T:\mathbf{P}_n\to\mathbf{P}_{n-1}$ المعرف بالقاعدة $T(p(x))=p'(x)$ لكل $p(x)\in\mathbf{P}_n$ تحويل خطي . كذلك التطبيق $T:\mathbf{P}_n\to\mathbf{P}_{n+1}$ المعرف بالقاعدة $T(p(x))=\int_0^x p(t)\,dt$ لكل $p(x)\in\mathbf{P}_n$ تحويل خطي .

الحل

متـــــروك للقـــــارئ . □

مثال (٩ ، ٦)

إذا كـان $\mathbf{V}$ فضـاء ضـرب داخـلي وكـان $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ فـإن التطـبيق $T: \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ المعـرف بالقاعدة $T(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle$ لكـــل $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$ ، عندئذ :

(١) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

(٢) $T(\alpha \mathbf{u}) = \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle = \alpha T(\mathbf{u})$. □

مثال (١٠ ، ٦)

التطبيق $T: \mathbf{M}_{23} \to \mathbf{P}_2$ المعرف بالقاعدة :

$$T(A) = T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = (a_{11} + a_{13})x^2 + (a_{21} - a_{22})x + a_{23}$$

تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{23}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$.

عندئذٍ :

$$T(A+B)=T\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix} \qquad (١)$$

$$=\left[(a_{11}+b_{11})+(a_{13}+b_{13})\right]x^2+\left[(a_{21}+b_{21})-(a_{22}+b_{22})\right]x+\left[a_{23}+b_{23}\right]$$

$$=(a_{11}+a_{13})x^2+(a_{21}-a_{22})x+a_{23}+(b_{11}+b_{13})x^2+(b_{21}-b_{22})x+b_{23}$$

$$=T(A)+T(B)$$

$$T(\alpha A)=T\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} + & \alpha a_{23} \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

$$=(\alpha a_{11}+\alpha a_{13})x^2+(\alpha a_{21}-\alpha a_{22})x+\alpha a_{23}$$

$$=\alpha\left[(a_{11}+a_{13})x^2+(a_{21}-a_{22})x+a_{23}\right]$$

$$=\alpha T(A)$$

إذن ، T تحويل خطي . □

مثال (١١ ، ٦)

لتكن $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. التطبيق $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. عندئذٍ :

$$T_A(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x-z \\ x-y+z \end{bmatrix}=(3x-z,\ x-y+z) .$$

نستطيع الآن بطريقة مماثلة للمثال (٢ ، ٦) أن نبرهن على أن T_A تحويل خطي . □

المثال السابق ما هو إلا حالة خاصة من المبرهنة التالية :

مبرهنة (٤ ، ٦)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن التطبيق $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ تحويل خطي .

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ وأن $\alpha \in \mathbf{R}$. عندئذٍ

(١) $T_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$.

(٢) $T_A(\alpha\mathbf{u}) = A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(A\mathbf{u}) = \alpha T_A(\mathbf{u})$. ♦

ملحوظة

يسمى التحويل في المبرهنة (٤ ، ٦) التحويل المصفوفي المقابل للمصفوفة A (matrix transformation induced by A). والسؤال الذي يطرح نفسه : هل كل تحويل خطي هو تحويل مصفوفي ؟ المبرهنة التالية تجيبنا على هذا السؤال .

مبرهنة (٥ ، ٦)

ليكن $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تحويلاً خطياً وليكن $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذ $T = T_A$ حيث $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times n$ أعمدتها $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ وأن A هي المصفوفة المبينة في نص المبرهنة . بما أن $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \}$ أساس للفضاء فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ بحيث أن $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n$. الآن :

$$T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n)$$

$$=\alpha_1\, T(\mathbf{e}_1)+\alpha_1\, T(\mathbf{e}_2)+\cdots+\alpha_n\, T(\mathbf{e}_n)$$

$$=\alpha_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1+a_{12}\,\alpha_2+\cdots+a_{1n}\,\alpha_n\\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\,\alpha_2+\cdots+a_{2n}\,\alpha_n\\ \vdots\\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\,\alpha_n\end{bmatrix}= A\,\mathbf{v}= T_A(\mathbf{v})$$

إذن ، $T=T_A$. ♦

ملحوظة

تسمى المصفوفة في المبرهنة (٥ ، ٦) المصفـوفة المعتـادة للتحـويل T (standard matrix of T) . سنبين في البند (٣ ، ٦) كيفية إيجاد المصفوفة A لأي تحويل خطي $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$.

مثال (١٢ ، ٦)

إذا كـان $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ هـو الـتحويل الخطـي المعـرف بالقـاعدة $T(x,y,z)=(x+z,y-z)$ فجد المصفوفة المعتادة لهذا التحويل .

الحل

لنفرض أن $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$. عندئذٍ

$$T(\mathbf{e}_1)=T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2)=T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_3)=T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

ولذا فإن $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$. □

المثال التالي له أهمية كبيرة خاصة عند دراسة مواضيع الجبر الخطي المتقدم

مثال (١٣ ، ٦)

إذا كانت $A\in\mathbf{M}_{nn}$ فإن التطبيق $T:\mathbf{P}_m\to\mathbf{M}_{nn}$ المعرف بالقاعدة :

$$T(p)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$

لكل $p(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{P}_m$ تحويل خطي .

الحل

لنفرض أن

$p(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0\,,\,q(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in\mathbf{P}_m$ وأن $\alpha\in\mathbb{R}$.

(١)
$$\begin{aligned}T(p+q)&=T\left[(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\right]\\&=(a_m+b_m)A^m+\cdots+(a_1+b_1)A+(a_0+b_0)\\&=\left(a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0I\right)+\left(b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0I\right)\\&=T(p)+T(q)\end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned}T(\alpha p)&=T\left[(\alpha a_m)x^m+\cdots+(\alpha a_1)x+(\alpha a_0)\right]\\&=(\alpha a_m)A^m+\cdots+(\alpha a_1)A+(\alpha a_0)I\\&=\alpha\,[a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0I]=\alpha T(p)\end{aligned}$$

إذن ، T تحويل خطي . □

لنفرض الآن أن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويل خطي وأن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. السؤال المطروح هنا هو كيف نعين $T(\mathbf{v})$ ؟ إن الإجابة على هذا السؤال مهمة سهلة . فإذا كانت $S = \{ \mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n \in \mathbf{R}$ بحيث إن $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. ولذا فإنه باستخدام النتيجة (٣ ، ٦) نجد أن $T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$. ولذا فإننا نخلص إلى أنه بمجرد معرفتنا لتأثير T على عناصر الأساس S فإننا نستطيع تعيين $T(\mathbf{v})$ مهما كان $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. ولمعالجة المسألة المعاكسة نفرض أنه لدينا الآن فضائي متجهات $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ حيث $S = \{ \mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ و $\{ \mathbf{w}_1 , \ldots , \mathbf{w}_n \}$ أي مجموعة جزئية من $\mathbf{W}$. عندئذٍ المبرهنة التالية تضمن لنا وجود تحويل خطي وحيد $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ لكل $1 \le i \le n$.

مبرهنة (٦ ، ٦)

إذا كان $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ فضائي متجهات وكان $S = \{ \mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ بينما $S_1 = \{ \mathbf{w}_1 , \ldots , \mathbf{w}_n \}$ مجموعة من المتجهات في $\mathbf{W}$ فإنه يوجد تحويل خطي وحيد $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ بحيث إن $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ لكل $1 \le i \le n$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. عندئذٍ توجد أعداد وحيدة $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n \in \mathbf{R}$ بحيث إن $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

لنفرض الآن أن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{w}_n .$$

سنبرهن الآن على أن T تحويل خطي ولهذا الغرض نفرض أن :

$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n\ ,\mathbf{u}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n\in\mathbf{V}$ وأن $\alpha\in\mathbf{R}$. عندئذٍ :

(١)
$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}+\mathbf{u})&=T\left[(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\mathbf{v}_n\right]\\&=(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{w}_1+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\mathbf{w}_n\\&=(\alpha_1\mathbf{w}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{w}_n)+(\beta_1\mathbf{w}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{w}_n)=T(\mathbf{v})+T(\mathbf{u})\end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned}T(\alpha\mathbf{v})&=T(\alpha\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha\alpha_n\mathbf{v}_n)\\&=\alpha\alpha_1\mathbf{w}_1+\cdots+\alpha\alpha_n\mathbf{w}_n\\&=\alpha(\alpha_1\mathbf{w}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{w}_n)=\alpha T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

وبالتالي فإن ، T تحويل خطي . الآن لكل $1\le i\le n$ لدينا :

$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}_i)&=T(0\cdot\mathbf{v}_1+\cdots+1\cdot\mathbf{v}_i+\cdots+0\cdot\mathbf{v}_n)\\&=0\cdot\mathbf{w}_1+\cdots+1\cdot\mathbf{w}_i+\cdots+0\cdot\mathbf{w}_n=\mathbf{w}_i\end{aligned}$$

ولبرهان الوحدانية نفرض أن $L:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويل آخر يحقق الشرط $T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ لكل $1\le i\le n$. عندئذٍ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ لدينا :

$$\begin{aligned}L(\mathbf{v})&=L(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\alpha_1L(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_nL(\mathbf{v}_n)\\&=\alpha_1\mathbf{w}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{w}_n=T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

ولذا فإن $L=T$. ♦

ملحوظة

تزودنا المبرهنة (٦ ، ٦) بطريقة بسيطة لتعريف التحويلات الخطية ويتم ذلك بمعرفة صور عناصر الأساس ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١٤ ، ٦)

عين تحويلاً خطياً $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ يحقق

$$T(1,1,0)=(1,2)\ ,\ T(1,0,1)=(-1,1)\ ,\ T(0,1,1)=(2,3)$$

الحل

لاحظ أن $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{R}^3$. ولذا فإنه لكل $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ لدينا :

$(x,y,z)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(0,1,1)$. أي أن :

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2 \quad\quad &= x \\ \alpha_1 \quad\quad +\alpha_3 &= y \\ \alpha_2+\alpha_3 &= z \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن :

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(x+y-z)\ ,\ \alpha_2=\frac{1}{2}(x-y+z)\ ,\ \alpha_3=\frac{1}{2}(-x+y+z)\ .$$

وبتطبيق المبرهنة (٦ ، ٦) نجد أن :

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \alpha_1 T(1,1,0)+\alpha_2 T(1,0,1)+\alpha_3 T(0,1,1) \\ &= \frac{1}{2}(x+y-z)(1,2)+\frac{1}{2}(x-y+z)(-1,1)+\frac{1}{2}(-x+y+z)(2,3) \\ &= (-x+2y\ ,\ 2y+z) \end{aligned}$$

ولذا فإن قاعدة تعريف التحويل الخطي المطلوب هي :

$$T(x,y,z)=(-x+2y,2y+z)\ .\ \square$$

تمارين (١ ، ٦)

في التمارين من (١) إلى (٣٣) بين أيا من التطبيقات المبينة هو تحويل خطي .

(١) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(2x-y,x+y)$.

(٢) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(2x,x+y,x-2y)$.

(٣) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ حيث $T(x,y,z)=x+y+z$.

(٤) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(x-y,y,x+y)$.

(٥) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(-y,x)$.

(٦) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x,y,-z)$.

(٧) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(2x-3y+5z,0)$.

(٨) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x^2,y)$.

(٩) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $T(x)=x^2$.

(١٠) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(0,2x+y)$.

(١١) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(xy,y,x-z)$.

(١٢) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x,\sin y,\ 2x+y)$.

(١٣) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ حيث $T(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(١٤) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=x\,p(x)$.

(١٥) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=x^3+p(x)$.

(١٦) $T : \mathbf{P}_n \to \mathbb{R}$ حيث $T(p(x))=p(0)$.

(١٧) $T : \mathbf{P}_n \to \mathbb{R}$ حيث $T(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)=a_n$.

(١٨) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=2ax+b$.

(١٩) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$.

(٢٠) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$.

(٢١) $T : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ حيث

$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(a_0+a_2)-(a_1+2a_3)x^2$.

(٢٢) $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=A^T+A$.

(٢٣) $T : \mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{rs}$ حيث $T(A)=PAQ$ وحيث P مصفوفة من الدرجة $r \times m$ و Q مصفوفة من الدرجة $n \times s$.

(٢٤) $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbb{R}$ حيث $T(A)=\det(A)$.

(٢٥) $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=I+A$.

(٢٦) $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=AA^T$.

(٢٧) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(x,y,z)=\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 0 \end{bmatrix}$.

(٢٨) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=\begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0-a_1 \end{bmatrix}$.

(٢٩) $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbb{R}$ حيث $T(A)=\operatorname{rank}(A)$.

(٣٠) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ حيث
$T(x,y,z)=(2x+3y-z, 2+x+y, 3|x-3z|)$.

(٣١) $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ حيث $T(A)=3A^T$.

(٣٢) $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ حيث $T(A)=A+M$ و M مصفوفة من الدرجة $n\times m$ معطـــاة .

(٣٣) $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=AM$ و M مصفوفة معطاة من الدرجة n .

في التمارين من (٣٤) إلى (٣٩) بين فيما إذا كان التطبيق المبين هو تحويل خطي حيث $\mathbf{V}=\mathbf{C}[a,b]$.

(٣٤) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ حيث $T(f(x))=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(٣٥) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ حيث $T(f(x))=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(٣٦) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x f^2(x)\,dx$.

(٣٧) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x 4f(x)\,dx$.

(٣٨) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x (4+f(x))\,dx$.

(٣٩) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=3f(x)-2\int_a^x f(x)\,dx$.

في التمارين من (٤٠) إلى (٤٣) بين فيما إذا كان التطبيق المبين تحويلاً خطياً حيث $\mathbf{V}$ هو فضاء المتجهات المكون من جميع الدوال التي مجالها $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عدد غير منته من المرات .

(٤٠) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ حيث $T(f(x))=f'(2)$.

(٤١) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ حيث $T(f(x))=f''(4)+3f'(4)$.

(٤٢) $T : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=f'(0)+3$.

(٤٣) $T : V \to V$ حيث $T(f(x)) = f''(x) + 4 + \int_{-2}^{x} 3f(x)\,dx$.

(٤٤) إذا كان $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ مؤثراً خطياً بحيث أن $T(1,1) = (1,-2)$ و $T(1,0) = (-4,1)$ فعين قاعدة تعريف $T(x,y)$.

(٤٥) إذا كان $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ تحويلاً خطياً بحيث أن $T(2,-1) = (1,-1,1)$ و $T(1,1) = (0,1,0)$ فعين قاعدة تعريف $T(x,y)$.

(٤٦) إذا كان $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ تحويلاً خطياً بحيث أن $T(1,0,1) = (1,-1,3)$ و $T(1,0,1) = (1,-1,3)$ فاحسب كلاً من $T(8,3,2)$ ، $T(1,2,-3)$ و $T(4,-8,12)$. هل بالإمكان حساب $T(3,0,4)$ من المعلومات السابقة ؟ لماذا ؟

(٤٧) إذا كان $T : V \to \mathbf{R}^3$ تحويلاً خطياً وكان $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ حيث $T(\mathbf{v}_1) = (1,-1,2)$ ، $T(\mathbf{v}_2) = (0,3,2)$ و $T(\mathbf{v}_3) = (-3,1,2)$ فاحسب $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$.

(٤٨) إذا كان V فضاء متجهات وكان $0 \neq \mathbf{u} \in V$ فأثبت أن التطبيق $T : V \to V$ المعرف بالقاعدة $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ مؤثر خطي .

(٤٩) إذا كان $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ تحويلاً خطياً بحيث أن :

$T(x-1) = x$ ، $T(x+1) = 0$ و $T(x^2) = x^3$ فاحسب $T(x^2 + x + 1)$ ثم عين $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$.

(٥٠) إذا كان $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{R}$ تحويلاً خطياً بحيث أن :

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad , \quad T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \quad , \quad T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

فاحسب $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(٥١) إذا كان $T : V \to V$ تحويلاً خطياً فاحسب كلاً من $T(\mathbf{v})$ و $T(\mathbf{w})$ إذا علمت أن :

(أ) $T(\mathbf{u}+\mathbf{w})=\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ و $T(2\mathbf{v}-\mathbf{w})=2\mathbf{v}$.

(ب) $T(\mathbf{v}+2\mathbf{w})=3\mathbf{v}-\mathbf{w}$ و $T(\mathbf{v}-\mathbf{w})=2\mathbf{v}-4\mathbf{w}$.

(٥٢) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(3x+2y,5x+4y)$.

(٥٣) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(8x-4y,-4x+7y)$.

(٥٤) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z)=(2x+3z,3y+2z,2x+5y)$.

(٥٥) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z)=(2x-3y+5z,0)$.

(٥٦) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(x+7y,3x-2y,4x+5y)$.

(٥٧) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t)=(x-y,z-t,y+z)$.

(٥٨) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t)=(2x+3y+z,-y+3z-t,3x-5y+t,5x+y+z)$.

(٥٩) لتكن A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ وليكن التحويل $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ المصفوفي المعرف بالقاعدة $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$. إذا كانت B مصفوفة أخرى من الدرجة $m\times n$ حيث $T_A=T_B$ فأثبت أن $A=B$.

(٦٠) إذا كان $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تحويلاً خطياً فأثبت أن $T(x,y)=\alpha x+\beta y$ حيث $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(٦١) ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً .

(أ) إذا كان $\mathbf{U}$ فضاءً جزئياً من $\mathbf{V}$ فأثبت أن $T(\mathbf{U})=\{T(\mathbf{u}):\mathbf{u}\in\mathbf{U}\}$ فضاء جزئي من $\mathbf{W}$.

(ب) إذا كان $\mathbf{U}$ فضاءً جزئياً من $\mathbf{W}$ فاثبت أن $T^{-1}(\mathbf{U}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : T(\mathbf{v}) \in \mathbf{U} \}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٦٢) ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$.

(أ) إذا كانت $\{ T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \}$ مستقلة خطياً فاثبت أن $\{ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ مستقلة خطياً .

(ب) أثبت أن عكس الفقرة (أ) ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً .

(٦٣) ليكن كل من $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ و $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ حيث $T(\mathbf{u}_i) = L(\mathbf{u}_i)$ لكل $1 \le i \le n$
أثبت أن $T = L$.

(٦ ، ٢) نواة و صورة التحويل الخطي

Kernel and Image of Linear Transformation

ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ نعني بالمسألة الخطية العامة هو إيجاد جميع المتجهات $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ التي تحقق المعادلة $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. فإذا كان التحويل الخطي $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ هو التحويل المصفوفي T_A حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن المسألة الخطية هي حل نظام المعادلات الخطية $AX = B$ حيث سبق وأن ناقشنا هذه المسألة في الفصل الثالث . أما إذا كان التحويل الخطي هو تحويل الإشتقاق فإن المسالة الخطية هي عبارة عن معادلات تفاضلية يمكن حلها باستخدام التكامل . وهناك العديد من المسائل الخطية الأخرى التي نتعرض لها في المواضيع المتقدمة من الرياضيات أو في مجالات التطبيقات الرياضية الكثيرة .

لقد قدمنا في الفصل الخامس فضاءات جزئية مرتبطة بمصفوفة A . ومن السهل ايضاً إيجاد الفضاءات الجزئية المقابلة لها للتحويل المصفوفي $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. على وجه الخصوص إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن الفضاء الصفري

و الفضاء العمودي للمصفوفة A هما :

$$N(A)=\{X\in\mathbb{R}^n : AX=0\}$$

$$col(A)=\{AX : X\in\mathbb{R}^n\}$$

وبدلالة التحويل الخطي المصفوفي فإن الفضائين المقابلين هما :

$$\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n : T(\mathbf{u})=\mathbf{0}\}$$

$$\{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n\}$$

وعندما يكون لدينا تحويل خطي عام فإن الفضاء الصفري يسمى نواة (kernel) التحويل والفضاء العمودي يسمى صورة (image) التحويل ، وهذا ما نحن بصدد دراسته في هذا البند .

تعريف (٢ ، ٦)

ليكن $T : \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً . نعرف نواة التحويل T والتي نرمز لها بالرمز $\ker T$ بأنها $\ker T=\{\mathbf{u}\in\mathbf{V} : T(\mathbf{u})=\mathbf{0}\}$. كما نعرف صورة التحويل T والتي نرمز لها بالرمز $\mathrm{Im}T$ بأنها $\mathrm{Im}T=\{T(\mathbf{u})\in\mathbf{W} : \mathbf{u}\in\mathbf{V}\}$.

المبرهنة التالية تبين لنا أن كلاً من $\ker T$ و $\mathrm{Im}T$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ على التوالي .

مبرهنة (٧ ، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن :

(١) $\ker T$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٢) $\mathrm{Im}T$ فضاء جزئي من $\mathbf{W}$.

البرهان

بما أن $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ فإن كلا من $\ker T \neq \Phi$ و $\operatorname{Im}T \neq \Phi$.

(١) لنفرض أن $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \ker T$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ :

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ و $T(\alpha \mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})=\alpha \mathbf{0}=\mathbf{0}$.

ولذا فإن $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \ker T$ وأن $\alpha \mathbf{u} \in \ker T$. ومن ثم فإن $\ker T$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٢) لنفرض أن $\mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im}T$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ يوجد $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ حيث $T(\mathbf{v}_1)=\mathbf{w}_1$ و $T(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}_2$. الآن ، $T(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=T(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$ ولذا فإن $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im}T$. كذلك ، فإن $T(\alpha \mathbf{v}_1)=\alpha T(\mathbf{v}_1)=\alpha \mathbf{w}_1$. ومنه فإن $\alpha \mathbf{w}_1 \in \operatorname{Im}T$. إذن ، $\operatorname{Im}T$ فضاء جزئي من $\mathbf{W}$. ♦

تعريف (٣ ، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإننا نعرف صفرية T (nullity (T)) بأنها بعد kerT ورتبة T بأنها بعد ImT . أي أن :

$$\operatorname{nullity}(T)=\dim(\ker T)$$
$$\operatorname{rank}(T)=\dim(\operatorname{Im}T)$$

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كان $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ هو التحويل المصفوفي T_A حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن $\operatorname{Im}T = \operatorname{col}(A)$. ولذا فإن $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(A)$.

إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن المبرهنة التالية تزودنا بطريقة لحساب أساس للفضاء الجزئي ImT .

مبرهنة (٨ ، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وكان $B=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإن المجموعة $\{T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n)\}$ تولد ImT .

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{w} \in \operatorname{Im}T$. عندئذٍ يوجد $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. ولما كان $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. ولذا فإن :
$\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$. ومن ثم فإن المجموعة $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ تولد $\operatorname{Im}T$. ♦

ملحوظة

لإيجاد أساس للفضاء $\operatorname{Im}T$ فإننا نستخدم المبرهنة (٨ ، ٦) لإيجاد مجموعة مولدة للفضاء $\operatorname{Im}T$ ومن ثم نتبع خوارزمية (١ ، ٤) لإيجاد أساس كجزء من المجموعة المولدة .

مثال (١٥ ، ٦)

عين أساس وبعد كل من صورة و نواة المؤثر الخطي $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T(x, y, z, t) = (x + y, y + z, z + t, t + x)$.

الحل

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in \ker T &\Leftrightarrow T(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow x + y = 0 \\
&\quad\;\; y + z = 0 \\
&\quad\;\; z + t = 0 \\
&\quad\;\; t + z = 0
\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $(x, y, z, t) = \alpha(-1, 1, -1, 1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$. وبالتالي فإن ، $\ker T = \{\alpha\, (-1, 1, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. ولذا فإن أساس $\ker T$ هو :

$\{(-1,1,-1,1)\}$. ومن ثم فإن $\dim \ker T = 1$. للحصول على أساس للفضاء $\mathrm{Im}T$ نستخدم أولاً المبرهنة (٨ ، ٦) لإيجاد مجموعة مولدة وذلك بأخذ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^4$. لدينا :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0,0,0) = (1,0,0,1) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1,0,0) = (1,1,0,0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0,0,1,0) = (0,1,1,0) \\ T(\mathbf{e}_4) &= T(0,0,0,1) = (0,0,1,1) \end{aligned}$$

ولهذا فإن $\{(1,0,0,1),(1,1,0,0,),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$ تولد $\mathrm{Im}T$.

نستخدم الآن الخوارزمية (١ ، ٤) فنحصل على المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام العمليات الصفية الأولية نجد أن الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A هو :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولذا فإن أساس الفضاء $\mathrm{Im}T$ هو $\{(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$. ومن ثم فإن $\dim \mathrm{Im}T = 3$. □

مثال (١٦ ، ٦)

احسب بعد كل من نواة وصورة التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t) = (x-y+2z+3t, y+4z+3t, x+6z+6t)$.

الحل

لاحظ أن :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in\ker T \Leftrightarrow x-y+2z+3t&=0\\ y+4z+3t&=0\\ x\qquad +6z+6t&=0\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نحصل على :

$$\begin{aligned}\ker T&=\{(-6z-6t,-4z-3t,z,t):z,t\in\mathbb{R}\}\\ &=\{(-6,-4,1,0)z+(-6,-3,0,1)t:t,z\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

إذن ، $\{(-6,-4,1,0),(-6,-3,0,1)\}$ أساس للفضاء $\ker T$ ويكون $\dim\ker T=2$. ولإيجاد أساس صورة T نحسب أولاً صور أساس الفضاء $\mathbb{R}^4$ المعتاد فنجد أن :

$$\begin{aligned}T(\mathbf{e}_1)&=(1,0,1)\\ T(\mathbf{e}_2)&=(-1,1,0)\\ T(\mathbf{e}_3)&=(2,4,6)\\ T(\mathbf{e}_4)&=(3,3,6)\end{aligned}$$

ولذا فإن المجموعة $\{(1,0,1),(-1,1,0),(2,4,6),(3,3,6)\}$ تولد $\mathrm{Im}T$.

الآن نستخدم الخوارزمية (١ ، ٤) فنحصل على المصفوفة :

$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&-1&4&3\\1&0&6&6\end{bmatrix}$. الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A هو :

$\begin{bmatrix}1&0&6&6\\0&1&4&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. ولذا فإن أساس $\mathrm{Im}T$ هو $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$. ومن ثم فإن

$\dim \mathrm{Im}T=2$. □

مثال (١٧ ، ٦)

أحسب بعد كل من نواة وصورة المؤثر الخطي $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$T(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$ حيث $A=\begin{bmatrix}1&-2&1&-4\\1&3&7&2\\1&-12&-11&-16\\2&-14&-10&-20\end{bmatrix}$.

الحل

لاحظ أن $X \in \ker T \Leftrightarrow AX = 0$. وباستخدام العمليات الصفية الأولية لحل هذا النظام نجد أن الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A هو :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ومنه فإن

$$x_1 \qquad + \frac{17}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4 = 0$$
$$x_2 \quad + \frac{6}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4 = 0$$

وبوضع $x_3 = 5\alpha$ و $x_4 = 5\beta$ نجـــد أن :

$\ker T = \{(-17,-6,5,0)\alpha + (8,-6,0,5)\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. إذن ،

$\{(-17,-6,5,0), (8,-6,0,5)\}$ أساس للفضاء $\ker T$ ويكون $\dim \ker T = 2$.

ولإيجاد أساس للفضاء $\operatorname{Im} T$ نجد أولاً صور الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^4$ فنحصل على :

$$T(\mathbf{e}_1) = (1,1,1,2)$$
$$T(\mathbf{e}_2) = (-2, 3, -12, -14)$$
$$T(\mathbf{e}_3) = (1,7,-11,-10)$$
$$T(\mathbf{e}_4) = (-4,2,-16,-20)$$

لاحظ أن هذه ما هي إلى أعمدة المصفوفة A ولذا فإننا نستخدم الشكل الدرجي الصفي المختزل للمصفوفة A لنحصل على الأساس

$\{(1,1,1,2), (-2,3,-12,-14)\}$ للفضاء $\operatorname{Im} T$. ولذا فإن $\dim \operatorname{Im} T = 2$. □

مثال (١٨ ، ٦)

عين أساس وبعد كل من $\operatorname{Im} T$ و $\ker T$ للمؤثر الخطي $T : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ المعرف

بالقاعدة : $T\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$

الحل

$$p(x)\in \ker T \Leftrightarrow T(p(x))=a_1+2a_2x+3a_3x^2=0$$
$$\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$$
$$\Leftrightarrow p(x)=a_0$$

إذن ، $\ker T=\{a_0 : a_0\in\mathbb{R}\}$. ولذا فإن أساس هو $\{1\}$. ومن ثم $\dim\ker T=1$.

الآن $\operatorname{Im}T=\{a_1+2a_2x+3a_3x^2 : a_1, a_2, a_3\in\mathbb{R}\}$. ولذا فإن $\{1, 2x, 3x^2\}$ أساس للفضاء $\operatorname{Im}T$. وبالتالي فإن $\dim\operatorname{Im}T=3$. ◻

إذا كان T_A تحويلاً مصفوفياً حيث A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ فلقد وجدنا في مبرهنة البعد للمصفوفات (مبرهنة (٢٨ ، ٤)) أن $\operatorname{nullity}(A)+\operatorname{rank}(A)=n$. المبرهنة التالية هي تعميم لهذه الحقيقة الهامة لأي تحويل خطي والتي تعتبر إحدى أهم المبرهنات في الجبر الخطي .

مبرهنة (٩ ، ٦) (مبرهنة البعد للتحويلات)

إذا كان $T : \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطيا وكان $\dim\mathbf{V}=n$ فإن $\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=n$.

أي أن $\operatorname{nullity}(T)+\operatorname{rank}(T)=n$.

البرهان

لنفرض أن $\dim\ker T=k$ وأن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ أساس للفضاء $\ker T$. باستخدام المبرهنة (٢٠ ، ٤) نستطيع إيجاد متجهات $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ بحيث يكون :

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. ولذا فإنه باستخدام المبرهنة (٨ ، ٦) نجد أن المجموعة $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_k), T(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ تولد الفضاء $\operatorname{Im}T$. وبما أن $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\in\ker T$ فإن :

$T(\mathbf{v}_1)=T(\mathbf{v}_2)=\dots=T(\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}$. ومن ثم فإن $\{T(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ تولد $\operatorname{Im}T$. ولإنهاء البرهان يبقى علينا أن نبرهن على أن هذه المجموعة هي بالفعل

أساس للفضاء $\mathrm{Im}T$. ولهذا الغرض نفرض أن $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\alpha_{k+1}\,T(\mathbf{v}_{k+1})+\dots+\alpha_n T(\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$. ولذا فإن $T(\alpha_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1}+\dots+\alpha_n\,\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$ ومنه فإن $\alpha_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1}+\dots+\alpha_n\,\mathbf{v}_n \in \ker T$. وبما أن $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k\}$ أساس للفضاء $\ker T$ فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$. بحيث يكون

$$\alpha_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1}+\dots+\alpha_n\,\mathbf{v}_n=\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\dots+\alpha_k\,\mathbf{v}_k .$$

ولذا فإن $\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\dots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}+\dots+(-\alpha_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. ومن ثم فإن $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0$. إذن ، $\{T(\mathbf{v}_{k+1}),\dots,T(\mathbf{v}_n)\}$ أساس للفضاء $\mathrm{Im}T$. وبالتالي فإن $\dim \mathrm{Im}T=n-k$. ونخلص إلى أن :

$$\dim \ker T+\dim \mathrm{Im}T=k+(n-k)=n \;. \quad \blacklozenge$$

لاشك بأن القارىء على دراية بمفهومي الدالة الأحادية والدالة الشاملة ونقدمهما هنا للتذكير .

تعريف (٤ ، ٦)

ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً .

(١) نقول إن T تحويل أحادي أو متباين (one – to – one) إذا تحقق لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ما يلي : $T(\mathbf{u})=T(\mathbf{v})\Rightarrow \mathbf{u}=\mathbf{v}$.

(٢) نقول إن T تحويل شامل أو (onto) إذا كان $\mathrm{Im}T=\mathbf{W}$.

المبرهنة التالية تزودنا بالعلاقة الحميمة بين التحويلات الخطية الأحادية ونواة التحويل الخطي .

مبرهنة (١٠ ، ٦)

ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً . عندئذ يكون T أحادياً إذا وفقط إذا كان $\ker T=\{\mathbf{0}\}$.

البرهان

لنفرض أولاً أن T أحادي . وليكن $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} T$. الآن ،

$\mathbf{v} \in \ker T \Rightarrow T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$ وبما أن T أحادي فإن $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

ولبرهان العكس نفرض أن $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ بحيث أن $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. عندئذٍ :

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker T \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

ولذا فإن T أحادي . ♦

مثال (١٩ ، ٦)

ليكن $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

$T(x, y) = (x + y, x, 2x - y)$. أثبت أن T أحادي .

الحل

$$(x, y) \in \ker T \Leftrightarrow x + y = 0, x = 0, 2x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

إذن ، $\ker T = \{(0,0)\}$. ولذا فإن T أحادي . □

مثال (٢٠ ، ٦)

ليكن $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

أثبت أن T ليس أحادياً .

الحل

$$(x,y,z)\in \ker T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2x \quad\quad + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $\ker T=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)t : t\in \mathbf{R}\right\}\neq\{\mathbf{0}\}$. ولذا فإن T ليس أحادياً . □

مثال (٢١ ، ٦)

ليكن $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{M}_{22}$ هو التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

$$T\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\begin{bmatrix} a_1 & a_1-a_0 \\ a_1+a_0 & 2a_1-a_2 \end{bmatrix}$$

أثبت أن T أحادي .

الحل

$$a_0+a_1x+a_2x^2\in \ker T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_1-a_0 \\ a_1+a_0 & 2a_1-a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_1-a_0 &= 0 \\ a_1+a_0 &= 0 \\ 2a_1-a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_0=a_1=a_2=0$$

ولذا فإن $\ker T=\{\mathbf{0}\}$. وبالتالي فإن T أحادي . □

مثال (٢٢ ، ٦)

ليكن $T : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n-1}$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة $T\left(p\left(x\right)\right) = p'\left(x\right)$.

احسب $\ker T$ ثم بين أن T شامل .

الحل

$p\left(x\right) \in \ker T \Leftrightarrow p'\left(x\right) = 0$. ولذا فإن $p\left(x\right) = a_0$ حيث $a_0 \in \mathbb{R}$.

اذن $\ker T = \left\{ a_0 \right\}$. ومنه فإن $\dim \ker T = 1$. وباستخدام مبرهنة البعد نجد أن $\dim \operatorname{Im} T = \left(n+1\right) - 1 = n = \dim \mathbf{P}_{n-1}$. ولذا فإن $\operatorname{Im} T = \mathbf{P}_{n-1}$. ومن ثم فإن T شامل . □

سننهي هذا البند بالنتيجة الهامة التالية لمبرهنة البعد .

نتيجة (١١ ، ٦)

ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً حيث $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$ عندئذ T تحويل شامل إذا وفقط إذا كان T تحويلاً أحادياً .

البرهان

باستخدام مبرهنة البعد لدينا $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n$. الآن إذا كان T شاملاً فإن $\operatorname{Im} T = \mathbf{W}$ ولذا فإن $\dim \ker T = n - \dim \operatorname{Im} T = n - n = 0$ ومنه فإن $\ker T = \left\{ \mathbf{0} \right\}$ ومن ثم فإن T أحادي .

ولبرهان العكس نفرض أن T أحادي . عندئذٍ $\dim \ker T = 0$. ولذا فإن $\dim \operatorname{Im} T = n = \dim \mathbf{W}$. إذن ، $\operatorname{Im} T = \mathbf{W}$. وبالتالي فإن T شامل . ♦

تمارين (٢ ، ٦)

في التمارين من (١) إلى (٢٢) عين نواة وصورة التحويل الخطي T وأحسب كلاً من $\operatorname{rank}(T)$ و $\operatorname{nullity}(T)$ وتحقق من مبرهنة البعد .

(١) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 - 3x_3, x_3 + 4x_4) .$$

(٢) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) .$$

(٣) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x + y, x + y, 0)$.

(٤) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x, x, y, y)$.

(٥) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (3x + y - z, x + 2y + z)$.

(٦) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 .$$

(٧) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x + y, x - y + z, y + 2z)$

(٨) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4, x_1 + 3x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4)$$

(٩) $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

(١٠) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

(١١) $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(١٢) $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ التحويل المصفوفي حيث :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & -1 & 15 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & -14 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 20 \end{bmatrix}.$$

(١٣) $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

(١٤) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$$T\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\begin{bmatrix} a_1 & a_1-a_0 \\ a_1+a_0 & 2a_1-a_2 \end{bmatrix}.$$

(١٥) $T : \mathbf{M}_{23} \to \mathbf{P}_2$ المعرف بالقاعدة :

$$T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\left(a_{11}+a_{13}\right)x^2+\left(a_{21}-a_{22}\right)x+a_{23}.$$

(١٦) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=XA$ حيث $X=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(١٧) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=AX-XA$ حيث

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(١٨) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b+2c+d & -a+2c+2d \\ a-2b+5c+4d & 2a-b+c-d \end{bmatrix}.$$

(١٩) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ المعرف بالقاعدة : $T(p(x))=x^2p'(x)$.

(٢٠) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة: $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a,b)$.

(٢١) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة : $T(p(x))=(p(0),p(1))$.

(٢٢) $T : \mathbf{P}_n \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة : $T\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) = a_n$.

(٢٣) بين أياً من التحويلات في التمارين من (١) إلى (٢٢) أحادي وأيها شامل .

(٢٤) نقول إن للتحويل الخطي معكوساً إذا كان شاملاً وأحادياً . بين أياً من التحويلات في التمارين من (١) إلى (٢٢) له معكوس .

(٢٥) إذا كان $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :
$T(x, y, z, t) = (x - z + 2t, -2x + y + 2z, y + 4t)$. فما هي قيم k التي تجعل المتجه $(1, 3, k) \in \operatorname{Im} T$ ؟ كذلك عين الشروط التي تجعل $(1, x, 1, y) \in \ker T$.

(٢٦) عين تحويلاً خطياً $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بحيث تكون صورته مولدة بالمتجهين $(4, 5, 6)$ و $(1, 2, 3)$.

(٢٧) عين تحويلاً خطياً $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ بحيث تكون نواته مولدة بالمتجهين $(0, 1, 1, 1)$ و $(1, 2, 3, 4)$.

(٢٨) إذا كانت B مصفوفة مربعة من الدرجة m ولها معكوس فأثبت أن التحويل الخطي $T : \mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{mn}$ المعرف بالقاعدة $T(A) = BA$ لكل $A \in \mathbf{M}_{mn}$ شامل وأحادي .

(٢٩) ليكن $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ التحويل المصفوفي حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$. أثبت أن :

(أ) T_A شامل إذا وفقط إذا كان $\operatorname{rank}(A) = m$.

(ب) T_A أحادي إذا وفقط إذا كان $\operatorname{rank}(A) = n$.

(٣٠) استخدم مبرهنة البعد للتحويلات لإثبات أن $\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^{\perp} = \dim \mathbf{V}$. حيث $\mathbf{W}$ فضاء جزئي من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ المنتهي البعد .

(٣١) استخدم مبرهنة البعد لإثبات أن $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A^T A\right) = \operatorname{rank}\left(A A^T\right)$ لكل مصفوفة A من الدرجة $m \times n$.

(٣٢) إذا كان $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مؤثراً خطياً فأثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) T أحـــادي (ب) T شامل (جـ) T له معكوس (د) $\det A \neq 0$.

(٣٣) ليكن $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تحويلاً خطياً . أثبت أن

(أ) $\dim(\operatorname{Im}T) \leq n$. (ب) إذا كان $n < m$ فإن T لا يمكن أن يكون شاملاً .

(جـ) إذا كان $n > m$ فإن T لا يمكن أن يكون أحادياً .

(٣٤) ليكن كل من $F:\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ و $L:\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ تحويلاً خطياً .وليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{R}^2$ التطبيق المعرف بالقاعدة $T(\mathbf{v})=(L(\mathbf{v}),F(\mathbf{v}))$ لكـــل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$

(أ) أثبت أن T تحويل خطي .

(ب) أثبت أن $\ker T = \ker L \cap \ker F$.

(٣٥) إذا كان $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فأثبت أن جميع العبارات التالية متكافئة :

(أ) $\ker T = \mathbf{V}$ (ب) $\operatorname{Im}T = \mathbf{0}$ (جـ) $T = 0$.

(٣٦) ليكن $\mathbf{V}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} : a+c=b+d\right\}$.

(أ) ليكن $T:\mathbf{M}_{22}\to\mathbb{R}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=a+c-b-d$.

أثبت أن T تحويل خطي شامل وأن $\ker T = \mathbf{V}$. استنتج أن $\mathbf{V}$ فضاء جزئي من $\mathbf{M}_{22}$ وأن $\dim\mathbf{V}=3$.

(ب) أثبت أن التطبيق $S:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $S\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=a+c$ تحويل خطي شامل . أحسب $\dim(\ker S)$.

(٣٧) لتكن B مصفوفة مربعة من الدرجة n . وليكن $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{mn} : AB=0\}$ فضاءً جزئياً من فضاء المتجهات $\mathbf{V}=\{AB : A\in\mathbf{M}_{mn}\}$.

أثبت أن $\dim\mathbf{W}+\dim\mathbf{V}=m\,n$.

(٣٨) ليكن $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbf{M}_{nn}$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

. $T(A)=A-A^{T}$

(أ) أثبت أن $\ker T$ تتكون من جميع المصفوفات المتماثلة .

(ب) أثبت أن $\mathrm{Im}T$ يتكون من جميع المصفوفات المتماثلة تخالفياً .

(٣ ، ٦) جبر التحويلات الخطية

Algebra of Linear Transformations

في هذا البند سنعرف عمليات على التحويلات الخطية ونبين أن هذه العمليات تحقق الخواص نفسها التي تحققها العمليات على المصفوفات . كذلك ندرس التماثل بين فضاءات المتجهات ، وسنبين أيضاً أن مجموعة التحويلات الخطية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ إلى فضاء متجهات $\mathbf{W}$ هي عبارة عن فضاء متجهات بحد ذاتها وهذا الفضاء له أهمية خاصة في الجبر الخطي.

تعريف (٥ ، ٦)

ليكن كل من S و T تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ إلى فضاء المتجهات $\mathbf{W}$. وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

(١) يعرف المجموع $S+T$ بأنه الدالة :

$(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٢) يعرف الفرق $S-T$ بأنه الدالة :

$(S-T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})-T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٣) يعرف الضرب بعدد αS حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ بأنه الدالة :

$(\alpha S)(\mathbf{v})=\alpha S(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

مثال (٢٣ ، ٦)

إذا كان $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ و $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ هما التحويلان الخطيان المعرفان بالقاعدتين :

$$S(x,y,z)=(x+y,x-y)$$
$$T(x,y,z)=(x+y-z,3y+z)$$

فاحسب كلاً من $S+T$ ، $S-T$ و $3T$.

الحل

$$\begin{aligned}(S+T)(x,y,z) &= S(x,y,z)+T(x,y,z)\\ &=(x+y,x-y)+(x+y-z,3y+z)\\ &=(2x+2y-z,x+2y+z)\end{aligned}$$

وبالمثل $(S-T)(x,y,z)=(z,x-4y-z)$. كذلك

$(3T)(x,y,z)=3(x+y-z,3y+z)=(3x+3y-3z,9y+3z)$.□

من السهل التحقق من أن كلاً من $S+T$ ، $S-T$ ، $3T$ في المثال السابق هو بالفعل تحويل خطي ، ولدينا بصورة عامة :

مبرهنة (١٢ ، ٦)

إذا كان كل من $S: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ و $T: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن كلاً من $S+T$، $S-T$ و βS تحويل خطي حيث $\beta \in \mathbb{R}$.

البرهان

سنبرهن أن $S+T$ تحويل خطي ونترك الباقي كتمرين للقارئ . لنفرض إذن أن $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ :

$$(S+T)(\mathbf{u}+\mathbf{v})=S(\mathbf{u}+\mathbf{v})+T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \qquad (١)$$

$$=S(\mathbf{u})+S(\mathbf{v})+T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$
$$=[S(\mathbf{u})+T(\mathbf{u})]+[S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})]$$
$$=(S+T)(\mathbf{u})+(S+T)(\mathbf{v})$$

(٢) $$(S+T)(\alpha\mathbf{u})S=S(\alpha\mathbf{u})+T(\alpha\mathbf{u})$$
$$=\alpha S(\mathbf{u})+\alpha T(\mathbf{u})$$
$$=\alpha(S(\mathbf{u})+T(\mathbf{u}))$$
$$=\alpha(S+T)(\mathbf{u})$$

إذن ، $S+T$ تحويل خطي . ♦

تعريف (٦ ، ٦)

إذا كان كل من $S:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ و $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن التركيب (composition) $ToS:\mathbf{U}\to\mathbf{W}$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة :

$(ToS)(\mathbf{u})=T(S(\mathbf{u}))$ لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$.

مبرهنة (١٣ ، ٦)

إذا كان كل من $S:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ و $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فإن $ToS:\mathbf{U}\to\mathbf{W}$ تحويل خطي .

البرهان

لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{U}$ ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا :

(١) $$(ToS)(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(S(\mathbf{u}+\mathbf{v}))=T(S(\mathbf{u})+S(\mathbf{v}))$$
$$=T(S(\mathbf{u}))+T(S(\mathbf{v}))=(ToS)(\mathbf{u})+(ToS)(\mathbf{v})$$

(٢) $$(ToS)(\alpha\mathbf{u})=T(S(\alpha\mathbf{u}))=T(\alpha S(\mathbf{u}))$$
$$=\alpha T(S(\mathbf{u}))=\alpha(ToS)(\mathbf{u})$$

ولذا فإن ToS تحويل خطي . ♦

المبرهنة التالية تزودنا بخواص التحويلات الخطية المرادفة لخواص المصفوفات .

مبرهنة (١٤ ، ٦)

لنكن T ، L و S تحويلات خطية وليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ولنفرض أن جميع التحويلات المبينة معرفة . عندئذٍ :

(١) $S+(T+L)=(S+T)+L$. (٢) $S+T=T+S$.

(٣) $S+0=S$. (٤) $S+(-S)=0$.

(٥) $\alpha(S+T)=\alpha S+\alpha T$. (٦) $(\alpha\beta)S=\alpha S+\beta S$.

(٧) $(\alpha\beta)S=\alpha(\beta S)$. (٨) $1S=S$.

(٩) $So(ToL)=(SoT)oL$. (١٠) $SoI=IoS=S$.

(١١) $So(T+L)=(SoT)+(SoL)$.

(١٢) $(S+T)oL=(SoL)+(ToL)$.

(١٣) $So0=0oS=0$. (١٤) $\alpha(SoT)=(\alpha S)oT$.

(١٥) $IoS=SoI=S$.

البرهان

سنبرهن الفقرات (٢) ، (٧) ، (٩) و (١١) ونترك باقي الفقرات للقارئ .

لنفرض أن $\mathbf{v}$ أي متجه من $\mathbf{V}$. عندئذٍ ،

(٢) $(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v})+S(\mathbf{v})=(T+S)(\mathbf{v})$

إذن ، $S+T=T+S$.

(٧) $[(\alpha\beta)S](\mathbf{v})=(\alpha\beta)(S(\mathbf{v}))=\alpha(\beta S(\mathbf{v}))=[\alpha(\beta S)](\mathbf{v})$.

ولذا فإن ، $(\alpha\beta)S=\alpha(\beta S)$.

(٩)
$$[So(ToL)](\mathbf{v})=S((ToL)(\mathbf{v}))=S((T(L(\mathbf{v}))))$$
$$=(SoT)(L(\mathbf{v}))=[(SoT)oL](\mathbf{v})$$

إذن ، $So(ToL)=(SoT)oL$.

$$[So(T+L)](v)=S((T+L)(v))=S(T(v)+L(v)) \qquad (١١)$$
$$=S(T(v))+S(L(v))=(SoL)(v)+(SoL)(v)$$

إذن ، $So(T+L)=SoT+SoL$. ♦

لنفرض أن $L(V,W)$ هي مجموعة جميع التحويلات الخطية من فضاء المتجهات V إلى فضاء المتجهات W . أي أن :

$L(V,W)=\{T:W$ إلى V تحويل خطي من $T\}$. إذا كان $S,T\in L(V,W)$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنه باستخدام المبرهنة (١٢ ، ٦) نجد أن : $S+T,\alpha T\in L(V,W)$. ولذا فإن $L(V,W)$ مغلق بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد . وباستخدام الفقرات من (١) إلى (٨) من المبرهنة (١٤ ، ٦) نجد أن $L(V,W)$ هو بالفعل فضاء متجهات بالنسبة لهاتين العمليتين . يسمى هذا الفضاء فضاء متجهات التحويلات الخطية (vector space of linear transformation) . سنبرهن في البند القادم من هذا الفصل أنه إذا كان $\dim V=n$ و $\dim W=m$ فإن الفضاء $L(V,W)$ يماثل الفضاء M_{mn} . وهو المفهوم الذي يقدمه لنا التعريف التالي .

تعريف (٧ ، ٦)

نقول إن التحويل الخطي $T:V\to W$ تماثل (isomorphism) إذا كان T أحادياً وشاملاً . ونقول إن فضائي المتجهات V و W متماثلان (isomorphic) ونرمز لذلك بالرمز $V\cong W$ إذا وجد تماثل $T:V\to W$.

ملحوظة

إن كلمة (isomorphism) مشتقة من كلمتين لاتينيتين هما iso وتعني نفس و

morphos وتعني شكل. ولذا فإن التماثل يعني الشكل نفسه . وبعبارة أخرى فإن فضائي المتجهات المتماثلان يمكن النظر إليهما على أنهما فضاءً واحداً ولكن برموز مختلفة .

مثال (٢٤ ، ٦)

التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$T(x,y,z)=(x+y,y+z,z+x)$ تماثل .

الحل

سنبرهن على أن T أحادي وشامل . الآن :

$$(x,y,z)\in \ker T \Leftrightarrow x+y=0,\ y+z=0, x+z=0$$

وبحل هذا النظام نجد أن $x=y=z=0$ ولذا فإن $\ker T=\{\mathbf{0}\}$. ومن ثم فإن T أحادي وباستخدام مبرهنة البعد لدينا $\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=3=\dim \mathbb{R}^3$. وبما أن $\dim \ker T=0$ فإننا نجد أن $\dim(\operatorname{Im}T)=\dim \mathbb{R}^3=3$. ولذا فإن $\operatorname{Im}T=\mathbb{R}^3$ وبالتالي فإن T شامل . ومن ثم فإن ، T تماثل . □

مثال (٢٥ ، ٦)

إذا كانت B مصفوفة من الدرجة 2 ولها معكوس فإن التحويل الخطي $T:\mathbf{M}_{23}\to \mathbf{M}_{23}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=BA$ تماثل .

الحل

لاحظ أن :

$$A\in \ker T \Leftrightarrow T(A)=BA=0 \Leftrightarrow B^{-1}(BA)=B^{-1}0 \Leftrightarrow IA=A=0$$

ولذا فإن T أحادي . ولإثبات أن T شامل نفرض أن $C\in \mathbf{M}_{23}$. عندئذٍ ، $B^{-1}C\in \mathbf{M}_{23}$. كما أن $T(B^{-1}C)=B(B^{-1}C)=B$. ولذا فإن T شامل . وبالتالي فإن T تماثل . □

ولذا فإن T أحادي . ولإثبات أن T شامل نفرض أن $C \in \mathbf{M}_{23}$. عندئذٍ ، $B^{-1} C \in \mathbf{M}_{23}$.
كما أن $T\left(B^{-1}C\right)=B\left(B^{-1} C\right)=B$. ولذا فإن T شامل . وبالتالي فإن T تماثل . □

المبرهنة التالية هي الأهم في هذا البند حيث تبين لنا أن التماثل يحافظ على الأساسات.

مبرهنة (١٥ ، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً حيث كل من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ منتهي البعد فإن العبارتين التاليتين متكافئتان :

(١) T تماثل .

(٢) إذا كانت $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإن $\{ T (\mathbf{v}_1), T (\mathbf{v}_2),\dots, T (\mathbf{v}_n)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{W}$.

البرهان

(١) $\Leftarrow$ (٢) : لنفرض أن T تماثل وأن $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n \}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$.
ولنفرض أن $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\alpha_1 T (\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_n T (\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$.
عندئذٍ $T (\alpha_1\mathbf{v}_1 +\cdots+ \alpha_n \mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$. ولذا فإن $\alpha_1\mathbf{v}_1 +\cdots+ \alpha_n \mathbf{v}_n \in \ker T$ وبما أن T أحادي فإن $\ker T = \{ \mathbf{0} \}$. ولذا فإن $\alpha_1\mathbf{v}_1 +\cdots+ \alpha_n \mathbf{v}_n =\mathbf{0}$ وبما أن $\{ \mathbf{v}_1 ,\dots, \mathbf{v}_n \}$ مستقلة خطياً فإن $\alpha_1 = \alpha_2 =\cdots= \alpha_n = 0$. إذن ، $\{ T (\mathbf{v}_1),\dots, T (\mathbf{v}_n)\}$ مستقلة خطياً . وللبرهان على أنها تولد $\mathbf{W}$ نفرض أن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. بما أن T شامل فإنه يوجد $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ حيث $T (\mathbf{v})=\mathbf{w}$. ولذا فإنه يوجد $\beta_1 , \beta_2 , \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbf{v}=\beta_1 \mathbf{v}_1 +\beta_2 \mathbf{v}_2 +\cdots+\beta_n \mathbf{v}_n$ ، عندئذٍ

$$\mathbf{w}=T(\mathbf{v})=T (\beta_1\mathbf{v}_1 +\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n)=\beta_1T (\mathbf{v}_1)+\cdots+\beta_nT (\mathbf{v}_n) .$$

ومن ثم فإن $\{ T (\mathbf{v}_1),\dots, T (\mathbf{v}_n)\}$ تولد $\mathbf{W}$ وبالتالي فهي أساس للفضاء $\mathbf{W}$.

(٢) $\Leftarrow$ (١) : لنفرض أولاً أن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ حيث $\mathbf{v} \in \ker T$ عندئذٍ ، $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. ولكن
$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. لذا فإن :
$\mathbf{0} = T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$.
إذن ، $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ومن ثم فإن $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. وبالتالي T أحـــــادي .
وللبرهان على أن T شامل نفرض أن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. عندئذٍ ،
$\mathbf{w} = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$ حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. ولذا فإن :
$\mathbf{w} = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n)$. وبوضـع $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ نجد أن
$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. ومن ثم فإن ، T شامل . وبالتالي فهو تماثل . □

نتيجة (١٦ ، ٦)

ليكن كل من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ فضاء متجهات منتهي البعد . عندئذٍ ، $\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$ إذا وفقط إذا كان
$\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تماثل . إذا كانت $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإنه باستخدام المبرهنة (١٥ ، ٦) نجد أن $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{W}$.
ومن ثم فإن $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$. ولبرهان العكس نفرض أن $n = \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$
ولـنفرض أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أســاس للفضـــاء $\mathbf{V}$. وأن $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ أســاس للفضـاء $\mathbf{W}$. باستخدام المبرهنة (٦ ، ٦) يوجد تحويل خطـي وحيد $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ لكل $1 \le i \le n$. إذن ، $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{W}$. ولذا فإن T تماثل وذلك باستخدام المبرهنة (١٥ ، ٦) . ♦

مثال (٢٦ ، ٦)

ليكن $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. عين تماثلاً $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{W}$ حيث

الحل

لنفرض أن $\{1, x, x^2\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{P}_2$. لإيجاد التماثل المطلوب نجد أولاً أساس للفضاء $\mathbf{W}$ يحتوي $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ولكن من السهل أن نرى أن $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ مجموعة مستقلة خطياً . وبما أن $\dim \mathbf{W} = 3$ (لماذا ؟) فإنها تكون أساساً للفضاء $\mathbf{W}$. ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{W}$ هو التطبيق المعرف كالتالي : $T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. عندئذٍ ،

$$T(a + bx + cx^2) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2)$$
$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+c \end{bmatrix}$$

وهذا هو التماثل المنشود . □

المبرهنة التالية تضمن لنا وجود معكوس لتحويلات التماثل .

مبرهنة (١٧ ، ٦)

ليكن كل من $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ فضاء متجهات منتهي البعد وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً. عندئذٍ ، العبارتان التاليتان متكافئتان :

(١) T تماثل .

(٢) يوجد تحويل خطي وحيد $S : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ بحيث يكون $SoT = 1_V$ و $ToS = I_W$.

البرهان

(١) $\Leftarrow$ (٢) : لنفرض أن T تماثل وأن $\{ v_1 , v_2 ,\dots, v_n \}$ أساس للفضاء V . عندئذٍ ، باستخدام المبرهنة (١٥ ، ٦) نجد أن $\{ T (v_1), T (v_2),\dots, T (v_n)\}$ أساس للفضاء W . الآن نعرف التحويل الخطي $S: W \to V$ كالتالي :

$S (T (v_i))= v_i$ لكل $1\le i\le n$.

سنبرهن الآن على أن $(SoT)(v)= v$ لكل $v\in V$. بما أن $v\in V$ إنه يوجد $\alpha_1 , \alpha_2 ,\dots, \alpha_n \in R$ حيث $v =\alpha_1 v_1 +\dots+\alpha_n v_n$. ولذا فإن :

$$SoT (v)= S (T (v))= S (\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T (v_n))$$
$$=\alpha_1 S(T (v_1))+\dots+\alpha_n S(T (v_n)) =\alpha_1 v_1 +\dots+\alpha_n v_n = v$$

وبالتالي فإن ، $SoT = I_V$. وبالمثل يمكن البرهان على أن $ToS = I_W$. وللبرهان على وحدانية S نفرض أن $S_1 : W \to V$ حيث $S_1 o T = I_V$ و $T o S_1 = I_W$. عندئذٍ ، لكل $w \in W$ لدينا :

$$S_1 (w)= S_1 (T (S (w)))=(S_1 o T)(S (w))= S (w) .$$

ولذا فإن $S_1 = S$.

(١) $\Rightarrow$ (٢) : لنفرض أن الشرط محقق . الآن لكل $u , v\in V$ لدينا :

$$T (v)= T (u)\Rightarrow S (T (v))= S (T (u)) \Rightarrow v = u .$$

إذن ، T أحادي . ولإثبات أن T شامل نفرض أن $w \in W$. بما أن $ToS = I_W$ فإن $T (S (w))= w$. ومن ثم فإن T شامل . وبالتالي فإن T تماثل . ♦

ملحوظات

(١) يسمى التحويل S في المبرهنة (١٧ ، ٦) معكوس التحويل T ونرمز له بالرمز T^{-1} . ولذا فإن $T^{-1} o T = I_V$ وأن $T^{-1} o T = I_W$.

(٢) لاحظ أيضاً أن $(T^{-1})^{-1} = T$.

(٣) إذا كان لكل من $T : V \to W$ و $S : W \to U$ معكوس فإنه يوجد معكوس للتحويل $SoT : V \to U$ كما أن $(SoT)^{-1} = T^{-1} o S^{-1}$.

(٤) لاحظ أن $\mathrm{T}(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ إذا وفقط إذا كان $\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w})=\mathbf{v}$.

النتيجة التالية تبين لنا أن علاقة التماثل هي علاقة تكافؤ على مجموعة جميع فضاءات المتجهات والتي نترك التحقق منها للقارئ .

نتيجة (١٨ ، ٦)

إذا كان من $\mathbf{V}$ ، $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء متجهات فإن :

(١) $\mathbf{V} \cong \mathbf{V}$.

(٢) إذا كان $\mathbf{V} \cong \mathbf{U}$ فإن $\mathbf{U} \cong \mathbf{V}$.

(٣) إذا كان $\mathbf{V} \cong \mathbf{U}$ و $\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$ فإن $\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$. ♦

المبرهنة التالية تقدم لنا بعض العلاقات الأساسية بين تحويلات المصفوفات والمصفوفات والتي سنستخدمها لاحقاً .

مبرهنة (١٩ ، ٦)

لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n . عندئذٍ :

(١) $T_A = T_B$ إذا وفقط إذا كان $A = B$.

(٢) $T_{I_n}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(٣) $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

(٤) يوجد معكوس للتحويل T_A إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس . وفي هذه الحالة $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.

البرهان

(١) لنفرض أن $T_A = T_B$. ولنفرض أن $\{ \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \ldots , \mathbf{e}_n \}$ هو الأساس المعتاد لنفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذٍ فإن ، $T_A(\mathbf{e}_i) = T_B(\mathbf{e}_i)$ لكل $1 \le i \le n$. ومنه فإن $A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i$ لكل $1 \le i \le n$. إذن ، $A = B$. وأما العكس فهو واضح .

(٢) $T_{I_n}(\mathbf{v}) = I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(٣) $T_A(T_B(\mathbf{v})) = T_A(B\mathbf{v}) = A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = T_{AB}(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

إذن ، $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

(٤) لنفرض أولاً أن $(T_A)^{-1}$ موجود . عندئذٍ ، $(T_A)^{-1} = T_B$ حيث B مصفوفة من الدرجة n . ولذا فإن $T_{AB} = T_A \circ T_B = T_A \circ T_A^{-1} = T_{I_n}$. ومنه فإن $AB = I_n$.

ولبرهان العكس نفرض أن A^{-1} موجود . ومنه فإن $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_{I_n}$ وأن $T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_{I_n}$ إذن ، $T_{A^{-1}}$ هو معكوس T_A . □

تمارين (٣ ، ٦)

في التمارين من (١) إلى (١٠) أثبت أن التطبيق المعطى تحويل خطي وبين أياً منها تماثلاً ثم عين معكوس التماثل منها .

(١) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y) = (y,x)$.

(٢) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y) = (0, 2x+3y)$.

(٣) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y) = (x-y, y-x, 2x-2y)$.

(٤) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$.

(٥) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$.

(٦) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t) = (x,-y,-z,-t)$.

(٧) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t) = (x,0,z,0)$.

(٨) $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$T(x,y,z,t)=(x+y,y+z,z+t,t+x)$.

(٩) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$.T(x,y,z)=(3x+y,-2x-4y+3z,5x+4y-2z)$

(١٠) $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$.T(x,y,z,t)=(-y,x-y,z,-t)$

(١١) ليكن $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ هو التحويل المصفوفي . بين فيما إذا كان T_A تماثلاً أم لا وإذا كان تماثل فعين قاعدة تعريف T_A^{-1} حيث :

(أ) $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $A=\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

(١٢) أعد التمرين (١١) للتحويل $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ حيث :

(أ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 10 \\ -2 & -7 & -5 \end{bmatrix}$ (جـ) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

لكل من التحويلات الخطية في التمارين من (١٣) إلى (٢٠) عين $\ker T$ وبين فيما إذا كان T تماثلاً .

(١٣) $T : \mathbf{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(p(x))=(p(0),p(1))$.

(١٤) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=(a+b,d,c,a-b)$.

(١٥) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c-a & 3d-b \end{bmatrix}$.

(١٦) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(a+bx+cx^2)=(a-c,2b,a+c)$.

(١٧) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(p(x))=(p(0),p(1),P(-1))$.

(١٨) $T : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ المعرف بالقاعدة $T(p(x))=P(x-3)$.

(١٩) $T : \mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{mn}$ المعرف بالقاعدة $T(A)=BAC$ حيث لكل من المصفوفتين B و C معكوساً .

(٢٠) $T : \mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{nm}$ المعرف بالقاعدة $T(A) = A^T$.

(٢١) ليكن كل من $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ و $S : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ تحويلاً خطياً . أثبت أن

(أ) $\ker T \subseteq \ker SoT$. (ب) $\mathrm{Im}SoT \subseteq \mathrm{Im}S$.

(جـ) إذا كان SoT أحادياً فإن T أحادي كما أن $\dim \mathbf{V} \le \dim \mathbf{W}$.

(د) إذا كان SoT شاملاً فإن S شامل كما أن $\dim \mathbf{V} \le \dim \mathbf{W}$.

(٢٢) ليكن كل من $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ و $S : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ تحويلاً خطياً . إذا كان $SoT = I$ وكان $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$ فأثبت أن $S = T^{-1}$.

(٢٣) ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ تحويلاً خطياً حيث $ToT = 0$.

(أ) إذا كان $\mathbf{V} \ne \mathbf{0}$ فأثبت أن T ليس له معكوس .

(ب) إذا كان $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $S(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + T(\mathbf{v})$ فأثبت أن S تحويل خطي له معكوس .

(٢٤) ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً حيث $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$. أثبت أن T شامل إذا وفقط إذا كان T أحادياً .

(٢٥) ليكن $T : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $T(p(x)) = p(x) + x\,p'(x)$

(أ) أثبت أن T تحويل خطي .

(ب) أثبت أن $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ ومن ثم فإن T تماثل .

(٤ ، ٦) مصفوفة التحويل الخطي

Matrix of Linear Transformation

لقد رأينا في البند (١ ، ٦) أنه إذا كان $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تحويلاً خطياً فإنه توجد مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ بحيث يكون $T = T_A$. وعلاوة على ذلك فإن أعمدة المصفوفة A هي $\{T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)\}$ حيث $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{R}^n$. وبصورة عامة إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وكان $\dim \mathbf{V} = n$ و

$\dim \mathbf{W} = m$ فإننا نود أن نجد مصفوفة من الدرجة $m \times n$ بحيث يكون $T = T_A$.

الفكرة الأساسية لإيجاد المصفوفة A تكمن في تحويل متجهات الفضائين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ إلى متجهات في $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ على التوالي . وهذا ليس بالأمر العسير لأننا نستطيع أن نستبدل كل متجه من متجهات $\mathbf{V}$ (أو $\mathbf{W}$) بالمتجه الأحداثي المقابل له بالنسبة إلى أساس معين . ولذا فإنه إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وكان $B = \{ \mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ و $C = \{ \mathbf{w}_1 , \ldots , \mathbf{w}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{W}$. وكان $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. فإن $\mathbf{v} = \alpha_n \mathbf{v}_n + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. ولذا فإن $T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$. وبما أن $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in \mathbf{W}$ فإن :

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}_1) &= \beta_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{1m}\mathbf{w}_m \\
T(\mathbf{v}_2) &= \beta_{21}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{2m}\mathbf{w}_m \\
&\vdots \\
T(\mathbf{v}_n) &= \beta_{n1}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{nm}\mathbf{w}_m
\end{aligned}$$

ولذا فإن :

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= \alpha_1 (\beta_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{1m}\mathbf{w}_m) + \alpha_2 (\beta_{21}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{2m}\mathbf{w}_m) \\
&\quad + \cdots + \alpha_n (\beta_{n1}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{nm}\mathbf{w}_m) \\
&= (\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \cdots + \alpha_n\beta_{n1})\mathbf{w}_1 + (\alpha_1\beta_{12} + \alpha_2\beta_{22} + \cdots + \alpha_n\beta_{n2})\mathbf{w}_2 \\
&\quad + \cdots + (\alpha_1\beta_{1m} + \alpha_2\beta_{2m} + \cdots + \alpha_n\beta_{nm})\mathbf{w}_m
\end{aligned}$$

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}
[T(\mathbf{v})]_C &= \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \cdots + \alpha_n\beta_{n1} \\ \alpha_1\beta_{12} + \alpha_2\beta_{22} + \cdots + \alpha_n\beta_{n2} \\ \vdots \\ \alpha\beta_{1m} + \alpha_2\beta_{2m} + \cdots + \alpha_n\beta_{nm} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \ldots \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \ldots \beta_{n2} \\ & \vdots \\ \beta_{1m} & \beta_{2m} \ldots \beta_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

إذن ، $[T(\mathbf{v})]_C = [\, [T(\mathbf{v}_1)]_C \, [T(\mathbf{v}_2)]_C \ldots [T(\mathbf{v}_n)]_C \,][\mathbf{v}]_B$.

ولذا نكون قد برهنا المبرهنة التالية :

مبرهنة (٢٠، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وكان $B = \{ \mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_n \}$ أساسا للفضاء $\mathbf{V}$ و $C = \{ \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 , \dots , \mathbf{w}_m \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{W}$ فإنه يوجد مصفوفة $[T]_B^C$ من الدرجة $m \times n$ بحيث يكون $[T (\mathbf{v})]_C = [\mathbf{T}]_B^C [\mathbf{v}]_B$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. ♦

تعريف (٨ ، ٦)

تسمى المصفوفة $[T]_B^C$ والتي أعمدتها : $[T (\mathbf{v}_n)]_C , \dots , [T (\mathbf{v}_2)]_C$ و $[T (\mathbf{v}_1)]_C$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة إلى الأساسين B و C .

لاحظ أنه في الحالة الخاصة التي يكون فيها التحويل هو المؤثر الخطي $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٢١ ، ٦)

إذا كان $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً وكان $B = \{ \mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإن $[T (\mathbf{v})]_B = [T]_B [\mathbf{v}]_B$ حيث $[T]_B$ هو مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B . ♦

مثال (٢٧ ، ٦)

لنفرض أن $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ هو التحويل الخطي المعرف بالقاعدة $T (x , y , z) = (x + y - z , x - 2y + z)$. أحسب $[T]_B^C$ و $[T (\mathbf{v})]_C$ حيث $\mathbf{v} = (1 , 0 , 2)$ ، $B = \{ (1,1,1), (1,0,1), (0,0,1) \}$ و $C = \{ (1,1), (1,-1) \}$.

الحل

$$T(1,1,1)=(1,0)=\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1)$$
$$T(1,0,1)=(0,2)=1(1,1)+(-1)(1,-1)$$
$$T(0,0,1)=(-1,1)=0(1,1)+(-1)(1,-1)$$

ولذا فإن $[T]_B^C=\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. الآن :

$\mathbf{v}=(1,0,2)=(0)(1,1,1)+(1)(1,0,1)+(1)(0,0,1)$.

ولذا فإن $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. إذن ،

$$[T(\mathbf{v})]_C=[T]_B^C[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه كان بالإمكان حساب $[T(\mathbf{v})]_C$ باستخدام C كالتالي :

$T(\mathbf{v})=T(1,0,2)=(-1,3)=1(1,1)+(-2)(1,-1)$. ولذا فإن

$[T(\mathbf{v})]_C=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. □

مثال (٢٨ ، ٦)

ليكن $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ هو التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

$T(x,y)=(x,x+y,y)$. احسب $[T]_B^C$ حيث $B=\{(1,1),(1,-1)\}$ و

$C=\{(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$.

الحل

$$T(1,1)=(1,2,1)=1(1,1,0)+0(1,0,1)+1(0,1,1)$$
$$T(1,-1)=(1,0,-1)=1(1,1,0)+0(1,0,1)+(-1)(0,1,1)$$

إذن ، $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. □

مثال (٦ ، ٢٩)

ليكن $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً ولتكن $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ حيث $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. عين قاعدة تعريف T .

الحل

$(x, y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1)$. ولذا فإن $\alpha_1 = \frac{1}{2}(x+y)$ و $\alpha_2 = \frac{1}{2}(x-y)$.

ومنه فإن $[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \end{bmatrix}$. ولذا فإن :

$$[T(x,y)]_B = [T]_B [(x,y)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3x+y \\ -x+3y \end{bmatrix}$$

إذن ،

$$T(x,y) = \frac{1}{2}(3x+y)(1,1) + \frac{1}{2}(-x+3y)(1,-1) = (x+2y, 2x-y) . \square$$

مثال (٦ ، ٣٠)

ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ هو التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 (x+1) + a_1 (x+1)^2 + a_2 (x+1)^3$. احسب $[T]_B^C$ حيث $B = \{1, x, x^2\}$ و $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ ثم أحسب $[T(p)]_C$ باستخدام $[p]_B$ حيث $p(x) = 3 + 4x - x^2$.

الحل

$$T(1)=x+1$$
$$T(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$T(x^2)=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$

ولذا فإن : $[T]_B^C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$. الآن ،

$p(x)=3+4x-x^2=3(1)+4x+(-1)x^2$. ومنه فإن $[p(x)]_C=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}$.

وبالتالي فإن $\begin{bmatrix}6\\8\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}=[T]_B^C[p(x)]_B=[T(p(x))]_C$. □

مثال (٣١ ، ٦)

ليكن $T: \mathbf{P}_2\to\mathbf{R}^2$ التحويل المعرف بالقاعدة $T(a+bx+cx^2)=(a+c,b-a-c)$. أحسب $[T]_B^C$ حيث $B=\{1,x,x^2\}$ و $C=\{(1,0),(0,1)\}$.

الحل

$$T(1)=(1,1)=1(1,0)+(-1)(0,1)$$
$$T(x)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)$$
$$T(x^2)=(1,-1)=1(1,0)+(-1)(0,1)$$

إذن ، $[T]_B^C=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$. □

ليكن $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً وليكن كل من B و C أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. بإستخدام النتيجة (٢١ ، ٦) نعلم أن $[T(\mathbf{v})]_B = [T]_B [\mathbf{v}]_B$ وأن $[T(\mathbf{v})]_C = [T]_C [\mathbf{v}]_C$. وإذا كانت $_CP_B$ هي مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس C . فإننا نعلم إستناداً إلى المبرهنة (٢١ ، ٤) والنتيجة (٢٢ ، ٤) أن $[\mathbf{v}]_C = {}_CP_B [\mathbf{v}]_B$ ، $[T(\mathbf{v})]_C = {}_CP_B [T(\mathbf{v})]_B$ وأن $_BP_C = {}_CP_B^{-1}$. الآن لكل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ لدينا :

$$\begin{aligned} {}_CP_B [T]_B [\mathbf{v}]_B &= {}_CP_B [T(\mathbf{v})]_B = [T(\mathbf{v})]_C \\ &= [T]_C [\mathbf{v}]_C = [T]_C \; {}_CP_B [\mathbf{v}]_B \end{aligned}$$

وبما أن $[\mathbf{v}_i]_B$ هو العمود i من المصفوفة المحايدة فإننا نخلص إلى أن : $_CP_B [T]_B = [T]_C \; {}_CP_B$. أي $[T]_B = {}_CP_B^{-1} [T]_C \; {}_CP_B$. وبهذا نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية :

مبرهنة (٢٢ ، ٦)

باستخدام الترميز لدينا $[T]_B = {}_CP_B^{-1} [T]_C \; {}_CP_B$.♦

مثال (٣٢ ، ٦)

إذا كان $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة :

$$T(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - 3x)$$

وكان $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,0)\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ وكان C هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ فعين كلاً من $_CP_B$ ، $[T]_C$ و $[T]_B$ وتحقق من العلاقة الواردة في المبرهنة (٢٢ ، ٦) .

الحل

$$[T]_B = \left[[T(1,1,0)]_B \,\middle|\, [T(1,0,1)]_B \,\middle|\, [T(0,1,0)]_B \right]$$

$$= \left[[(1,1,-3)]_B \mid [(2,1,-2)]_B \mid [(-1,1,0)]_B \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_C = \left[[T(1,0,0)]_C \mid [T(0,1,0)]_C \mid [T(0,0,1)]_C \right]$$

$$= \left[[(2,0,-3)]_C \mid [(-1,1,0)]_C \mid [(0,1,1)]_C \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_C P_B = \left[[(1,1,0)]_C \mid [(1,0,1)]_C \mid [(0,1,0)]_C \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التحقق من أن $[T]_B = {}_C P_B^{-1} \, [T]_C \, {}_C P_B$. □

تمارين (٤ ، ٦)

(١) إذا كان $B = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ و $C = \{ w_1 , w_2 \}$ أساسين للفضائين V و W على التوالي وكان $T : V \to W$ تحويلاً خطياً يحقق

$T(v_1) = 3w_1 - 5w_2 , T(v_2) = -w_1 + 6w_2 , T(v_3) = 4w_2$.

فعين مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين B و C .

(٢) إذا كان $B = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ و $C = \{ w_1 , w_2 , w_3 \}$ أساس للفضاء W وكان $T : \mathbb{R}^3 \to W$ تحويلاً خطياً يحقق :

$T(x,y,z) = (z-y)w_1 - (x+y)w_2 + (x-y)w_3$. فاحسب :

(أ) $T(v_1)$ ، $T(v_2)$ ، $T(v_3)$.

(ب) $[T(v_1)]_B$ ، $[T(v_2)]_B$ ، $[T(v_3)]_B$.

(جـ) مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين B و C .

(٣) ليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً وليكن $B = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$

حيث $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$. أحسب $T(3\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2)$.

(٤) ليكن كل من $B = \{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_4 \}$ و $C = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4 \}$ أساساً

لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$. وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً يحقق

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 , \; T(\mathbf{u}_2) = 4\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_4$$

$$T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_3 , T(\mathbf{u}_4) = 5\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_4 .$$

(أ) عين $[T]_B$.

(ب) إذا كان $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$ ، $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 3\mathbf{u}_4$ ، $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + 5\mathbf{u}_4$

و $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4$ فعين مصفوفة P بحيث يكون $P[\mathbf{v}]_C = [\mathbf{v}]_B$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

(جـ) أحسب $[T]_C$.

(د) أكتب $T(\mathbf{v}_i)$ كتركيب خطي للمتجهات $\mathbf{v}_j$.

(٥) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكل من $B = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 \}$ و $C = \{ \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 , \mathbf{w}_3 \}$

أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ مؤثراً خطياً حيث

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 , T(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 , T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad , \mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad , \; \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad , \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 \quad , \; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$

(أ) أحسب $[T]_B$.

(ب) عين مصفوفة قابلة للعكس P تحقق $[T]_C = P^{-1} [T]_B P$.

(جـ) أحسب $[T]_C$.

(٦) ليكن $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ مؤثراً خطياً ولتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

المصفوفة المعتادة للمؤثر T . عين مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للأساس

$B = \{(1,2,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

(٧) ليكن $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ مؤثراً خطياً ولتكن $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المعتادة للمؤثر T . أحسب $[T]_B$ حيث B هو الأساس

$B = \{(1,1,1,2),(3,3,4,8),(3,4,3,6),(0,1,0\ 1)\}$.

(٨) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ مؤثراً خطياً وليكن كل من $B = \{1, 1-x, x-x^2\}$ و $C = \{1+x^2, 1-x^2, 2x\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$. إذا كان $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

فاحسب $[T]_C$.

(٩) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ مؤثراً خطياً وليكن

$B = \{3x+3x^2, -1+3x+2x^2, 3+7x+2x^2\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$ حيث

$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

(أ) أحسب $[T(\mathbf{v})]_B$ لكـــل $\mathbf{v} \in B$.

(ب) أحسب $T(\mathbf{v})$ لكـــل $\mathbf{v} \in B$.

(جـ) عين قاعدة تعريف T .

(د) أحسب $T(1+x^2)$.

في كل من التمارين من (١٠) إلى (٢٠) عين مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساسين الواردين ثم تحقق من صحة المبرهنة (٦، ٢٠) وذلك لكل متجه معطى v

(١٠) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(x+2y-z,3x+4y-2z)$ ،
$\mathbf{v}=(1,-1,2)$, $C=\{(1,1),(1,-1)\}$، $B=\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

(١١) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(x-y,0,x+y)$ ،
$\mathbf{v}=(2,3)$, $C=\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$، $B=\{(1,2),(1,1)\}$.

(١٢) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z,t)=(x+y+z+t,t-x)$ ،
$C=\{(1,1),(0,2)\}$,
$B=\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$,
$\mathbf{v}=(1,-1,2,-1)$.

(١٣) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=(a+b,c)$ ،
$\mathbf{v}=1-x+2x^2$ ، $C=\{(1,-1),(1,1)\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٤) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(a,b,c)=c+bx+ax^2$ ، $\mathbf{v}=(1,3,-4)$ ،
$C=\{1+x,1+x^2,x\}$ ، $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

(١٥) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=b+2cx$ ، $\mathbf{v}=2-3x+x^2$
، $C=\{x,1+x^2,x^2-1\}$, $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٦) $T: P_2 \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} a & -2c \\ -c & a-b \end{bmatrix}$ ،
$C=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ ، $B=\{1,x-1,x^2+1\}$ ،
$\mathbf{v}=1+3x-2x^2$.

(١٧) $T: \mathbf{P}_4 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=p'(x)$ ، $v=1+x^2-3x^2+2x^4$ ،
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$.

(١٨) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=x\,p(x)$ ، $\mathbf{v}=1+x^2$,
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٩) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=x\,p(x-3)$ ، $\mathbf{v}=1+x-x^2$ ،
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(٢٠) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ حيث

$T(x,y,z,t)=(3x-2y+z,x+6y+2z+t,-3x+t)$ ،

$B=\{(0,1,1,1),(2,1,-1,-1),(1,4,-1,2),(6,9,4,2)\}$ ،

$\mathbf{v}=(1,3,-4,2),\ C=\{(0,8,8),(-7,8,1),(-6,9,1)\}$.

في كل من التمارين (٢١) إلى (٢٤) عين مصفوفة المؤثر الخطي بالنسبة إلى الأساس B ، كذلك تحقق من صحة النتيجة (٢١، ٦) وذلك لكل متجه معطى v .

(٢١) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x+2y,3x-4y)$ ، $\mathbf{v}=(3,4)$ ، $B=\{(1,1),(1,-1)\}$.

(٢٢) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x-y,x+y-z,y+z)$ ، $\mathbf{v}=(1,-3,5)$ ، $B=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

(٢٣) $T:\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_1$ حيث $T(ax+b)=(a-b)x+a$ ، $\mathbf{v}=2+3x$ ، $B=\{1+x,1-x\}$.

(٢٤) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ حيث $T(ax^2+bx+c)=cx^2+ax+b$ ، $\mathbf{v}=x^2-3x+4$ ، $B=\{1-x,x-x^2,1+x^2\}$.

في التمارين من (٢٥) إلى (٢٨) عين مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للأساسين B و C ثم جد مصفوفة الانتقال ${}_BP_C$ وتحقق من صحة المبرهنة (٢٢ ، ٦)

(٢٥) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x-y,x+2y)$ ، $B=\{(2,1),(1,0)\},C=\{(1,1),(1,2)\}$.

(٢٦) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x+y-z,x-y,y-z)$ ، $C=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$ ، $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

(٢٧) $T:\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_1$ حيث $T(a+bx)=(a-b)+(2a-b)x$ ، $C=\{x,x-1\}$ ، $B=\{1+x,1-x\}$.

(٢٨) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=c+ax+bx^2$ ، $C=\{x,1-x,1+x^2\}$ ، $B=\{1-x,1+x,x^2\}$.

(٢٩) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة :

$.T(p(x))=(x+5)p(x)$

(أ) احسب $T(2-x+x^2)$. (ب) أثبت أن T تحويل خطي .

(جـ) عين $[T]_B^C$ حيث B و C هما الأساسين المعتادين للفضائين $\mathbf{P}_2$ ، $\mathbf{P}_3$ على التوالي .

(٣٠) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{R}^3$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$.T(p(x))=(p(-1),p(0),p(1))$

(أ) احسب $T(5+3x)$.

(ب) أثبت أن T تحويل خطي .

(جـ) عين مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين المتعادين للفضائين $\mathbf{P}_2$ ، $\mathbf{R}^3$.

(٣١) ليكن $B=\{1, e^x, e^{2x}\}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathbf{V}$ من فضاء الداول القابلة للاشتقاق على $\mathbf{R}$. وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة $T(f(x))=f'(x)$. أحسب $[T]_B$.

(٣٢) أعد التمرين (٣١) إذا كان $B=\{e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}\}$.