الفصل الخامس

فضاءات الضرب الداخلي
INNER PRODUCT SPACES

(١ ، ٥) تعريف الضرب الداخلي
Definition of Inner Product

لعل القارئ على دراية بمفهوم الضرب الاقليدي (أو القياسي) في فضائي المتجهات $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$. في هذا البند نقدم تعميماً لهذا المفهوم وندرس خواصه الأساسية .

تعريف (١ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات حقيقي . نقول إن الدالة $<\,,\,>:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{V}$ (inner product on $\mathbf{V}$) إذا تحقق كل مما يلي وذلك لكل $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ وكل $\alpha\in\mathbb{R}$:

(١) $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

(٢) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$.

(٣) $\langle \alpha\,\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\alpha\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

(٤) $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\geq 0$.

(٥) $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

يسمى فضاء المتجهات الحقيقي $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي (inner product space) إذا كان معرفاً عليه دالة ضرب داخلي .

مثال (١ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$ وكان $\mathbf{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ و $\mathbf{v}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ عنصرين من $\mathbf{V}$ فإن القاعدة : $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}.\mathbf{v}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$

obeikandi.com

دالـــة ضـــــرب داخلــــي (تسمى دالـة الضرب الاقليدي) ويسمى **V** في هذا الحالة فضاء الضرب الاقليدي (Eulidean product space) .

الحل

لـــــنفرض أن $\mathbf{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n), \mathbf{v}=(b_1,b_2,\ldots,b_n), \mathbf{w}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ وأن $\alpha\in\mathbb{R}$. عندئذٍ

(١)
$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ &= b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle &= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\cdots+(a_n+b_n)c_n\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n)+(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n)\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\end{aligned}$$

(٣)
$$\begin{aligned}\langle \alpha\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= (\alpha a_1)b_1+(\alpha a_2)b_2+\cdots+(\alpha a_n)b_n\\ &= \alpha(a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n)=\alpha\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

(٤) $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ \geq 0$.

(٥)
$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=0 &\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0\\ &\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0\Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

وعليه فإن $\mathbb{R}^n$ فضاء ضرب داخلي . □

ملحوظة

لاحظ أن الضرب الاقليدي المعرف في المثال (١ ، ٥) يمكن كتابته بدلالة المصفوفات كما يلي $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}\,\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\,\mathbf{u}^T$.

مثال (٢ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{u} = (a_1, a_2), \mathbf{v} = (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$ وكان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7\,a_1 b_1 + 5\,a_2 b_2$ فإن $\mathbf{R}^2$ فضاء ضرب داخلي .

الحل

لنفرض أن $\mathbf{u} = (a_1, a_2), \mathbf{v} = (b_1, b_2), \mathbf{w} = (c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$ وأن $\alpha \in \mathbf{R}$.

عندئذٍ

(١) $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7a_1 b_1 + 5\,a_2 b_2 = 7b_1 a_1 + 5\,b_2 a_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

(٢) $$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 7\,(a_1 + b_1)c_1 + 5\,(a_2 + b_2)c_2 \\ &= (7\,a_1 c_1 + 5\,a_2 c_2) + (7\,b_1 c_1 + 5\,b_2 c_2) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

(٣) $$\begin{aligned}\langle \alpha\,\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 7\,(\alpha\,a_1)b_1 + 5\,(\alpha\,a_2)b_2 \\ &= \alpha\,(7\,a_1 b_1 + 5\,a_2 b_2) = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

(٤) $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7\,a_1^2 + 5\,a_2^2 \geq 0$$

(٥) $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow 7a_1^2 + 5\,a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

وبالتالي فإن $\mathbf{R}^2$ فضاء ضرب داخلي . □

obeikandl.com

ملحوظة

من الممكن تعميم المثال (٢ ، ٥) إلى $\mathbb{R}^n$ كالتالي : لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ أعداد حقيقية موجبة ولنفرض أن :

$\mathbf{u}=(a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{v}=(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. عندئذٍ فإن :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha_1 a_1 b_1 + \alpha_2 a_2 b_2 + \ldots + \alpha_n a_n b_n$$

تعرف دالة ضرب داخلي على $\mathbb{R}^n$ (تحقق من ذلك) . يسمى هذا الضرب الداخلي بالضرب الداخلي الاقليدي الموزون (weighted Euclidean inner product) وتسمى $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ أوزان الضرب الداخلي . لاحظ أيضاً أن الضرب الاقليدي ما هو إلا حالة خاصة من الضرب الداخلي الموزون وذلك بوضع :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

مثال (٣ ، ٥)

إذا كان $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2 \in \mathbf{P}_2$ حيث $\langle p(x), q(x) \rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$ فإن $\mathbf{P}_2$ فضاء ضرب داخلي .

الحل

نفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ وأن :

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2, r(x)=c_0+c_1x+c_2x^2 \in \mathbf{P}_2$$

(١) $\langle p, q \rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2 = b_0a_0+b_1a_1+b_2a_2 = \langle q, p \rangle$.

(٢)
$$\begin{aligned}\langle p+q, r \rangle &= (a_0+b_0)c_0+(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2 \\ &= (a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2)+(b_0c_0+b_1c_1+b_2c_2) = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle\end{aligned}$$

(٣)
$$\langle \alpha p, q \rangle = (\alpha a_0)b_0+(\alpha a_1)b_1+(\alpha a_2)b_2$$

$$=\alpha\left(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2\right)=\alpha\langle p,q\rangle$$

(٤) $\langle p,p\rangle=0\Leftrightarrow a_0^2+a_1^2+a_2^2\geq 0$.

(٥) $\langle p,p\rangle=0\Leftrightarrow a_0^2+a_1^2+a_2^2=0\Leftrightarrow a_0=a_1=a_2=0\Leftrightarrow p=0$

وعليه فإن $\mathbf{P}_2$ فضاء ضرب داخلي . □

مثال (٤ ، ٥)

ليكن $f,g\in\mathbf{C}[a,b]$ حيث $\mathbf{C}[a,b]$ هي فضاء المتجهات المكون من الدوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$. عندئذٍ فإن القاعدة :

$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ تعرف فضاء ضرب داخلي على $\mathbf{C}[a,b]$.

الحل

لنفرض أن $f,g,h\in\mathbf{C}[a,b]$ وأن $\alpha\in\mathbf{R}$. عندئذٍ :

(١) $$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=\langle g,f\rangle$$

(٢) $$\langle f+g,h\rangle=\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]h(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)h(x)\,dx+\int_a^b g(x)h(x)\,dx=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$$

(٣) $$\langle\alpha f,g\rangle=\int_a^b(\alpha f(x))g(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\alpha\langle f,g\rangle$$

(٤) بما أن f متصلة على $[a,b]$ فإن $[f(x)]^2\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$. ولذا فإن $\langle f,f\rangle\geq 0$.

(٥) $\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow\int_a^b(f(x))^2\,dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

وبالتالي فإن $\mathbf{C}[a,b]$ فضاء ضرب داخلي . □

مثال (٥ ، ٥)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{22}$ وكان

$\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ فإن $\mathbf{M}_{22}$ فضاء ضرب داخلي .

الحل

لنفرض أن $A, B, C \in \mathbf{M}_{22}$ وأن $\alpha \in \mathbf{R}$. عندئذٍ :

(١)
$$\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$
$$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4 = \langle B, A \rangle$$

(٢)
$$\langle A+B, C \rangle = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4$$
$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)$$
$$= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

(٣)
$$\langle \alpha A, B \rangle = (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + (\alpha a_3)b_3 + (\alpha a_4)b_4$$
$$= \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) = \alpha \langle A, B \rangle$$

(٤) $\langle A, A \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 0$.

(٥)
$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

إذن $\mathbf{M}_{22}$ فضاء ضرب داخلي . □

سننهي هذا البند بتقديم الخصائص الأساسية لدالة الضرب الداخلي .

مبرهنة (١ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ و $\alpha \in \mathbf{R}$ فإن :

(١) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

(٢) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

obeikandl.com

(٣) $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

(٤) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

(٥) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

البرهان

(١) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}+\mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$.

وبالتالي فإن $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + \left(-\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle\right) = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$. ومن ثم فإن $0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$.

(٢) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

(٣) $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

(٤) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}+(-\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle -\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

(٥) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

وبهذا يتم البرهان . ♦

(تمارين ١ ، ٥)

في التمارين من (١) إلى (٨) بين ما إذا كانت الدالة المبينة هي دالة ضرب داخلي على $\mathbb{R}^3$ أم لا حيث $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$.

(١) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

(٢) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 a_2 b_3$.

(٣) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 a_1 b_1 + 5 a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2$.

(٤) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

(٥) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 + b_1$.

(٦) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$.

obeikandl.com

(٧) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1^2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

(٨) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3$.

(٩) إذا كانت $p, q \in \mathbf{P}_2$ فأثبت أن :

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

دالة ضرب داخلي على $\mathbf{P}_2$.

(١٠) إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 , q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbf{P}_2$ فهل $\langle p(x), q(x) \rangle = a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{P}_2$ ؟

(١١) بسط كلاً مما يلي في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$.

(أ) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$ (ب) $\langle 2\mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{w} \rangle$

(جـ) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{w}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$

(١٢) إذا كانت $f, g \in \mathbf{D}[a, b]$ فهل $\langle f(x), g(x) \rangle = f'(x) + g'(x)$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{D}[a, b]$ ؟

(١٣) إذا كانت $f, g \in \mathbf{C}[0,1]$ فهل $\langle f(x), g(x) \rangle = f(1)g(0) + f(0)g(1)$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{C}[0,1]$ ؟

(١٤) إذا كانت $p, q \in \mathbf{P}_3$ فهل $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{P}_3$ ؟

(١٥) إذا كانت $A, B \in \mathbf{M}_{nn}$ فهل $\langle A, B \rangle = tr(AB)$ دالة ضرب داخلي على $\mathbf{M}_{nn}$ ؟

(١٦) لتكن A مصفوفة من الدرجة n ولها معكوس وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. أثبت أن الدالة $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{u})^T (A\mathbf{v})$ دالة ضرب داخلي على $\mathbb{R}^n$.

(١٧) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}$ فأثبت أن :

$\mathbf{W} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \}$ تشكل فضاءً جزئياً من $\mathbf{V}$.

(١٨) إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ مرتبطين خطياً في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ فاحسب قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{vmatrix} .$$

obeikandi.com

(١٩) إذا كانت $A,B\in \mathbf{M}_{nn}$ فأثبت أن $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$ ضرب داخلي على $\mathbf{M}_{nn}$.

(٢٠) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\langle \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n , \mathbf{w} \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{w} \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{w} \rangle + \cdots + \alpha_n \langle \mathbf{v}_n , \mathbf{w} \rangle$$

وذلك لكل $\mathbf{v}_i , \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ وكل $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

(٢١) لنفرض أن $x_0 , x_1 , \ldots , x_n$ أعداد حقيقية مختلفة وليكن $p,q\in \mathbf{P}_n$ ولنعرف $\langle p , q \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \ldots + p(x_n)q(x_n)$. أثبت أن $\mathbf{P}_n$ فضاء ضرب داخلي .

(٢ ، ٥) التعـــــامد

Orthogonality

لاشك أن القارىء على علم في المفاهيم الهندسية للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$ والتي عادة ما تدرس في مقرر الهندسة التحليلية مثل طول المتجه ، قياس الزاوية بين متجهين ، التعامد وغيرها من المفاهيم الهندسية الأخرى . في هذا البند نستعين بالضرب الداخلي على فضاء متجهات $\mathbf{V}$ ليساعدنا على تعميم المفاهيم الهندسية في $\mathbb{R}^2$ إلى مفاهيم مرادفة في $\mathbf{V}$.

تعريف (٢ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. نعرف طول أو معيار (length or norm) $\mathbf{u}$ والذي نرمز له بالرمز $\|\mathbf{u}\|$ كالتالي :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} , \mathbf{u} \rangle} .$$

وإذا كان $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ متجهاً آخر فإننا نعرف المسافة بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ (distance between **u** and **w**) والتي نرمز لها بالرمز $d(\mathbf{u},\mathbf{w})$ كالتالي :

obeikandl.com

$$. \ d(\mathbf{u},\mathbf{w})=\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|=\sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{w}\rangle}$$

مثال (٦، ٥)

إذا كان $\mathbf{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ \mathbf{w}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ وكان الضرب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^n$ هو الضرب الأقليدي فإن $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$ كما أن :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u},\mathbf{w}) &= \sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{w}\rangle} \\ &= \sqrt{(\mathbf{u}-\mathbf{w}).(\mathbf{u}-\mathbf{w})} \\ &= \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2} \end{aligned}$$

وعلى وجه الخصوص إذا كان $n=3$ وكان $\mathbf{u}=(1,2,3)$ و $\mathbf{w}=(-1,-2,4)$ فإن $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2}=\sqrt{14}$ كما أن

$$\square \ . \ d(\mathbf{u},\mathbf{w})=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{21}$$

مثال (٧ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{u}=(a_1,a_2),\ \mathbf{v}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ والضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ هو كما في المثال (٢ ، ٥) فإن $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{7a_1b_1+5a_2b_2}$. وكذلك لدينا :

$$\square \ . \ d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle}=\sqrt{7(a_1-b_1)^2+5(a_2-b_2)^2}$$

مثال (٨ ، ٥)

إذا كانت $p(x)=2-x+x^2,\ \ q(x)=1+2x-x^2\in\mathbf{P}_2$ والضرب الداخلي كما في المثال (٣ ، ٥) فإن $\|p(x)\|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{6}$. كما أن

$$\square \ . \ d(p(x),q(x))=\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{14}$$

مثال (٩ ، ٥)

إذا كانت $f(x)=\cos x,\ g(x)=\sin x\in\mathbf{C}[0,\pi]$ والضرب الداخلي على $\mathbf{C}[0,\pi]$

obeikandl.com

هو كما في المثال (٤ ، ٥) فإن $\| \cos x \| = \left(\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. كما أن

$$d(\cos x, \sin x) = \left(\int_0^{\pi} (\cos x - \sin x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \ . \square$$

المبرهنة التالية تعرف بمتباينة كوشي ـ شوارتز (Cauchy – Schwartz inequality).

مبرهنة (٢ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. عندئذ $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$.

البرهان

إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.فإن النتيجة محققة. لذا نفرض أن $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ وأن $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\| \mathbf{u} \|^2} \mathbf{u}$.

عندئذٍ ،

$$0 \le \| \mathbf{w} \|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\| \mathbf{u} \|^2} \mathbf{u}, \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\| \mathbf{u} \|^2} \mathbf{u} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\| \mathbf{u} \|^2} \mathbf{u} \rangle - \langle \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\| \mathbf{u} \|^2} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2}{\| \mathbf{u} \|^4} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

$$= \| \mathbf{v} \|^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2}{\| \mathbf{u} \|^2} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2}{\| \mathbf{u} \|^2} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2}{\| \mathbf{u} \|^2}$$

$$= \| \mathbf{v} \|^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2}{\| \mathbf{u} \|^2}$$

ولذا فإن $\| \mathbf{u} \|^2 \| \mathbf{v} \|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2 \ge 0$. أي أن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2 \le \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{u} \|^2$. وبالتالي فإن :

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle| \le \| \mathbf{v} \| \| \mathbf{u} \| \ . \blacklozenge$$

obeikandl.com

ملحوظات

(١) إذا كان $\mathbb{R}^n$ هو فضاء الضرب الداخلي الأقليدي فإن متباينة كوشي - شوارتز تأخذ الصيغة :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

(٢) إذا كان $\mathbf{C} = [a, b]$ هو فضاء الضرب الداخلي المعطى في المثال (٤ ، ٥)

فإن متباينة كوشي ـ شوارتز تأخذ الصيغة :

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

نتيجة (٣ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. عندئذٍ $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$ إذا وفقط إذا كان المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مرتبطين خطياً .

البرهان

لنفرض أولاً أن $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. عندئذٍ نجد أن $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$ حيث $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$ كما في المبرهنة (٢ ، ٥) . ولذا فإن $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. أي أن $\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$. وبالتالي فإن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مرتبطان خطياً . ولبرهان العكس نفرض أن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مرتبطان خطياً . عندئذ ، يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$. الآن :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{u} \rangle^2 = \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^2 = \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

وبالتالي فإن $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. ♦

تزودنا المبرهنة التالية بالخصائص الأساسية التي يتمتع بها المعيار في فضاءات الضرب الداخلي .

obeikandi.com

مبرهنة (٤ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ

(١) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$.

(٢) $\|\mathbf{u}\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(٣) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$.

(٤) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (متباينة المثلث) .

البرهان

(١) بما أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ فإن $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \geq 0$.

(٢) بما أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ فإن $\|\mathbf{u}\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(٣) $\|\alpha \mathbf{u}\|^2 = \langle \alpha \mathbf{u}, \alpha \mathbf{u} \rangle = \alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \alpha^2 \|\mathbf{u}\|^2$.إذن $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$.

(٤)
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. ♦

نتيجة (٥ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن

(١) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$.

(٢) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(٣) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

(٤) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (متباينة المثلث) .

obeikandl.com

البرهان

(١) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\geq 0$.

(٢) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=0 \Leftrightarrow \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{v}$

(٣) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|=d(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

(٤)
$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}-\mathbf{w}+\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$$
$$\leq\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|+\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|=d(\mathbf{u},\mathbf{w})+d(\mathbf{w},\mathbf{v})$$

وبالتالي $d(\mathbf{u},\mathbf{v})\leq d(\mathbf{u},\mathbf{w})+d(\mathbf{w},\mathbf{v})$. ♦

نبين الآن كيفية الإستعانة بمتباينة كوشي – شوارتز لتعريف الزاوية بين متجهين في فضاء الضرب الداخلي .

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي و $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. من متباينة كوشي – شوارتز لدينا :

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leq\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow \frac{|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\leq 1 .$$

وبالتالي توجد زاوية وحيدة Θ تحقق : $\cos\Theta=\dfrac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$ حيث $0\leq\Theta\leq\pi$.

تعريف (٣ ، ٥)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وليكن $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. عندئذٍ :

(١) يعرف جيب تمام الزاوية Θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بأنه $\cos\Theta=\dfrac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$.

(٢) نقول إن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان (orthogonal) إذا كان $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0$.

مثال (١٠ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{R}^2$ هو فضاء الضرب الأقليدي فإن جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}=(1,2)$ و $\mathbf{v}=(-1,3)$ هي :

$$\cos\Theta=\frac{(-1)(1)+(3)(2)}{\sqrt{1+9}\,\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{50}}$$

كما أن المتجهين $\mathbf{u}=(1,2)$ و $\mathbf{v}=(-2,1)$ متعاملان وذلك لأن :

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=(-2)(1)+(1)(2)=0 \ . \blacklozenge$$

ملحوظة

لاحظ أن فكرة التعامد مرتبطة ارتباطاً كلياً بالضرب الداخلي المعرف على الفضاء $\mathbf{V}$ حيث من الممكن أن يكون متجهان متعامدين في فضاء ضرب داخلي $\mathbf{V}$ بينما لا يمكن أن يكونا متعامدين لو أننا غيرنا الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbf{V}$ وهذا ما يوضحه المثال التالي .

مثال (١١ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{u}=(1,2)\in\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{v}=(-2,1)$ فإننا قد وجدنا في المثال (١٠ ، ٥) أن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbf{R}^2$ هو الضرب الإقليدي . ولكنهما ليسا متعامدين إذا اعتبرنا الضرب الداخلي على $\mathbf{R}^2$ المعرف في المثال (٢ ، ٥) وذلك لأن : $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=7(1)(-2)+5(2)(1)=-14+10\neq 0$. $\square$

مثال (١٢ ، ٥)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&-4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1\\-7&0\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{22}$ وكان الضرب الداخلي على $\mathbf{M}_{22}$ هو الضرب المعرف في المثال (٥ ، ٥) فإن A و B متعامدان وذلك لأن

$$\langle A,B\rangle=(2)(0)+(0)(1)+(0)(-7)+(-4)(0)=0 \ . \square$$

مثال (١٣ ، ٥)

المتجهان $\cos x$ و $\sin x$ في الفضاء $\mathbf{C}[0,\pi]$ متعامدان حيث الضرب الداخلي هو الضرب المعرف في المثال (٤ ، ٥) وذلك لأن

$$\langle \sin x,\cos x\rangle=\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big]_0^{\pi}=0 \ . \square$$

openlander.com

مثال (١٤ ، ٥)

إذا كانت $p(x)=2-x+4x^2\ ,q(x)=3+5x-x^2\in \mathbf{P}_2$ حيث الضرب الداخلي المعرف في المثال (٣ ، ٥) فإن جيب تمام الزاوية Θ بين $p(x)$ و $q(x)$ هو :

$$\cos\Theta=\frac{6-5-4}{\sqrt{4+1+16}\ \sqrt{9+25+1}}=\frac{-3}{\sqrt{735}}\ .\ \square$$

المبرهنة التالية هي تعميم لمبرهنة فيثاغورس إلى أي فضاء ضرب داخلي .

مبرهنة (٦ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in \mathbf{V}$ متعامدين فإن $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$.

البرهان

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle+2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle+\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$$

وذلك لأن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle=0$. ♦

تمارين (٢ ، ٥)

في التمارين من (١) إلى (٥) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على $\mathbb{R}^3$

(١) $\mathbf{u}=(-1,3,2)\ ,\mathbf{v}=(4,2,-1)$.

(٢) $\mathbf{u}=(-2,-2,-2)\ ,\mathbf{v}=(-1,1,-1)$.

(٣) $\mathbf{u}=(-1,1,0), \mathbf{v}=(4,0,9)$.

(٤) $\mathbf{u}=(-1,5,2), \mathbf{v}=(2,4,-9)$.

obeikandi.com

(٥) $\mathbf{u}=(-4,2,1), \mathbf{v}=(8,-4,-2)$.

(٦) أعد التمارين من (١) إلى (٥) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 7a_1b_1 + 3a_2b_2 + 4a_3b_3$.

في التمارين من (٧) إلى (١١) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على $\mathbb{R}^4$

(٧) $\mathbf{u}=(-4,6,-10,1), \mathbf{v}=(2,1,-2,9)$.

(٨) $\mathbf{u}=(-1,1,0,2), \mathbf{v}=(1,-1,3,0)$.

(٩) $\mathbf{u}=(0,-2,2,1), \mathbf{v}=(-1,-1,1,1)$.

(١٠) $\mathbf{u}=(1,2,0,1), \mathbf{v}=(-2,3,1,2)$.

(١١) $\mathbf{u}=(-2,3,1,4), \mathbf{v}=(-3,1,4,6)$.

(١٢) أعد التمارين من (٧) إلى (١١) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3 + 3a_4b_4$.

في التمارين من (١٣) إلى (١٧) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على $\mathbf{P}_2$ هو المعرف في المثال (٣، ٥)

(١٣) $p(x)=x^2+2x+3 \ , \ q(x)=x^2+1$.

(١٤) $p(x)=2x^2+x-3 \ , \ q(x)=4x^2-x$.

(١٥) $p(x)=2x^2+5x-1 \ , \ q(x)=9x^2+2x+1$.

(١٦) $p(x)=3x^2-x+5 \ , \ q(x)=x^2-x$.

(١٧) $p(x)=2x^2-x+1 \ , \ q(x)=x^2+2x$.

في التمارين من (١٨) إلى (٢٢) احسب الزاوية بين المتجهين ثم بين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على $\mathbf{M}_{22}$ هو الضرب المعرف في المثال (٥، ٥)

(١٨) $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. (١٩) $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

(٢٠) $B=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. (٢١) $B=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

obeikandl.com

(٢٢) $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(٢٣) إذا كانت $\sin 3x , \cos 4x \in \mathbf{C}[0,\pi]$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب المعرف في المثال (٤ ، ٥) فأثبت أنهما متعامدتان .

(٢٤) ليكن $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي . إذا كان $\mathbf{u}$ متعامداً على كل من $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ فأثبت أن $\mathbf{u}$ متعامد على $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}$ لكل $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

(٢٥) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=4\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle .$$

(٢٦) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2 .$$

(٢٧) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\Theta$ حيث Θ هي الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

(٢٨) ليكن $\mathbf{R}^2$ هو فضاء الضرب الأقليدي . أثبت مستخدماً متباينة كوشي ـ شوارتز أن $(a\cos\Theta+b\sin\Theta)^2\le a^2+b^2$ وذلك لكل $a,b,\Theta\in\mathbf{R}$.

(٢٩) لتكن $f(x),g(x)\in\mathbf{C}[0,1]$. أثبت أن :

$$\left[\int_0^1(f(x)+g(x))^2\,dx\right]^{1/2}\le\left[\int_0^1(f(x))^2\,dx\right]^{1/2}+\left[\int_0^1(g(x))^2\,dx\right]^{1/2}$$

(٣٠) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| .$$

(٣١) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|$ فأثبت أن $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ متعامدان .

(٣٢) إذا كانت $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{V}$ متجهات غير صفرية في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وكانت متعامدة مثنى مثنى (أي $\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle=0$ لكل $i\ne j$)

فأثبت أن $\|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\dots+\mathbf{v}_n\|^2=\|\mathbf{v}_1\|^2+\|\mathbf{v}_2\|^2+\dots+\|\mathbf{v}_n\|^2$.

(٣ ، ٥) الأساسات العيارية

Orthonormal Basis

إن مسألة اختيار الأساس المناسب لفضاء متجهات تحت الدارسة هي على قدر كبير من الأهمية ، وإن أفضل هذه الاختبارات هو الأساس الذي يسهل الحسابات في فضاء المتجهات. سنبين في هذا البند أنه في حالة فضاءات الضرب الداخلي نستطيع دائماً الحصول على أساس من هذا النوع ، يعرف بالأساس العياري المتعامد.

ونقدم خوارزمية لإنشاء هذا الأساس تسمى خوارزمية جرام – شميت . (Gram– Schmidt)

تعريف (٤ ، ٥)

لتكن S مجموعة جزئية من فضاء الضرب الداخلي **V** نقول إن S مجموعة متعامدة (orthogonal) إذا كان كل متجهين مختلفين من S متعامدين . وعلاوة على ذلك إذا كان معيار كل متجه في S يساوي 1 فإننا نقول إن S مجموعة عيارية متعامدة . (orthonormal)

مثال (١٥ ، ٥)

إذا كانت $\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$, $\mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,1)$, $\mathbf{v}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,1)$

ثلاثة متجهات في فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^4$ فإنه من السهل أن نرى أن:

$$\langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \ .$$

كما أن $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$ ولذا فإن $S=\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3\}$ مجموعة عيارية متعامدة . □

مثال (١٦ ، ٥)

لتكن $S=\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} ,\sqrt{\frac{3}{2}}x,\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}\subseteq C[-1,1]$ ، حيث الضرب الداخلي على $C[-1,1]$ هو الضرب المعرف في المثال (٤، ٥) . سنبرهن الآن على أن S مجموعة عيارية متعامدة وذلك لأن :

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} ,\sqrt{\frac{3}{2}}x \rangle=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}x\,dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\langle \frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2\sqrt{3}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x\right)\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x,\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{5}}\left(x^3-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^2\right)\right]_{-1}^{1}=0$$

وبالمثل نستطيع أن نرى أن

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|=\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\|=\left\|\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\|=1 \quad . \quad \square$$

ملحوظة

لتكن $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مجموعة جزئية متعامدة من فضاء ضرب داخلي V حيث $v_i\neq 0$ لكل i . عندئذٍ المجموعة $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ حيث $u_i=\frac{v_i}{\|v_i\|}$ مجموعة عيارية متعامدة وذلك لأن :

$$\langle u_i ,u_j \rangle=\langle \frac{v_i}{\|v_i\|},\frac{v_j}{\|v_j\|}\rangle=\frac{1}{\|v_i\|\,\|v_j\|}\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0\ , & i\neq j\\ 1\ , & i=j\end{cases}.$$

تزودنا المبرهنة التالية بالعلاقة بين المجموعات المستقلة خطياً والمتعامدة .

obeikandl.com

مبرهنة (٧ ، ٥)

إذا كانت $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ مجموعة متعامدة عناصرها غير صفرية في فضاء ضرب داخلي $\mathbf{V}$ فإن S مستقلة خطياً .

البرهان

لنفرض أن $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{R}$ حيث $\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$. عندئذٍ لكل $i=1,\ldots,n$ لدينا :

$$\begin{aligned}0&=\langle \mathbf{0},\mathbf{u}_i\rangle=\langle \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_i\rangle\\&=\alpha_1\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_i\rangle+\alpha_2\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_i\rangle+\cdots+\alpha_i\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i\rangle+\cdots+\alpha_n\langle \mathbf{u}_n,\mathbf{u}_i\rangle\end{aligned}$$

وبما أن $\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle=0$ لكل $i\neq j$ فإننا نجد أن $\alpha_i\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i\rangle=\alpha_i\|\mathbf{u}_i\|^2=0$ وهذا يقتضي أن $\alpha_i=0$. وبالتالي فإن S مستقلة خطياً . ♦

تكمن أهمية إيجاد أساس عياري متعامد لفضاء ضرب داخلي في سهولة التعبير عن عناصر الفضاء كتركيبات خطية لعناصر الأساس العياري المتعامد وهذا ما تزودنا به المبرهنة التالية .

مبرهنة (٨ ، ٥)

إذا كان $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ أساساً عيارياً متعامداً لفضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ فإن $\mathbf{u}=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1+\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2+\cdots+\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_n\rangle\mathbf{u}_n$.

البرهان

بما أن S أساس لفضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وبما أن $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{R}$ حيث $\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{u}_n$. وعندئذٍ لكل $i=1,2,\ldots,n$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle &= \langle \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{u}_i + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n , \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_i \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_n \langle \mathbf{u}_n , \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \alpha_i \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i \rangle = \alpha_i\end{aligned}$$

وذلك لأن $\langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_j \rangle = 0$ لكل $i \neq j$ وأن $\langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i \rangle = 1$. ♦

مثال (١٧ ، ٥)

ليكن $S = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \mathbf{u}_2 = (1,0,0), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,-2,2) \right\}$ أساساً عيارياً متعامد للفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^3$ وليكن $\mathbf{u} = (3,4,-1) \in \mathbf{R}^3$ عندئذٍ :

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_3 \rangle \mathbf{u}_3 .$$

أي أن $(3,4,-1) = \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - \frac{5}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_3$. □

من الواضح الآن استناداً إلى المبرهنة (٨ ، ٥) أنه من المفضل أن يكون لدينا أساس عياري متعامد وذلك لسهولة التعبير عن متجهات الفضاء كتركيب خطي لعناصر الأساس العياري المتعامد . ولكن هل مثل هذا الأساس موجود دائماً ؟ سنبرهن الآن على وجود مثل هذا الأساس لأي فضاء ضرب داخلي منتهي البعد . من الملحوظة التي سبقت المبرهنة (٧ ، ٥) نخلص إلى أنه يكفي أن نجد أساساً متعامداً وذلك لأننا نستطيع بعد ذلك وبسهولة أن نعاير هذا الأساس بضرب كل من عناصره $\mathbf{u}$ بالعدد $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$. ولكن يلزمنا قبل الشروع بإنشاء أساس متعامد برهان الحقيقة التالية .

مبرهنة (٩ ، ٥)

لتكن $S = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m \}$ مجموعة متعامدة في فضاء ضرب داخلي $\mathbf{V}$ ولتكن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ حيث $\mathbf{v} \notin \langle S \rangle$ ولنعرف $\mathbf{u}_{m+1}$ كما يلي :

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle}{\|\mathbf{u}_m\|^2} \mathbf{u}_m .$$

عندئذٍ فإن $\{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_m , \mathbf{u}_{m+1} \}$ مجموعة متعامدة أيضاً .

البرهان

سنبرهن أن $\langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_{m+1} \rangle = 0$ لكل $1 \le i \le m$. الآن :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_{m+1} \rangle &= \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_2 \rangle}{\| \mathbf{u}_2 \|^2} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_m \rangle}{\| \mathbf{u}_m \|^2} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_2 \rangle}{\| \mathbf{u}_2 \|^2} \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_2 \rangle \\
&\quad - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_i \rangle}{\| \mathbf{u}_i \|^2} \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i \rangle - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_m \rangle}{\| \mathbf{u}_m \|^2} \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_m \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{v} \rangle - 0 - 0 - \cdots - \langle \mathbf{v} , \mathbf{u}_i \rangle - \cdots - 0 \\
&= \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}_i , \mathbf{v} \rangle = 0
\end{aligned}$$

وعليه فإن $\langle \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_{m+1} \rangle = 0$ لكل $1 \le i \le m$. وبالتالي فإن $\{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_m , \mathbf{u}_{m+1} \}$ مجموعة متعامدة . ♦

مبرهنة (١٠ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي منتهي البعد فإن $\mathbf{V}$ يحتوي على أساس متعامد .

البرهان

لنفرض أن $\dim \mathbf{V} = n$. سنبرهن العبارة باستخدام الاستقراء الرياضي على n . إذا كان $n = 1$ فإنه من الواضح أن أي أساس $\{ \mathbf{v} \}$ للفضاء $\mathbf{V}$ يجب أن يكون متعامداً . لنفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = k$. وأن $\dim \mathbf{V} = k + 1$. لنفرض كذلك أن $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_k , \mathbf{v}_{k+1} \}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$ وأن $\mathbf{U} = \langle \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_k \} \rangle$. عندئذٍ $\dim \mathbf{U} = k$. ولذا باستخدام فرضية الاستقراء يوجد أساس متعامد $\{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_k \}$ للفضاء $\mathbf{U}$. ليكن $\mathbf{v} \notin \mathbf{U}$ ولنضع :

$$. \ \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\| \mathbf{u}_2 \|^2} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle}{\| \mathbf{u}_m \|^2} \mathbf{u}_m$$

عندئذٍ باستخدام المبرهنة (٩ ، ٥) نجد أن $\{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_{k+1} \}$ مجموعة متعامدة.
وباستخدام المبرهنة (٧ ، ٥) نجد أنها أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ حيث $\dim \mathbf{V} = k+1$. ♦

ملحوظة

تضمن لنا المبرهنة (١٠ ، ٥) وجود أساس متعامد لأي فضاء ضرب داخلي منتهي البعد . وعلاوة على ذلك فإن برهانها الذي يعتمد على المبرهنة (٩ ، ٥) يزودنا بخوارزمية لإنشاء أساس متعامد من أي أساس معطى ، تعرف هذه الخوارزمية بخوارزمية جرام ـ شميت (Gram – Schmidt) والتي نقدم وصفها الآن .

خوارزمية جرام ـ شميت

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي منتهي البعد ، وليكن $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً لهذا الفضاء . تزودنا الخطوات التالية بأساس متعامد $\{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_n \}$ للفضاء $\mathbf{V}$

(١) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$.

(٢) $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1$.

(٣) $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_2 \rangle}{\| \mathbf{u}_2 \|^2} \mathbf{u}_2$

$\vdots$

(٥) $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n , \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_n , \mathbf{u}_2 \rangle}{\| \mathbf{u}_2 \|^2} \mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_n , \mathbf{u}_{n-1} \rangle}{\| \mathbf{u}_{n-1} \|^2} \mathbf{u}_{n-1}$.

obeikandi.com

ملحوظة

إن جميع خطوات الخوارزمية مبررة بالاستعانة بالمبرهنة (٩ ، ٥) . فمثلاً لتبرير الخطوة (٢) نلاحظ أن $\mathbf{v}_2 \not\in \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ وذلك لأن $\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2\}$ مجموعة مستقلة خطياً ولذا فإن المبرهنة (٩ ، ٥) تضمن أن $\{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2\}$ مجموعة متعامدة . كذلك من السهل التحقق من أن $\langle\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2\}\rangle = \langle\{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2\}\rangle$. وبالمثل من الممكن تبرير باقي الخطوات .

مثال (١٨ ، ٥)

استخدام خوارزمية جرام ـ شميت لتحويل الأساس :

$\mathbf{v}_1 = (1,0,1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ لفضاء الضرب الإقليدي $\mathbf{R}^3$ إلى أساس عياري متعامد .

الحل

(١) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0,1)$.

(٢) $$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = (2,1,0) - \frac{2}{2}(1,0,1) = (1,1,-1)$$

(٣) $$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2$$

$$= (1,1,1) - \frac{2}{2}(1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,-1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي فإن $\{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3\}$ أساس متعامد . للحصول على أساس عياري متعامد نقسم كل متجه من متجهات الأساس المتعامد على طوله لنجد أن :

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

أساس عياري متعامد . □

openkandi.com

مثال (١٩ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W}$ فضاءاً جزئيا من $\mathbf{R}^5$ مولداً بالمجموعة $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ حيث $\mathbf{v}_1 = (-1,-1,0,1,0)$ ، $\mathbf{v}_2 = (0,-1,0,0,1)$ و $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1,0)$. عين أساساً عيارياً متعامداً للفضاء $\mathbf{W}$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي .

الحل

(١) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (-1,-1,1,0,0)$.

(٢)
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$$
$$= (0,-1,0,0,1) - \frac{1}{3}(-1,-1,1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

(٣)
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2$$
$$= (1,-1,0,1,0) - 0 - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right)$$

وبالتالي فإن $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ أساس متعامد . ولذا فإن الأساس العياري المتعامد هو

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{\sqrt{15}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{30}, \frac{\sqrt{15}}{6}, -\frac{\sqrt{15}}{10}\right)\right\}$$

مثال (٢٠ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W}$ الفضاء الجزئي من $\mathbf{C}[0,1]$ المولد بالمجموعة $\{p_1(x) = 1 \ , \ p_2(x) = 2x - 1, p_3(x) = 12x^2\}$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب المعرف في المثال (٤ ، ٥) . عين أساساً متعامداً للفضاء $\mathbf{W}$.

الحل

(١) $q_1 = p_1 = 1$

obeikandl.com

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|^2} q_1 = p_2 - 0q_1 = p_2 = 2x - 1 \qquad (٢)$$

$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|^2} q_1 - \frac{\langle p_3 , q_2 \rangle}{\| q_2 \|^2} q_2 \qquad (٣)$$

$$= 12x^2 - \frac{4}{1}(1) - 6(2x - 1) = 12x^2 - 4 - 12x + 6 = 12x^2 - 12x + 2$$

وعليه فإن $\{q_1 , q_2 , q_3\}$ أساس متعامد للفضاء **W** . □

مثال (٢١ ، ٥)

ليكن $p, q \in \mathbf{P}_4$ والضرب الداخلي المعرف على $\mathbf{P}_4$ هو كما يلي :

. $\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

وليكن **W** الفضاء الجزئي من $\mathbf{P}_4$ المولد بالمجموعة :

$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x , p_3(x) = x^2\}$. عين أساساً متعامداً للفضاء **W**.

الحل

$q_1 = p_1 = 1$ (١)

$$\langle p_2 , q_1 \rangle = p_2(-2)q_1(-2) + p_2(-1)q_1(-1) + p_2(0)q_1(0) \qquad (٢)$$
$$+ p_2(1)q_1(1) + p_2(2)q_1(2)$$
$$= (-2)(1) + (-1)(1) + (0)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 0$$

إذن ، $q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|^2} q_1 = x - 0 = x$

(٣) $q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|^2} q_1 - \frac{\langle p_3 , q_2 \rangle}{\| q_2 \|^2} q_2$

ولكن $\langle p_3 , q_1 \rangle = (-2)^2(1) + (-1)^2(1) + (0)^2(1) + (1)^2(1) + (2)^2(1) = 10$

$\| q_1 \|^2 = \langle q_1 , q_2 \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

obeikandl.com

$\langle p_3 , q_2 \rangle = (-2)^2\,(-2) + (-1)^2\,(-1) + (0)^2\,(0) + (1)^2\,(1) + (2)^2\,(2) = 0$.

وعندئذٍ، $q_3 = x^2 - \frac{10}{5}(1) - 0 = x^2 - 2$. ولذا فإن $\{1, x, x^2 - 2\}$ أساس متعامد للفضاء **W** . □

مثال (٥، ٢٢)

لتكن A هي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. عين أساساً عيارياً متعامداً للفضاء العمودي للمصفوفة A .

الحل

الفضاء العمودي للمصفوفة A هو الفضاء الجزئي من $\mathbf{R}^4$ المولد بالمتجهات $\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,0,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,0,1)\}$. وباعتبار الضرب الداخلي على $\mathbf{R}^4$ هو الضرب الإقليدي نجد أن :

(١) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$

(٢) $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0) - \frac{1}{4}(1,1,1,1)$

$$= \frac{1}{4}(3,-1,-1,-1)$$

(٣) $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2$

$$= (1,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(3,-1,-1,-1) = -\frac{1}{3}(0,-2,1,1)$$

ولذا فإن $\{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3\}$ أساس متعامد للفضاء العمودي. وبالتالي فإن الأساس العياري هو :

obeikandi.com

$$\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1),\frac{1}{\sqrt{12}}(3,-1,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(0,-2,1,1)\right\}. \square$$

تمارين (٣ ، ٥)

(١) ليكن $\mathbb{R}^2$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ إلى أساس عياري متعامد.

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-3),\ \mathbf{v}_2=(2,2)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,0),\ \mathbf{v}_2=(3,-5)\}$.

(٢) أعد التمرين (١) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ هو $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=2a_1b_1+3a_2b_2$.

(٣) ليكن $\mathbb{R}^3$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ إلى أساس عياري متعامد .

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,1),\ \mathbf{v}_2=(-1,1,0),\ \mathbf{v}_3=(1,2,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,0,0),\ \mathbf{v}_2=(3,7,-2),\ \mathbf{v}_3=(0,4,1)\}$.

(جـ) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,1),\ \mathbf{v}_2=(1,1,0),\ \mathbf{v}_3=(1,0,0)\}$.

(٤) أعد التمرين (٣) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^5$ هو $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$.

(٥) ليكن $\mathbb{R}^4$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس :

$$\{\mathbf{v}_1=(0,2,1,0),\ \mathbf{v}_2=(1,-1,0,0),\ \mathbf{v}_3=(1,2,0,-1),\ \mathbf{v}_4=(1,0,0,1)\}$$

إلى أساس عياري متعامد .

(٦) أعد التمرين (٥) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو : $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+4a_4b_4$.

obeikandi.com

(٧) ليكن $\mathbb{R}^3$ هو فضاء الضرب الإقليدي .استخدم خوارزمية جرام ــ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمجوعتين الآتيتين

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-1,0),\mathbf{v}_2=(-1,0,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(0,1,2),\mathbf{v}_2=(-1,0,1),\mathbf{v}_3=(-1,1,3)\}$.

(٨) أعد التمرين (٧) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو الضرب المعرف في التمرين (٤) .

(٩) ليكن $\mathbb{R}^4$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمجموعتين الآتيتين

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-1,0,1),\mathbf{v}_2=(1,1,0,0),\mathbf{v}_3=(1,1,0,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,-1,-1),\mathbf{v}_2=(3,2,0,1),\mathbf{v}_3=(1,0,1,0)\}$.

(١٠) أعد التمرين (٩) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو الضرب المعرف في التمرين (٦) .

(١١) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لتحويل الأساس $\{1,x,x^2\}$ للفضاء $\mathbf{P}_2$ إلى أساس متعامد حيث الضرب الداخلي هو :

(أ) $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$.

(ب) $\langle p,q\rangle=\int_0^2 p(x)q(x)\,dx$.

(١٢) استخدم خوارزمية جرام ــ شيمت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي من $C[0,\pi]$ المولد بالمجموعة $\{\mathbf{v}_1=\sin x,\mathbf{v}_2=\cos x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(١٣) استخدم خوارزمية جرام ــ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي من $C[0,1]$ المولد بالمجموعة $\{\mathbf{v}_1=1,\mathbf{v}_2=e^x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

openkanzi.com

(١٤) أستخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[-1,1]$ المولد بالمجموعة $\{ v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2 \}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$.

(١٥) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لتحويل الأساس $\{ v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3, v_5 = x^4 \}$ للفضاء P_4 إلى أساس متعامد حيث الضرب الداخلي هو :

$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

(١٦) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[0, 2\pi]$ المولد بالمجموعة $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f, g \rangle = \int_{0}^{2\pi} f(x) g(x) dx$.

(١٧) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء العمودي للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(١٨) أعد التمرين (١٧) لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الصفي للمصفوفة A

(١٩) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد لفضاء الحل للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

(٢٠) لتكن $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي V . أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k \rangle|^2 \le \| v \|^2$ لكل $v \in V$.

openkandil.com

(٢١) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وليكن $\mathbf{W}=\langle S\rangle$. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $\mathbf{v}\in\mathbf{W}$.

(ب) $\sum_{k=1}^{n}|\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_k\rangle|^2=\|\mathbf{v}\|^2$.

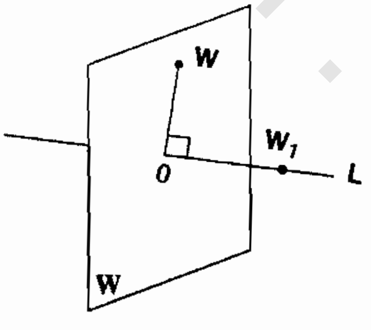
(جـ) $\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{n}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_k\rangle\mathbf{v}_k$.

(د) $\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_1\rangle\langle \mathbf{v}_k,\mathbf{u}\rangle$ لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$.

(٤ ، ٥) المتمم العمودي والإسقاط العمودي

Orthogonal Complement and Orthogonal Projection

ليكن $\mathbf{W}$ هو المستوى المار بنقطة الأصل في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$. وليكن L المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودي على المستوى $\mathbf{W}$. إذا كان $0\neq\mathbf{w}_1\in L$ و $0\neq\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ فمن المعلوم أن المتجه الذي بدايته $\mathbf{0}$ ونهايته $\mathbf{w}_1$ عمودياً على القطعة المستقيمة $\mathbf{0}\,\mathbf{w}$. أي أن $\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}\rangle=0$ (أنظر الشكل (١ ، ٥)) .



شكل (١ ، ٥)

ولذا فإن كل متجه واقع على L يكون عمودياً على كل متجه $\mathbf{w}$ ، $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. أي أن L

يتكون من جميع المتجهات العمودية على كل متجه $\mathbf{w}$ ، $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ وأن $\mathbf{W}$ يتكون من جميع المتجهات العمودية على كل $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_1 \in L$. نقول في هذه الحالة أن المستوى و المستقيم متممان عموديان لبعضهما . نعمم الآن هذا المفهوم لأي ضرب داخلي .

تعريف (٥ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W}$ فضاءاً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$. وليكن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. نقول إن $\mathbf{v}$ عمودي على $\mathbf{W}$ إذا كان $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ لكل $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. وتسمى المجموعة $\mathbf{W}^{\perp} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W} \}$ المتمم العمودي للفضاء $\mathbf{W}$. (orthogonal complement of $\mathbf{W}$)

المبرهنة التالية تبين لنا أنه لإيجاد $\mathbf{W}^{\perp}$ يكفي أن نعين جميع المتجهات العمودية على مولدات $\mathbf{W}$.

مبرهنة (١١ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W} = \langle \{ \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \} \rangle$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$. إذا كان $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ حيث $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$ لكل $1 \le i \le m$ فإن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ لكل $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. عندئذٍ يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{w}_m$. ولذا فإن :

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{w}_m \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \alpha_1 \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \alpha_2 \mathbf{w}_2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}, \alpha_m \mathbf{w}_m \rangle \\
&= \alpha_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle + \cdots + \alpha_m \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_m \rangle = 0
\end{aligned}
$$

لأن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$ لكل $1 \le i \le m$. ♦

obeikandi.com

مبرهنة (١٢ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{W}$. فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$. فإن $\mathbf{W}^{\perp}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

البرهان

بما أن $0=\langle \mathbf{0}, \mathbf{w}\rangle$ لكل $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ فإن $\mathbf{0}\in\mathbf{W}^{\perp}$. لنفرض الآن أن $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in\mathbf{W}^{\perp}$ وأن $\alpha\in\mathbb{R}$. عندئذٍ لكل $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ يكون $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle=0$. ولذا فإن :

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle=0+0=0$$

$$\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle=\alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle=\alpha . 0=0$$

ومنه فإن $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{W}^{\perp}$ وأن $\alpha\mathbf{u}\in\mathbf{W}^{\perp}$. وبالتالي فإن $\mathbf{W}^{\perp}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$. ♦

يبين لنا المثال التالي كيفية إيجاد الفضاء الجزئي $\mathbf{W}^{\perp}$ بالاستعانة بالمبرهنة (١١، ٥).

مثال (٢٣ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W}$ الفضاء الجزئي من فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^4$ المولد بالمجموعة $\{\mathbf{w}_1=(1,-1,0,1), \mathbf{w}_2=(2,0,1,-1)\}$. عين $\mathbf{W}^{\perp}$.

الحل

إستناداً إلى المبرهنة (١١، ٥) نجد أنه إذا كان $\mathbf{w}=(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbf{W}^{\perp}$ فإن $0=\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_1\rangle=\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2\rangle$. ولذا فإن :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ 2x_1 \qquad + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن :

$$\mathbf{W}^{\perp}=\{s(1,1,-2,0)+t(0,1,1,1): s, t\in\mathbb{R}\}=\langle\{(1,-1,2,0),(0,1,1,1)\}\rangle$$

obeikandl.com

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة بين الفضاء الصفي ، الفضاء العمودي والفضاء الصفري لمصفوفة A وبين الفضاءات المتممة لها .

مبرهنة (١٣ ، ٥)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن :

(١) $(\text{row } A)^{\perp} = N(A)$ (٢) $(\text{col } A)^{\perp} = N(A^{T})$

حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي .

البرهان

(١) لنفرض أن $X \in N(A)$. عندئذٍ $AX = 0$. ولذا فإن X عمودي على جميع صفوف A . وبما أن row A مولدا بصفوف A فإن X عمودي على row A . وبالتالي فإن $N(A) \subseteq (\text{row } A)^{\perp}$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $X \in (\text{row } A)^{\perp}$ فإن X عمودي على جميع صفوف A . ومن ثم فإن $AX = 0$. أي أن $X \in N(A)$. وعليه فإن $(\text{row } A)^{\perp} \subseteq N(A)$. وبالتالي فإن $(\text{row } A)^{\perp} = N(A)$.

(٢) بما أن $\text{col } A = \text{row } A^{T}$ فإننا نجد باستخدام (١) أن :

$(\text{col } A)^{\perp} = (\text{row } A^{T})^{\perp} = N(A^{T})$. ♦

ليكن **W** فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي **V** ولتكن $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ أساساً متعامداً للفضاء **W** . وليكن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. بما أن المتجهات $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ تولد **W** فإن المتجه :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_m \rangle}{\|\mathbf{w}_m\|^2} \in \mathbf{W} \quad . \qquad (١)$$

وبما أن المتجه $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ عمودي على كل من $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ فإننا نجد بإستخدام المبرهنة (٩، ٥) أن $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^{\perp}$. وبالتالي يكون $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ حيث $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}$ و $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^{\perp}$. إضافة إلى ذلك فإن هذا التمثيل وحيد ، وذلك إذا كان $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ حيث

$\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}$ و $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^\perp$ تمثيلاً آخر فإن $\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\perp$. ولذا فإن $\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 = 0$. أي أن $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. ومنه فإن $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$. ونكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية والتي تسمى مبرهنة التفريق العمودي (orthogonal decomposition theorem) .

مبرهنة (١٤ ، ٥)

إذا كان $\mathbf{W}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ فإن $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp$. ♦

ملحوظات

(١) يسمى المتجه $\mathbf{v}_1$ الموصوف في (١) الإسقاط العمودي للمتجه $\mathbf{v}$ على $\mathbf{W}$ (orthogonal projection of $\mathbf{v}$ on $\mathbf{W}$) ويرمز له بالرمز $\text{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})$. كما يسمى المتجه $\mathbf{v}_2$ المركبة العمودية للمتجه $\mathbf{v}$ على $\mathbf{W}$ (orthogonal component of $\mathbf{v}$ on $\mathbf{W}$) ويرمز له بالرمز $\text{proj}_{\mathbf{W}^\perp}(\mathbf{v})$.

(٢) إذا كان V فضاء ضرب داخلي على أي حقل F (ليس بالضرورة $\mathbb{R}$) وكان $\mathbf{W}$ فضاءً جزئياً من V فإنه من الممكن إثبات أن $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp$ وأن $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp$ ولكن ليس بالضرورة أن يكون $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp$. والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٢٤ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W} = \{(0,0,0),(1,0,1)\}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الإقليدي $\mathbf{Z}_2^3$. عندئذٍ من السهل أن ترى أن $\mathbf{W}^\perp = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. وأن $\dim \mathbf{W} = 1$ و $\dim \mathbf{W}^\perp = 2$. ولذا فإن $3 = \dim \mathbf{Z}_2^3 = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp$. ولكن $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\perp = \{(1,0,1)\}$. وبالتالي فإن $\mathbf{Z}_2^3 \neq \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp$. □

obeikandi.com

مثال (٢٥ ، ٥)

ليكن $\mathbf{W}$ الفضاء الجزئي من فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات $\mathbf{v}_1=(1,1,1,1), \mathbf{v}_2=(1,0,0,0), \mathbf{v}_3=(1,1,0,1)$. وليكن $\mathbf{v}=(3,-1,0,2)\in\mathbb{R}^4$. أكتب $\mathbf{v}$ كمجموع متجهين إحداهما ينتمي إلى $\mathbf{W}$ والآخر إلى $\mathbf{W}^{\perp}$.

الحل

باستخدام خوارزمية جرام ـ شميت نستطيع تحويل $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ إلى أساس متعامد

$$\left\{\mathbf{u}_1=(1,1,1,1), \mathbf{u}_2=\frac{1}{4}(3,-1,-1,-1), \mathbf{u}_3=\frac{1}{3}(0,2,-1,-1)\right\}$$

للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ أنظر مثال (٢٢، ٥) . الآن :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1=\operatorname{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})&=\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1+\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2+\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_3\rangle}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3\\&=2(1,1,1,1)+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)-2\left(0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\\&=\left(3,3,\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)\end{aligned}$$

ولذا فإن $\mathbf{v}=\mathbf{w}_1+(\mathbf{v}-\mathbf{w}_1)$.

أي أن $(3,-1,0,2)=\left(3,3,\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)+\left(0,-4,-\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$. □

تمارين (٤ ، ٥)

في التمارين من (١) إلى (٥) أكتب المتجه $\mathbf{v}$ كمجموع متجهين أحدهما في الفضاء $\mathbf{W}$ والآخر في الفضاء $\mathbf{W}^{\perp}$ حيث $\mathbf{V}$ هو فضاء الضرب الإقليدي $\mathbb{R}^n$ المبين .

(١) $\mathbf{W}=\langle\{(2,5,-1),(-2,1,1)\}\rangle$ و $\mathbf{v}=(1,2,3)$.

(٢) $\mathbf{W} = \langle \{(1,3,-2),(5,1,4)\} \rangle$ و $\mathbf{v} = (1,3,5)$.

(٣) $\mathbf{W} = \langle \{(1,1,0,1),(-1,3,2,-1),(-1,0,1,1)\} \rangle$ و $\mathbf{v} = (4,3,3,-1)$.

(٤) $\mathbf{W} = \langle \{(0,0,-1,1),(0,1,1,1)\} \rangle$ و $\mathbf{v} = (1,0,1,1)$.

(٥) $\mathbf{W} = \langle \{(-1,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \rangle$ و $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$.

(٦) ليكن $\mathbf{W}$ هو الفضاء الجزئي من $\mathbf{P}_2$ المولد بالمجموعة $\{1, 2x-1\}$. أكتب $\mathbf{v}$ كمجموع متجهين أحدهما في الفضاء $\mathbf{W}$ والآخر في الفضاء $\mathbf{W}^{\perp}$ حيث فضاء الضرب الداخلي هو $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\,dx$ ، $\mathbf{v} = x^2 + 1$.

(٧) إذا كان $\mathbf{W}$ فضاءً جزئياً من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ و $\alpha \in \mathbf{R}$ فاثبت أن :

(أ) $\mathrm{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{v})$.

(ب) $\mathrm{proj}_{\mathbf{W}}(\alpha\, \mathbf{u}) = \alpha\, \mathrm{proj}_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$.