الفصل الرابع

فضاءات المتجهـات
VECTOR SPACES

(١ ، ٤) تعريف فضاء المتجهات
Definition of a Vector Space

قبل أن نقدم التعريف العام لفضاء المتجهات نقوم بدراسة بعض الحالات الخاصة التي تساعدنا على فهم ماهية فضاء المتجهات .

منذ أن أكتشف ديكارت (Descartes) الهندسة التحليلية في القرن السابع عشر أصبح من الطبيعي استخدام الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية لتمثيل نقاط المستوى ثنائي البعد والثلاثيات المرتبة لتمثيل نقاط الفضاء ثلاثي البعد . ولكن مع تطور الرياضيات أصبح من الواضح أن للعديد من النوع n (n – tuple) من الأعداد الحقيقية أهمية كبرى لا يمكننا التغاضي عنها ، ولقد رأينا بعض استخداماتها في الفصول الثلاث السابقة سواء كان هذا الاستخدام لتمثيل المصفوفات أو لوصف حلول الأنظمة الخطية .

سنركز اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة نظام جبري يعمم فكرة العديدات من النوع n ، ولنبدأ بالتعريف التالي :

تعريف (١ ، ٤)

ليكن $n \geq 1$. تسمى مجموعة العديدات من النوع n بالفضاء الإقليدي من النوع n ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}^n$. أي أن $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq n\}$.

ملحوظة

سنستخدم رمز الصف أو العمود للتعبير عن عناصر $\mathbb{R}^n$ وعندما يكون ذلك

واضحاً من المحتوى فإننا نقوم بذلك بحرية تامة .

أن عمليتي جمع عناصر $\mathbb{R}^n$ وضربها بعدد حقيقي ما هي إلا تعميم لعمليتي الجمع والضرب بعدد على $\mathbb{R}$ ونعرفها كالتالي :

تعريف (٢ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ وكان $\alpha\in\mathbb{R}$

فإننا نعرف :

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)$$
$$\alpha\,\mathbf{u}=(\alpha u_1,\alpha u_2,\dots,\alpha u_n)$$
$$\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)$$
$$-\mathbf{u}=(-u_1,-u_2,\dots,-u_n)$$
$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})=(u_1-v_1,u_2-v_2,\dots,u_n-v_n)\ .$$

المبرهنة التالية تقدم لنا الخواص الأساسية للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ والتي يمكن برهانها بسهولة باستخدام التعريف (٢ ، ٤) ونتركها للقارئ .

مبرهنة (١ ، ٤)

لكل $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ لدينا :

(١) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(٢) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.

(٣) $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$.

(٤) $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

(٥) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\,\mathbf{u}+\alpha\,\mathbf{v}$

(٦) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{v}=\alpha\,\mathbf{v}+\beta\,\mathbf{v}$.

(٧) $\alpha(\beta\,\mathbf{v})=(\alpha\beta)\,\mathbf{v}$.

◆ $1 . \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (٨)

إن الخواص الثمانية التي نصت عليها المبرهنة (١ ، ٤) ليست مقصورة على $\mathbb{R}^n$ فإذا رمزنا لمجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ بالرمز $\mathbf{M}_{mn}$ فإننا ن باستخدام المبرهنة (١ ، ١) أن $\mathbf{M}_{mn}$ تحقق هذه الخواص أيضا. في الحقيقة العديد من المجموعات تحقق الخواص المذكورة أعلاه ولذا فإنها تستحق أن يعطى اسماً خاصاً وهذا هو بالفعل موضوع دراستنا في هذا الفصل . ولذا فإننا بصدد تعري نظام رياضي يحقق بعض الخواص الهامة والتي يطلق عليها اسم مسلمات. إن تق التعريف على هذه الصورة إجراء متبع في الرياضيات حيث يتم التوصل إلى التعري العام لنظام رياضي معين من خلال اكتشاف أنظمة كثيرة تشترك في خواص ه ولذا يكون التعميم بتقديم نظام رياضي يضع جميع هذه الأنظمة في بوتقة وا ويضيف إليها مجموعات جديدة .

تعريف (٣ ، ٤)

يقال عن نظام $\mathbf{V}$ أنه فضاء متجهات (vector space) على مجموعة الأعداد الحقي $\mathbb{R}$ إذا كان مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين إحداهما عملية الجمع والأخرى عم الضرب بعدد حقيقي بحيث تحقق هاتين العمليتين الخواص التالية :

(١) خاصية الإغلاق لعملية الجمـع :

إذا كان كل من $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ فإن $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

(٢) الخاصية التجميعية للجمع :

$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ لكل $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

(٣) خاصية المحايد الجمعي :

يوجد عنصر $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث يكون

$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

(٤) لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ يوجد عنصر يرمز له بالرمز $-\mathbf{v}$ ويسمى نظير $\mathbf{v}$ الجمعي بحيث يكون $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=(-\mathbf{v})+\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(٥) الخاصية الإبدالية للجمع :

$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٦) خاصية الإغلاق لعملية الضرب بعدد :

إذا كان $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ وكان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن $\alpha\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٧) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\,\mathbf{u}+\alpha\,\mathbf{v}$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$.

(٨) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{v}=\alpha\,\mathbf{v}+\beta\,\mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(٩) $(\alpha\beta)\,\mathbf{v}=\alpha(\beta\,\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(١٠) $1.\mathbf{v}=\mathbf{v}$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

ملحوظات

(١) يطلق على عناصر $\mathbf{V}$ اسم المتجهات .

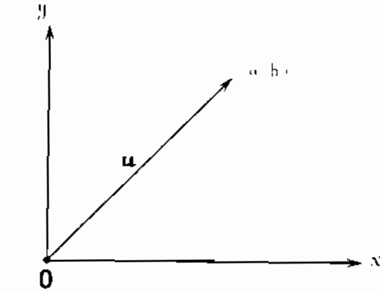
(٢) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ فإننا نعرف الفرق بينهما كالتالي : $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$.

مثال (١ ، ٤)

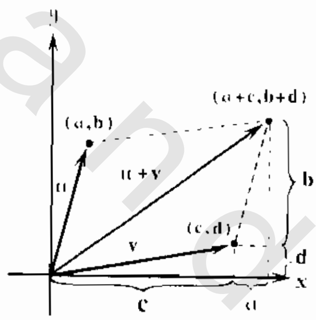
باستخدام المبرهنة (١ ، ٤) نجد أن $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات لكل $n\geq 1$. □

ملحوظة

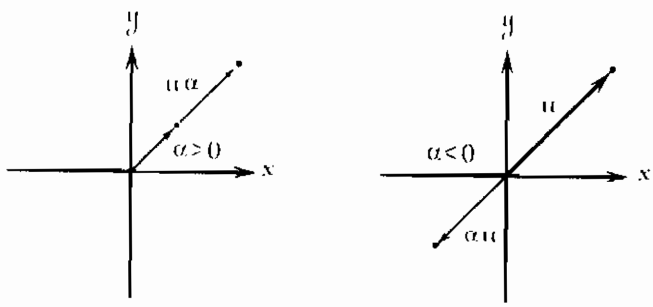
في الحالة الخاصة عندما $n=2$ فإنه وكما أسلفنا نستطيع التعبير عن عناصر $\mathbb{R}^2$ كمتجهات في المستوى الإقليدي ، فمثلاً إذا كان $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ فإن $\mathbf{u}$ ما هو إلا القطعة الموجهة المستقيمة في المستوى الذي بدايتها نقطة الأصل $(0,0)$ ونهايتها النقطة (a,b) كما يوضح ذلك الشكل :



أما عملية الجمع فإنها عبارة عن جمع متجهات . أي أنه إذا كان $\mathbf{u}=(a,b),\mathbf{v}=(c,d)\in\mathbb{R}^n$ فإن $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a+c,b+d)$ هو المتجه الذي مبدأه نقطة الأصل ونهايته النقطة $(a+c,b+d)$ والذي يمثله قطر متوازي الأضلاع كما هو موضح في الشكل :



كذلك إذا كان $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ وكان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن $\alpha\,\mathbf{u}=(\alpha a,\alpha b)$ هو المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة $(\alpha a,\alpha b)$. فإذا كان $\alpha>0$ فإن $\alpha\,\mathbf{u}$ يكون بنفس إتجاه $\mathbf{u}$ ، أما إذا كان $\alpha<0$ فإن $\alpha\,\mathbf{u}$ يكون بعكس إتجاه $\mathbf{u}$ كما هو مبين في الشكلين :



مثال (٢ ، ٤)

المبرهنة (١ ، ١) تبين لنا أن مجموعة المصفوفات $\mathbf{M}_{mn}$ تشكل فضاء متجهات . □

مثال (٣ ، ٤)

المجموعة $\mathbf{V}=\{(x,x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ تشكل فضاء متجهات حيث عمليتي الضرب بعدد والجمع هما العمليتان المعرفتان على $\mathbb{R}^3$. □

الحل

بما أن الخواص (٢) ، (٣) ، (٧) ، (٨) ، (٩) و (١٠) محققة في $\mathbb{R}^3$ فإنها محققة أيضاً في $\mathbf{V}$. ولذا فإننا يجب أن نتحقق من صحة الخواص الباقية . لنفرض أن $\mathbf{u}=(x,x,y)$ و $\mathbf{v}=(x_1,x_1,y_1)$ عنصران من $\mathbf{V}$ وأن $\alpha\in\mathbb{R}$. عندئذٍ :

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\left(x+x_1\,,\,x+x_1\,,\,y+y_1\right)\in\mathbf{V}$$

$$\alpha\,\mathbf{u}=\left(\alpha\,x\,,\alpha\,x\,,\alpha\,y\right)\in\mathbf{V}$$

ولذا فإن $\mathbf{V}$ يحقق الخاصيتين (١) و (٦) .

لاحظ أن $\mathbf{0}=(0,0,0)\in\mathbf{V}$ وأن $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. لذا فإن الخاصية (٤) محققة . كذلك إذا كان $\mathbf{u}=(x,x,y)\in\mathbf{V}$ فإن $-\mathbf{u}=(-x,-x,-y)\in\mathbf{V}$.

كما أن $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$. ولذا فإن الخاصية (٥) محققة أيضاً . □

من أهم الأمثلة على فضاء المتجهات هي مجموعة كثيرات الحدود . ولذا فإننا نذكر القارىء بالخصائص الأساسية لكثيرات الحدود . تعرف كثيرة الحدود من الدرجة n في المتغير x على أنها الصيغة :

$$p(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^{2}+\cdots+a_n\,x^{n}$$

حيث $a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ تسمى معاملات كثيرة الحدود و $a_n\neq 0$. كثيرة الحدود الصفرية هي كثيرة الحدود التي تكون جميع معاملاتها أصفاراً وفي هذه الحالة فإن درجتها غير معرفة . سنرمز لمجموعة كثيرات الحدود بالرمز $\mathbf{P}$. إذا كانت كل من

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

كثيرة حدود (من الجائز أن تكون درجتاهما مختلفتان) فإنهما تكونان متساويتين ونكتب $p(x) = q(x)$ إذا وفقط إذا كان $a_i = b_i$ لكل i.

وتعرف عمليتا الجمع والضرب بعدد على $\mathbf{P}$ كالتالي :

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$$

$$\alpha p(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + ...$$

من الواضح أنه إذا كانت $p(x), q(x) \in \mathbf{P}$ وكان $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $p(x) + q(x) \in \mathbf{P}$. كما أن $\alpha p(x) \in \mathbf{P}$. كذلك من السهولة التحقق من أن $\mathbf{P}$ تتمتع بجميع خواص فضاء المتجهات ولذا يكون لدينا المثال التالي :

مثال (٤ ، ٤)

تشكل مجموعة كثيرات الحدود $\mathbf{P}$ في المتغير x فضاء متجهات . □

توجد مجموعات أخرى مهمة من كثيرات الحدود والتي تشكل فضاءات متجهات ، إحداها هي المجموعة $\mathbf{P}_n$ التي تتكون من جميع كثيرات الحدود التي درجة كل منها على الأكثر n مضافاً إليها كثيرة الحدود الصفرية . إذن يكون لدينا :

مثال (٥ ، ٤)

$\mathbf{P}_n$ فضاء متجهات لكل $n \geq 0$. □

مثال (٦ ، ٤)

لتكن $\mathbf{F}[a, b]$ هي مجموعة جميع الدوال الحقيقية التي مجالها الفترة المغلقة $[a, b]$. أي أن $\mathbf{F}[a, b] = \{f : f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$. من السهل التحقق من أن $\mathbf{F}[a, b]$ فضاء متجهات حيث عمليتي الجمع والضرب بعدد معرفتان كالتالي :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha [f(x)]$$

لكل $f, g \in \mathbf{F}[a,b]$ ولكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ولكل $x \in [a,b]$. □

مثال (٧ ، ٤)

إذا كانت $\mathbf{V}$ مجموعة تتكون من عنصر واحد فقط هو $\mathbf{0}$ فإن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات (يسمى الفضاء الصفري ويرمزله بالرمز $\mathbf{0}$) حيث عمليتي الجمع والضرب بعدد معرفتان كالتالي $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ و $\alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$. □

من الممكن القول أن جميع الأمثلة التي قدمناها على فضاءات المتجهات متوقعة وطبيعية. إليك هذا المثال الغريب نوعاً ما .

مثال (٨ ، ٤)

إذا كانت $\mathbf{V} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ وكانت عمليتا الجمع والضرب بعدد معرفين كالتالي

$$x \oplus y = x\,y$$

$$\alpha \otimes x = x^{\alpha}$$

لكل $x, y \in \mathbf{V}$ ولكل $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات لأن :

(١) بما أن حاصل ضرب أي عددين موجبين عدداً موجب فإن $x \oplus y \in \mathbf{V}$.

(٢) $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y\,z) = x\,(y\,z) = (x \oplus y)\,z = (x \oplus y) \oplus z$.

(٣) المحايد الجمعي هو العدد 1 لأن : $1 \oplus x = 1\,x = x$.

(٤) نظير العنصر x هو $\frac{1}{x}$ لأن : $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

(٥) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(٦) بما أن رفع العدد الموجب إلى أي قوة يبقى موجباً فإن $\alpha \otimes x \in \mathbf{V}$.

(٧) $\alpha \otimes (x \oplus y) = \alpha \otimes (x\,y) = (x\,y)^{\alpha} = x^{\alpha}\,y^{\alpha} = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$.

(٨) $(\alpha + \beta) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\,x^{\beta} = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$.

(٩) $(\alpha\beta)\otimes x = x^{\alpha\beta} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = \alpha\otimes(\beta\otimes x)$.

(١٠) $1\otimes x = x^{1} = x$.

ولذا فإن جميع خواص التعريف (٣ ، ٤) متحققة . □

لقد كانت جميع أمثلتنا في هذا البند لمجموعات تشكل فضاء متجهات . نقدم الآن بعض الأمثلة على مجموعات ليست فضاء متجهات .

مثال (٩ ، ٤)

إذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب بعدد على $\mathbb{R}^2$ كالتالي :

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ و $\alpha(a,b)=(\alpha a,b)$ فإن $\mathbb{R}^2$ لا يشكل مع هاتين العمليتين فضاء متجهات وذلك لأن الخاصية (٨) (على سبيل المثال) غير متحققة لأن $\alpha(a,b)+\beta(a,b)=(\alpha a,b)+(\beta a,b)=((\alpha+\beta)a,2b)$. كما أن $(\alpha+\beta)(a,b)=((\alpha+\beta)\ a,b)$. ولذا لكي يكون :

$\alpha(a,b)+\beta(a,b)=(\alpha+\beta)(a,b)$ فإنه لابد وأن يكون $b=2b$ وهذا ليس صحيحاً إلا إذا كان $b=0$. □

مثال (١٠ ، ٤)

إذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب بعدد على $\mathbb{R}^2$ كالتالي :

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ و } \alpha(a,b)=\left(|\alpha|a,|\alpha|b\right)$$

فإن $\mathbb{R}^2$ لا يشكل مع هاتين العمليتين فضاء متجهات وذلك لأن الخاصية (٨) (على سبيل المثال) غير متحققة لأننا لو أخذنا $\alpha=1$ ، $\beta=-1$ و $(a,b)=(2,3)$ فإننا نجد أن $(\alpha+\beta)(a,b)=(1-1)(2,3)=0(2,3)=(0,0)$. ولكن

$$\alpha(a,b)+\beta(a,b)=1(2,3)+(-1)(2,3)=(2,3)+(2,3)$$
$$=(4,6)\neq(0,0)$$

ولذا فإن الخاصية (٨) غير متحققة . □

ننهي هذا البند بتقديم بعض الخواص الأساسية لفضاء المتجهات .

مبرهنة (٢ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ حيث $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ فإن $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

البرهان

باستخدام التعريف (٣ ، ٤) نجد أن :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w} &\Rightarrow (-\mathbf{u})+(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(-\mathbf{u})+(\mathbf{u}+\mathbf{w})\\ &\Rightarrow (-\mathbf{u}+\mathbf{u})+\mathbf{v}=(-\mathbf{u}+\mathbf{u})+\mathbf{w}\\ &\Rightarrow \mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{w}\\ &\Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{w}\end{aligned}$$

وهو ما نود برهانه . ♦

مبرهنة (٣ ، ٤)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وليكن $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ عندئذ :

(١) $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(٢) $\alpha\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(٣) إذا كان $\alpha\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$ فإن $\alpha=0$ أو $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(٤) $(-1)\,\mathbf{v}=-\mathbf{v}$.

(٥) $(-\alpha)\,\mathbf{v}=-(\alpha\,\mathbf{v})=\alpha(-\mathbf{v})$.

البرهان

(١) لاحظ أن $0\,\mathbf{v}=(0+0)\,\mathbf{v}=0\,\mathbf{v}+0\,\mathbf{v}$. وبإضافة $-0\,\mathbf{v}$ للطرفين نجد أن :

$$0\,\mathbf{v}+(-0\,\mathbf{v})=(0\,\mathbf{v}+0\,\mathbf{v})+(-0\,\mathbf{v}).$$

وهـذا يقتضي أن $(\mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}))$. ولذا فإن $0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. وبالتالي فإن $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(٢) بما أن $\alpha\,\mathbf{0} = \alpha\,(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \alpha\,\mathbf{0} + \alpha\,\mathbf{0}$. فبإضافة $-\alpha\,\mathbf{0}$ للطرفين نحصل على $\alpha\,\mathbf{0} + (-\alpha\,\mathbf{0}) = (\alpha\,\mathbf{0} + \alpha\,\mathbf{0}) + (-\alpha\,\mathbf{0})$. ولذا فإن :

$\mathbf{0} = \alpha\,\mathbf{0} + (\alpha\,\mathbf{0} + (-\alpha\,\mathbf{0})) = \alpha\,\mathbf{0} + \mathbf{0}$. وبالتالي فإن $\alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(٣) لنفرض أن $\alpha\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ وأن $\alpha \neq 0$. سنبرهن $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. الآن بما أن $\alpha\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ فإن $\frac{1}{\alpha}.\alpha\,\mathbf{v} = \frac{1}{\alpha}.\mathbf{0}$. وبالتالي فإن $1\mathbf{v} = \mathbf{0}$. أي أن $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(٤) بما أن $\mathbf{0} = 0\mathbf{v} = (1 + (-1))\,\mathbf{v} = \mathbf{v} + (-1)\,\mathbf{v}$ فإن :

$$-\mathbf{v} + \mathbf{0} = -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}) = (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-1)\,\mathbf{v} = 0 + (-1)\,\mathbf{v} = (-1)\,\mathbf{v}$$

ولكن $-\mathbf{v} + \mathbf{0} = -\mathbf{v}$. وبالتالي فإن $-\mathbf{v} = (-1)\,\mathbf{v}$.

(٥) لاحظ أن $\mathbf{0} = 0\mathbf{v} = (-\alpha + \alpha)\,\mathbf{v} = (-\alpha)\,\mathbf{v} + (\alpha\,\mathbf{v})$. وبإضافة $(-\alpha)\,\mathbf{v}$ نجد أن $(-\alpha)\,\mathbf{v} = -(\alpha\,\mathbf{v})$ وبالمثل $\alpha(-\mathbf{v}) = -\alpha\,\mathbf{v}$. ♦

تمارين (١ ، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٢٠) بين أياً من المجموعات مع العمليتين المعرفتين عليها تشكل فضاء متجهات على $\mathbf{R}$.

(١) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ ، $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1)$ و $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

(٢) $\mathbf{V} = \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbf{R}\}$ ، $\alpha(x_1, 0, x_3) = (\alpha x_1, 0, x_3)$ و $(x_1, 0, x_3) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3)$.

(٣) $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ مع جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٤) $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$ مع جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٥) $\mathbf{V}=\{A: A\in \mathbf{M}_{23}$ و $\sum a_{ij}=0\}$ مع جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٦) $\mathbf{V}=\{p\in \mathbf{P}_n : p(1)+p(6)-p(2)=0\}$ مع جمع وضرب كثيرات الحدود بعدد .

(٧) $\mathbf{V}=\{p\in \mathbf{P}_n : p(1)+p(6)-p(2)=1\}$ مع جمع وضرب كثيرات الحدود بعدد .

(٨) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ و $\alpha(x,y,z)=(0,0,0)$.

(٩) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ و $\alpha(x,y)=(2\alpha x,2\alpha y)$.

(١٠) $\mathbf{V}=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد الاعتياديتين على $\mathbb{R}^2$.

(١١) $\mathbf{V}=\{(x,y) : x\ge 0\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد الاعتياديتين على $\mathbb{R}^2$.

(١٢) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $(x,y)+(x_1,y_1)=(x+x_1+1,y+y_1+1)$ و $\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$.

(١٣) $\mathbf{V}=\left\{\begin{bmatrix} a & 1\\ 1 & b\end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ مع جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(١٤) $\mathbf{V}=\{f\in \mathbf{F}[0,2] : f(1)=0\}$ وعمليتي الجمع والضرب بعدد كما في المثال (٦ ، ٤) .

(١٥) $\mathbf{V}=\{(a,a,-a) : a\in\mathbb{R}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد الاعتياديتين على $\mathbb{R}^3$.

(١٦) $\mathbf{V}=\{(a,1,-a) : a\in\mathbb{R}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد الاعتياديتين على $\mathbb{R}^3$.

(١٧) $\mathbf{V}=\{a_0+a_1(x+1): a_0,a_1\in\mathbb{R}\}$ مع جمع وضرب كثيرات الحدود بعدد.

(١٨) $\mathbf{V}=\{a_0+x+1: a_0\in\mathbb{R}\}$ مع جمع وضرب كثيرات الحدود بعدد .

(١٩) $\mathbf{V}=\{A\in \mathbf{M}_{33} : A=A^{T}\}$ مع جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٢٠) $\mathbf{V}=\{(a,b,c)\in \mathbb{R}^3 : a+b+c=4\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد الاعتياديتين على $\mathbb{R}^3$.

(٢١) إذا كان $\mathbf{V}=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} : a_1+a_2+a_3=c\right\}$ فجد قيم c التي تجعل $\mathbf{V}$ فضاء متجهات مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٢٢) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكان $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ و كان $\alpha\in\mathbb{R}$ فأثبت أن $\alpha(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\cdots+\mathbf{v}_n)=\alpha\mathbf{v}_1+\alpha\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha\mathbf{v}_n$.

(٢٣) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات ، وليكن $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(أ) إذا كان $\alpha\mathbf{v}=\beta\mathbf{v}$ حيث $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ فأثبت أن $\alpha=\beta$.

(ب) إذا كان $\alpha\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}$ حيث $\alpha\neq 0$ فأثبت أن $\mathbf{v}=\mathbf{u}$.

(٢٤) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات غير صفري فأثبت أن $\mathbf{V}$ يحتوي على عدد غير منته من المتجهات .

(٢٥) لتكن $A\in\mathbf{M}_{mn}$ وليكن $\mathbf{V}=\{AX : X\in\mathbf{M}_{n1}\}$ أثبت أن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات بعدد .

(٢ ، ٤) الفضاءات الجزئية

Subspaces

في أغلب الأحيان تظهر فضاءات المتجهات الهامة كمجموعات جزئية من فضاءات متجهات أكبر . في هذا البند سيكون إهتمامنا مقصوراً على دراسة المجموعات الجزئية من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ التي هي في الوقت نفسه تشكل فضاء متجهات بالنسبة لنفس العمليتين المعرفتين على $\mathbf{V}$.

تعريف (٤ ، ٤)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ ولتكن $\mathbf{W}$ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbf{V}$. نقول إن $\mathbf{W}$ فضاء جزئي (subspace) من $\mathbf{V}$ ونكتب $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ إذا كان $\mathbf{W}$ فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ وذلك بالنسبة لنفس العمليتين المعرفتين على $\mathbf{V}$.

لإثبات أن مجموعة جزئية من فضاء متجهات هي فضاء جزئي يلزمنا وفق التعريف (٤ ، ٤) التحقق من الخواص الواردة في التعريف (٣ ، ٤) الأمر الذي يبدو مرهقاً ولكن لحسن الحظ لدينا طريقة أسهل لعمل ذلك تزودنا به المبرهنة التالية :

مبرهنة (٤ ، ٤)

إذا كانت $\mathbf{W}$ مجموعة جزئية من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإن $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

(١) $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$.

(٢) إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ فإن $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbf{W}$.

(٣) إذا كان $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ وكان $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha\, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$.

البرهان

إذا كان $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ فإنه من الواضح أن $\mathbf{W}$ يحقق الشروط الثلاثة المنصوص عليها . ولبرهان العكس نفرض أن $\mathbf{W}$ يحقق الشروط الثلاثة . لإثبات أن $\mathbf{W}$ فضاء جزئي فإنه يلزمنا أن نتأكد من أن $\mathbf{W}$ يحقق الخواص المبينة في التعريف (٣، ٤) . من الواضح أن كلاً من (١) و (٦) متحققة فرضاً . وبما أن $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$ فإن (٣) متحققة . ولكن باستخدام الشرط (٣) نجد أن $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ لكل $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. ولذا فإن (٤) متحققة . أما الخواص (٢) ، (٣) ، (٥) ، (٧) ، (٨) ، (٩) و (١٠) فهي

متحققة تلقائياً وذلك لأن $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. وبالتالي فإن جميع خواص التعريف (٣ ، ٤) متحققة . أي أن $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$. ♦

ملحوظات

(١) من الممكن الإستغناء عن الشرط (١) في المبرهنة (٤ ، ٤) إذا إفترضنا أن $\mathbf{W} \neq \Phi$.

(٢) من الممكن إستبدال الشرطين (٢) و (٣) في المبرهنة (٤ ، ٤) بشرط واحد مكافىء وهو $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ لكل $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ولكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (لماذا ؟) .

مثال (١١ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات فإنه من الواضح أن $\mathbf{V} \leq \mathbf{V}$. ولذا فإن $\mathbf{V}$ هو أكبر فضاء جزئي من $\mathbf{V}$. كذلك $\{0\} \leq \mathbf{V}$ وهو أصغر فضاء جزئي من $\mathbf{V}$. □

مثال (١٢ ، ٤)

لتكن $\mathbf{X} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. عندئذ $\mathbf{X} \leq \mathbb{R}^2$ وذلك لأن :

(١) $(0, 0) \in \mathbf{X}$.

(٢) $(x, 0) + (x_1, 0) = (x + x_1, 0) \in \mathbf{X}$ لكل $(x, 0), (x_1, 0) \in \mathbf{X}$.

(٣) $\alpha (x, 0) = (\alpha x, 0) \in \mathbf{X}$ لكل $(x, 0) \in \mathbf{X}$ ولكل $\alpha \in \mathbb{R}$.

وبالمثل يمكن إثبات أن $\mathbf{Y} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$.

لاحظ أن كلاً من $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ ما هي إلا مجموعة النقاط على المحور السيني والمحور الصادي في المستوى الديكارتي $\mathbb{R}^2$. □

مثال (١٣ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{W}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by=0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ فإن $\mathbf{W}\le\mathbb{R}^2$ وذلك لأن :

(١) $a0+b0=0$. ولذا فإن $(0,0)\in\mathbf{W}$.

(٢) إذا كـان $(x,y),(x_1,y_1)\in\mathbf{W}$ فـإن $ax+by=0$ وأن $ax_1+by_1=0$. ولـذا فإن $a(x+x_1)+b(y+y_1)=(ax+by)+(ax_1+by_1)=0+0=0$.

إذن ، $(x,x_1)+(y,y_1)=(x+x_1,y+y_1)\in\mathbf{W}$.

(٣) إذا كان $(x,y)\in\mathbf{W}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن $ax+by=0$. ولذا فإن $\alpha(ax+by)=0$. ومنه فإن $\alpha(x,y)\in\mathbf{W}$.

لاحظ أن $\mathbf{W}$ ما هو إلا مجموعة نقاط المستقيم المار بنقطة الأصل في المستوى الديكارتي $\mathbb{R}^2$. □

ملحوظة

لاحظ أولاً أن المثال (١٢ ، ٤) حالة خاصة من المثال (١٣ ، ٤) . سنثبت لاحقاً أن الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}^2$ هي فقط $\{(0,0)\}$ ، $\mathbb{R}^2$ والفضاء الوارد في المثال (١٣ ، ٤) .

مثال (١٤ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\}$ فإن $\mathbf{W}\le\mathbb{R}^3$ وذلك لأن :

(١) $a0+b0+c0=0$. ولذا فإن $(0,0,0)\in\mathbf{W}$.

(٢) إذا كان $(x,y,z),(x_1,y_1,z_1)\in\mathbf{W}$ فإن $ax+by+cz=0$ وأن $ax_1+by_1+cz_1=0$. ولذا فإن :

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c(z+z_1)=(ax+by+cz)+(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

ومن ثم فإن $(x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)\in\mathbf{W}$.

(٣) إذا كـان $ax+by+cz=0$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فـإن $\alpha(ax+by+cz)=0$. ولـذا فـإن $\alpha(x,y,z)\in \mathbf{W}$. لاحـظ أن $\mathbf{W}$ يمثل مستوٍ ماراً بنقطة الأصل في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$. $\square$

ملحوظة

سنبرهن لاحقاً أن الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}^3$ هي $\mathbb{R}^3$ ، $\{(0,0,0)\}$ ، المستقيمات المارة بنقطة الأصل وكذلك المستويات المارة بنقطة الأصل .

مثال (١٥ ، ٤)

لنفرض أن $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$. عندئذٍ $\mathbf{W}\le \mathbf{M}_{22}$ وذلك لأن :

(١) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\in \mathbf{W}$.

(٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{bmatrix},\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c\end{bmatrix}\in \mathbf{W}$ فإن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & -(a+c)\end{bmatrix}\in \mathbf{W} .$$

(٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{bmatrix}\in \mathbf{W}$ وكان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن :

$$\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & -\alpha a\end{bmatrix}\in \mathbf{W} . \square$$

مثال (١٦ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ ولتكن $\mathbf{W}=\{X\in \mathbf{M}_{n1} : AX=0\}\subseteq \mathbf{M}_{n1}$. عندئذٍ $\mathbf{W}\le \mathbf{M}_{n1}$ وذلك للأسباب التالية :

(١) بما أن $A0=0$ فإن $0\in \mathbf{W}$.

(٢) إذا كان $X_1 , X_2 \in \mathbf{W}$ فإن :

$A (X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$. ولذا فإن $X_1 + X_2 \in \mathbf{W}$.

(٣) إذا كان $X \in \mathbf{W}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $A (\alpha X) = \alpha (AX) = \alpha 0 = 0$. ولذا فإن $\alpha X \in \mathbf{W}$. □

ملحوظة

لاحظ أنه يمكن إعتبار الفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ المقدم في المثال (٤،١٦) كفضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$. يسمى هذا الفضاء فضاء الحل للنظام المتجانس $AX = 0$ أو الفضاء الصفري للمصفوفة A وسيكون له أهمية كبرى في دراستنا المقبلة .

مثال (٤ ، ١٧)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ولتكن $\mathbf{W} = \{AX : X \in \mathbf{M}_{n1}\} \subseteq \mathbf{M}_{m1}$.

عندئذٍ $\mathbf{W} \leq \mathbf{M}_{m1}$ وذلك للأسباب التالية :

(١) بما أن $A\,0 = 0$ فإن $0 \in \mathbf{W}$.

(٢) إذا كان $AX_1 , AX_2 \in \mathbf{W}$ فإن $AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2)$.

ولذا فإن $AX_1 + AX_2 \in \mathbf{W}$.

(٣) إذا كان $AX \in \mathbf{W}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha (AX) = A(\alpha X)$. ولذا فإن $\alpha (AX) \in \mathbf{W}$. □

ملحوظة

لاحظ أنه يمكن اعتبار $\mathbf{W}$ المقدم في المثال (٤،١٧) فضاء جزئياً من $\mathbb{R}^m$. يسمى هذا الفضاء فضاء صورة المصفوفة A .

مثال (٤ ، ١٨)

ليكن $\mathbf{P}$ فضاء كثيرات الحدود وليكن $\mathbf{W} = \{ p (x) \in \mathbf{P} : p (3) = 0\} \subseteq \mathbf{P}$.

عندئذٍ $\mathbf{W}$ فضاء جزئي من $\mathbf{P}$ وذلك للأسباب التالية :

(١) بما أن $0(3)=0$ فإن $0\in\mathbf{W}$.

(٢) لنفرض أن $p(x), q(x)\in\mathbf{W}$. عندئذٍ، $p(3)=q(3)=0$. ولذا فإن :

$(p+q)(3)=p(3)+q(3)=0+0=0$. ومنه فإن $p(x)+q(x)\in\mathbf{W}$.

(٣) إذا كان $p(x)\in\mathbf{W}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن $p(3)=0$. ولذا فإن :

$(\alpha p)(3)=\alpha p(3)=\alpha .0=0$. وبالتالي فإن $\alpha p(x)\in\mathbf{W}$. □

مثال (٤ ،١٩)

لتكن $\mathbf{D}[a,b]$ مجموعة جميع الدوال القابلة للإشتقاق على الفترة المغلقة $[a,b]$.
عندئذٍ $\mathbf{D}[a,b]\le\mathbf{F}[a,b]$ وذلك لأن :

(١) الدالة الصفرية قابلة للاشتقاق ولذا فإن $0\in\mathbf{D}[a,b]$.

(٢) إذا كانت كل من f و g قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ فإن $f+g$ كذلك وأن $f'+g'=(f+g)'$. ولذا فإن $f+g\in\mathbf{D}[a,b]$.

(٣) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ وكان $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن αf قابلة للاشتقاق على $[a,b]$. كما أن $(\alpha f)'=\alpha f'$. وبالتالي $\alpha f\in\mathbf{D}[a,b]$. □

مثال (٤ ، ٢٠)

لتكن $\mathbf{W}$ مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين على $[a,b]$ والتي تحقق $f''+f=0$. عندئذ $\mathbf{W}\le\mathbf{F}[a,b]$ وذلك لأن :

(١) $0''+0=0+0=0$ ولذا فإن $0\in\mathbf{W}$.

(٢) إذا كانت $f,g\in\mathbf{W}$ فإن :

$(f+g)''+(f+g)=f''+g''+f+g=(f''+f)+(g''+g)=0+0=0$.

ولذا فإن $f+g\in\mathbf{W}$.

(٣) إذا كانت $f\in\mathbf{W}$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن :

$(\alpha f)'' + \alpha f = \alpha f'' + \alpha f = \alpha (f'' + f) = \alpha .0 = 0$. أي أن $\alpha f \in \mathbf{W}$. □

مثال (٢١ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{(x, x+1) : x \in \mathbf{R}\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbf{R}^2$ وذلك لأن $(0,0) \notin \mathbf{W}$. □

مثال (٢٢ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 :$ صحيح عدد $a_0\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbf{P}_2$ وذلك لأنه ، على سبيل المثال ، $2 + 3x + \frac{1}{3}x^2 \in \mathbf{W}$ و $\frac{1}{3} \in \mathbf{R}$ ولكن $\frac{1}{3}(2 + 3x + \frac{1}{3}x^2) = \frac{2}{3} + x + \frac{1}{9}x^2 \notin \mathbf{W}$. □

مثال (٢٣ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : a = b = 0$ أو $a \neq 0, b \neq 0\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ لأنه ، على سبيل المثال ، $(2,3), (-2, 5) \in \mathbf{W}$ ولكن $(2,3) + (-2,5) = (0,8) \notin \mathbf{W}$. □

تمارين (٢، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٣٠) بين أياً من المجموعات الجزئية هي فضاء جزئي من فضاء المتجهات المعطى :

(١) $\mathbf{W} = \{(a, b, a - 2b) : a, b \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

(٢) $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \right\} \subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٣) $\mathbf{W} = \{ A \in \mathbf{M}_{22} : \det A = 0 \} \subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٤) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:A^2=A\right\}\subseteq\mathbf{M}_{22}$.

(٥) $\mathbf{W}=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbf{P}_2:a_0+a_1+a_2=0\right\}\subseteq\mathbf{P}_2$.

(٦) $\mathbf{W}=\left\{f\in\mathbf{F}[0,2]:f(1)=0\right\}\subseteq\mathbf{F}[0,2]$.

(٧) $\mathbf{W}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x+3y=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

(٨) $\mathbf{W}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y=1\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

(٩) $\mathbf{W}=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbf{P}_2:a_1=1,a_0=a_2\right\}\subseteq\mathbf{P}_2$.

(١٠) $\mathbf{W}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a+b=c=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

(١١) $\mathbf{W}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a-b-c=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$

(١٢) $\mathbf{W}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a+b=1,c=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$

(١٣) $\mathbf{W}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:ab=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

(١٤) $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix}3&a&3\\a&b&a\end{bmatrix}:a,b,\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbf{M}_{23}$.

(١٥) $\mathbf{W}=\left\{f\in\mathbf{F}[0,1]:f(0)=f(1)\right\}\subseteq\mathbf{F}[0,1]$.

(١٦) $\mathbf{W}=\left\{f:f(0)=1\right\}\subseteq\mathbf{F}[0,1]$.

(١٧) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:A=-A^T\right\}\subseteq\mathbf{M}_{22}$.

(١٨) $\mathbf{W}=\left\{X\in\mathbf{M}_{22}:AX=XA\right\}\subseteq M_{22}$ حيث $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$.

(١٩) $\mathbf{W}=\left\{x\,p(x):p(x)\in\mathbf{P}_2\right\}\subseteq\mathbf{P}_3$.

(٢٠) $\mathbf{W}=\left\{x\,p(x)+(1-x)\,q(x):p(x),q(x)\in\mathbf{P}_2\right\}\subseteq\mathbf{P}_3$.

(٢١) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:A=A^T\right\}\subseteq\mathbf{M}_{22}$.

(٢٢) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:AB=0\right\}\in\mathbf{M}_{22}$ حيث B مصفوفة من الدرجة 2 .

(٢٣) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:BAC=CAB\right\}\in\mathbf{M}_{22}$. حيث B و C مصفوفتان من الدرجة 2 .

(٢٤) $\mathbf{W}=\left\{f\in\mathbf{F}[0,1]:f(x)=f(y)\ \forall x,y\in[0,1]\right\}\subseteq\mathbf{F}[0,1]$.

(٢٥) $W = \left\{ f \in \mathbf{F}[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\} \subseteq \mathbf{F}[0,1]$.

(٢٦) $W = \left\{ (a,b,c,d) : a^2 + b^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(٢٧) $W = \left\{ (a+2b, a, 2a-b, b) : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(٢٨) $W = \left\{ (a,b,c,d) : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(٢٩) $W = \{ A \in \mathbf{M}_{33} :$ مثلية علوية $A \} \subseteq \mathbf{M}_{33}$.

(٣٠) $W = \{ A \in \mathbf{M}_{nn} : tr(A) = 0 \} \subseteq \mathbf{M}_{nn}$.

(٣١) إذا كان كل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ فأثبت أن $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٣٢) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئيا من $\mathbf{V}$.

(أ) بين أن $\mathbf{W} \cup \mathbf{U}$ قد لا يكون فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$.

(ب) أثبت أن $\mathbf{W} \cup \mathbf{U}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ أو $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

(٣٣) ليكن كل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$.

(أ) أثبت أن $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \{ \mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{w} \in \mathbf{W} \}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(ب) إذا كان $\mathbf{W}_1 \leq \mathbf{V}$ حيث $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}_1 , \mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_1$ فأثبت أن $\mathbf{U} + \mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_1$.

(٣٤) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات يحتوي على أكثر من متجهين وليكن $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ حيث لا يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{v}_1 = \alpha\, \mathbf{v}_2$. أثبت أن $\mathbf{W} = \{ \mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 : k \in \mathbb{R} \}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ ومن ثم استنتج أن $\mathbf{V}$ يحتوي على عدد غير منته من الفضاءات الجزئية.

(٣ ، ٤) التركيبات الخطية و المجموعات المولدة

Linear Combination and Spanning Sets

يعتمد موضوع الجبر الخطي في مجمله على مفهومين أساسيين ، أولهما مفهوم المجموعة الجزئية من فضاء المتجهات التي تولد هذا الفضاء. أما المفهوم الثاني فهو الاستقلال الخطي لمجموعة من العناصر والذي سنقدمه في البند التالي ونقصر هذا البند على المفهوم الأول ، **ولذا فإننا نحث القارئ أن يبذل جهداً مضاعفاً لاستيعاب هذين المفهومين إستيعابا جيدا وذلك كي يتسنى له فهم ما تبقى من موضوعات هذا الكتاب .**

لقد قدمنا في الفصل الثالث مفهوم التركيب الخطي لمجموعة من المصفوفات العمودية أو الصفية وهذا المفهوم ما هو إلا حالة خاصة من التعريف التالي :

تعريف (٥ ، ٤)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات ولتكن $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$. نقول إن $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ تركيب خطي للمتجهات $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ إذا وجدت أعداد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث يكون

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \, .$$

مثال (٢٤ ، ٤)

أثبت أن المتجه $\mathbf{v} = (7, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ تركيب خطي للمتجهات

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (2, 0, 1) \, .$$

الحل

نريد إيجاد أعداد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ بحيث إن :

$$(7, -2, 2) = \alpha_1 (1, -1, 0) + \alpha_2 (0, 1, 1) + \alpha_3 (2, 0, 1) \, .$$

وهذا يقتضي أن يكون :

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 7$$
$$-\alpha + \alpha_2 = -2$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 2$$

وبحل هذا النظام نجد أن : $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 3$.

ولذا فإن : $(7,-2,2) = (1,-1,0) - (0,1,1) + 3(2,0,1)$. □

مثال (٢٥ ، ٤)

بين ما إذا كان بالإمكان كتابة المتجه $\mathbf{v} = (3,-1,4) \in \mathbf{R}^3$ كتركيب خطي للمتجهات $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,1), \mathbf{v}_3 = (3,-5,-2)$.

الحل

لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ بحيث أن : $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$. عندئذٍ ، بالتعويض عن قيم $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ نجد أن :

$(3,-1,4) = \alpha_1 (1,-1,0) + \alpha_2 (0,1,1) + \alpha_3 (3,-5,-2)$.

ولذا فإننا نحصل عل نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad + 3\alpha_3 &= 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 &= -1 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 4 \end{aligned}$$

وبستخدام طريقة جاوس لحل هذا النظام نجد أن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة هو

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

ولذا ، فإن النظام غير متسق . وبالتالي ، فإن المتجه $(3,-1,4)$ لا يمكن أن يكون تركيبا خطيا للمتجهات $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. □

مثال (٢٦ ، ٤)

لتكن لدينا الدوال $f(x)=x^2+x\,,\, g(x)=x+2\,,\, h(x)=3x^2+2x-2\,,\, k(x)=x^3$ في فضاء المتجهات $\mathbf{F}(-\infty,\infty)$. من السهل أن نرى أن $h(x)$ تركيب خطي للدالتين $h(x)$ و $g(x)$ وذلك لأن $h(x)=3f(x)-g(x)$. ولكن $k(x)$ ليست تركيباً خطياً للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ولإثبات ذلك نفرض أن $k(x)$ هي بالفعل تركيب خطي للدالتين $f(x)$ و $g(x)$. عندئذٍ يوجد $\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$ حيث : $k(x)=\alpha_1 f(x)+\alpha_2 g(x)$. أي أن $x^3=\alpha_1\left(x^2+x\right)+\alpha_2\left(x+2\right)=\alpha_1 x+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)x+\alpha_2$. وبمقارنة المعادلات نجد أن : $1=0$ وهذا مستحيل وبالتالي فإن $k(x)$ ليست تركيباً خطياً للدالتين $f(x)$ و $g(x)$. □

مثال (٢٧ ، ٤)

باستخدام المتطابقة المثلثية $\cos(3+x)=\cos 3\cos x-\sin 3\sin x$ نجد أن $\cos(3+x)$ تركيب خطي لكل من $\cos x$ و $\sin x$. ولكن $\sin^2 x$ ليست تركيباً خطيا لكل من $\cos x$ و $\sin x$. ولإثبات ذلك نفرض أن $\sin^2 x$ تركيب خطي . عندئذ $\sin^2 x=\alpha_1 \sin x+\alpha_2 \cos x$ حيث $\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$ وذلك لكل $x\in\mathbb{R}$.

وعلى وجه الخصوص : $\sin^2 0=\alpha_1 \sin 0+\alpha_2 \cos 0$. أي أن $0=\alpha_1 .0+\alpha_2 .1$ وبالتالي فإن $\alpha_2=0$. ولذا فإن $\sin^2 x=\alpha_1 \sin x$. وإذا كانت $\sin x\neq 0$ فإننا نجد أن $\sin x=\alpha_1$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وهذا مستحيل . وعليه فإن $\sin^2 x$ ليست تركيباً خطيا لكل من $\sin x$ و $\cos x$. □

لقد وجدنا في المثالين (٢٤، ٤) و(٢٥، ٤) أنه في الحالة الخاصة ، التي يكون فيها $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$ يلزمنا لكي نبين ما إذا كان متجه ما تركيبا خطياً لمتجهات معطاة أن نحل نظام من المعادلات الخطية ، وهذا هو بالفعل ما نحن بصدد برهانه الآن ، وبذلك

نكون قد أوفينا ما وعدنا به قبل المبرهنة (٢ ، ٣) في إيجاد الشرط الكافي واللازم لكي يكون النظام $AX = B$ متسقاً ، حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$. ولكن قبل القيام بذلك ، نبين في المبرهنة التالية العلاقة بين التركيب الخطي وضرب المصفوفات .

مبرهنة (٥ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ولتكن $X = [x_1 , x_2 , \dots , x_n]^T$. إذا كانت $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ هي أعمدة المصفوفة A فإن :

$$AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n .$$

البرهان

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

إذن ، $AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$. ♦

نتيجة (٦ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$. عندئذٍ يكون النظام $AX = B$ متسقا إذا وفقط إذا كان B تركيباً خطياً لأعمدة المصفوفة A .

البرهان

باستخدام المبرهنة (٥ ، ٤) ، نجد أن النظام $AX = B$ يكون متسقاً إذا وفقط كان $B = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$. ♦

مثال (٢٨ ، ٤)

عين جميع المتجهات $B = [b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \ \ b_4]^T$ بحيث يكون B تركيباً خطياً للمتجهين $\mathbf{v}_1 = [1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4]^T$ و $\mathbf{v}_2 = [4 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 1]^T$.

الحل

يكون B تركيباً خطياً للمتجهين $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ إذا كان النظام $AX = B$ متسقاً . وباستخدام طريقة جاوس لحل هذا النظام نجد أن :

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 3 & 2 & b_3 \\ 4 & 1 & b_4 \end{array}\right]$$

ولذا فإن الصيغة الدرجية الصفية هي :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b_1 \\ 0 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -10 & b_3 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_1 \end{array}\right]$$

ولذا فإنه لكي يكون النظام متسقاً فإن $b_4 - 4b_1 = 0$. أي أن $b_4 = 4b_1$. وبالتالي فإن $AX = B$ متسقاً إذا كان B من الصيغة

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 4b_1 \end{bmatrix} . \ \square$$

تعريف (٦ ، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. نقول إن S تولد (span) $\mathbf{V}$ إذا كان كل عنصر من $\mathbf{V}$ هو تركيب خطي لعناصر S .

مثال (٢٩ ، ٤)

من الواضح أن $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ حيث $\mathbf{e}_1=(1,0)$ و $\mathbf{e}_2=(0,1)$ تولد $\mathbb{R}^2$ وذلك لأنه لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ يكون لدينا : $(x,y)=x\,(1,0)+y\,(0,1)=x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2$.

وبصفة عامة فإن $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ تولد $\mathbb{R}^n$ حيث

$\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$. وذلك لأنه لكل $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ يكون لدينا :

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n \quad . \ \square$$

مثال (٣٠ ، ٤)

أثبت أن المتجهين $\mathbf{v}_1=(1\ ,\ 2)$ و $\mathbf{v}_2=(1,-1)$ يولدان $\mathbb{R}^2$.

الحل

لنفرض أن $\mathbf{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. نريد إيجاد $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ بحيث يكون :

$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2$. الآن $(x,y)=\alpha_1\,(1,2)+\alpha_2\,(1,-1)$. وهذا يقتضي أن :

$$\alpha_1+\alpha_2=x$$
$$2\alpha_1-\alpha_2=y$$

وبحل هذا النظام نجد أن $\alpha_1=\dfrac{x+y}{2},\alpha_2=\dfrac{x-y}{2}$. ولذا فإن $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ يولدان $\mathbb{R}^2$. $\square$

مثال (٣١ ، ٤)

بين ما إذا كانت المتجهات $\mathbf{v}_1=(1,-1,0)$ ، $\mathbf{v}_2=(0,1,1)$ و $\mathbf{v}_3=(3,\ -5,-2)$ تولد $\mathbb{R}^3$ أم لا ؟

الحل

لنفرض أن $\mathbf{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ولنحاول كتابة هذا المتجه كتركيب خطي للمتجهات $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$. عندئذ $(x,y,z)=\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(3,-5,-2)$ حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbf{R}$. إن هذا يقتضي أن :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad &+3\alpha_3=x\\ -\alpha_1+\alpha_2 \quad &-5\alpha_3=y\\ \alpha_2 \quad &-2\alpha_3=z \end{aligned}$$

وباستخدام طريقة جاوس لحل هذا النظام نجد أن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة هي :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x\\ 0 & 1 & -2 & y\\ 0 & 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right]$$

الآن ، إذا كان $z-y-x\neq 0$ فإنه لا يوجد حل للنظام ولذا نخلص إلى أن المتجه (x,y,z) ليس تركيباً خطياً للمتجهات $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ ومن ثم فإن هذه المتجهات لا تولد $\mathbb{R}^3$. □

إذا كان فضاء المتجهات هو $\mathbb{R}^n$ فإن المبرهنة التالية تقدم لنا العلاقة بين المجموعات المولدة ومجموعة حل النظام $AX=B$.

مبرهنة (٧ ، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k\}\subseteq\mathbb{R}^n$. ولتكن A مصفوفة من الدرجة $n\times k$ أعمدتها

المتجهات $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. عندئذ S تولد $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كان النظام $AX = B$ متسقاً لكل $B \in \mathbb{R}^n$.

البرهان

لنفرض أن $X = [x_1 \; x_2 \ldots x_k]^T$. باستخدام النتيجة (٦ ، ٤) نجد أن $B = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$ إذا وفقط إذا كان $AX = B$. وبالتالي يكون أي متجه في $\mathbb{R}^n$ تركيباً خطياً لمتجهات S إذا وفقط إذا كان النظام $AX = B$ متسقاً لكل $B \in \mathbb{R}^n$. ♦

مثال (٣٢ ، ٤)

لتكن $S = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. بما أن

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1(45-48) - 4(18-24) + 7(12-15) = 0$$

فإننا نستطيع إيجاد $B \in \mathbb{R}^n$ بحيث يكون النظام $AX = B$ غير متسق . ولذا فإن S لا تولد $\mathbb{R}^3$. □

النتيجة التالية نحصل عليها مباشرة من المبرهنة (٧ ، ٤) في الحالة الخاصة التي تكون فيها A مصفوفة مربعة .

نتيجة (٨ ، ٤)

لتكن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن A المصفوفة من الدرجة n التي أعمدتها متجهات S . عندئذ S تولد $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$. ♦

مثال (٣٢ ، ٤)

أثبت أن $p(x) = x^2 + 1, q(x) = x - 2, r(x) = x + 3$ تولد فضاء المتجهات $\mathbf{P}_2$.

الحل

نختار أي كثيرة حدود $m(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_2$ ثم نثبت أنه يوجد أعداد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ بحيث يكون $m(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) + \alpha_3 r(x)$.

وبالتعويض ومقارنة المعاملات نحصل على نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\qquad &= a \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= b \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= c \end{aligned}$$

وبما أن $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3+2) = 5 \neq 0$ فإن النظام أعلاه متسق مهما كانت الأعداد a, b, c . ولذا فإن $m(x)$ تركيب خطي لكثيرات الحدود p, q, r. ومن ثم فإنها تولد $\mathbf{P}_2$. □

وجدنا في الأمثلة السابقة أن بعض المجموعات الجزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ تولد ذلك الفضاء بينما البعض الأخر ليس كذلك . فإذا كانت S تولد $\mathbf{V}$ فإننا نستطيع كتابة أي متجه من $\mathbf{V}$ كتركيب خطي لمتجهات S أما إذا كانت S لا تولد $\mathbf{V}$ فإن بعض متجهات $\mathbf{V}$ لا يمكن كتابتها كتركيب خطي لمتجهات S . المبرهنة التالية تبين لنا أنه على الرغم من أن S لا تولد $\mathbf{V}$ فإن مجموعة التركيبات الخطية من S تشكل فضاءً جزئيا من $\mathbf{V}$.

مبرهنة (٩ ، ٤)

لتكن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. عندئذٍ :

(١) مجموعة جميع التركيبات الخطية $\mathbf{W}$ لمتجهات S تشكل فضاءً جزئياً من $\mathbf{V}$.

(٢) $\mathbf{W}$ هو أصغر فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ يحتوي S . أي أنه إذا كان $\mathbf{U}$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ ويحتوي S فإن $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$.

البرهان

(١) من الواضح أن $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n$ ولذا فإن $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$. لنفرض الآن أن $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n$. وبالتالي فإن $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n$. ولذا فإن $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbf{W}$. كذلك $\alpha\mathbf{u} = (\alpha\alpha_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha\alpha_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{v}_n$. ومنه فإن $\alpha\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. وعليه فإن $\mathbf{W}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٢) لنفرض أن $\mathbf{U}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ حيث $S \subseteq \mathbf{U}$. بما أن $\mathbf{U}$ مغلق بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد ويحتوي $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ فإنه يجب أن يحتوي على أي تركيب خطي لهذه المتجهات ومن ثم فإنه يحتوي $\mathbf{W}$. ♦

تعريف (٧ ، ٤)

يسمى الفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ الوارد في المبرهنة (٩ ، ٤) الفضاء الجزئي المولد بالمجموعة S وسنرمز له بالرمز $\langle S \rangle$.

ملحوظات

(١) إذا كانت S تولد فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإنه يكون في هذه الحالة $\mathbf{V} = \langle S \rangle$.

(٢) إذا كانت $S = \Phi$ أو $S = \{0\}$ فإن $\langle S \rangle = \{0\}$.

(٣) إذا كانت S فضاءاً جزئياً من V فإن $\langle S \rangle = S$.

مثال (٣٤ ، ٤)

إذا كانت $S = \{(-1,0,1),(1,-1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ فإنه من الواضح أن

$\alpha_1(-1,0,1)+\alpha_2(1,-1,0)=(\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1,\alpha_2)$. ولذا فإن :

$\langle S \rangle = \{(\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1,\alpha_2) : \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. □

المثال التالي يوضح كيفية إيجاد مولدات فضاء جزئي معلوم .

مثال (٣٥ ، ٤)

عين المتجهات المولدة للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^3$ حيث

$\mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

الحل

بما أن $x+y+z=0$ فإن $z=-x-y$. ولذا إذا كان $(x,y,z) \in \mathbf{W}$ فإن

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x,y,-x-y) = (x,0,-x)+(0,y,-y)\\ &= x(1,0,-1)+y(0,1,-1)\end{aligned}$$

وعليه فإن $S=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ تولد $\mathbf{W}$. □

مثال (٣٦ ، ٤)

بما أن $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ لأي $p(x) \in \mathbf{P}_n$ فإننا نجد أن

$\mathbf{P}_n = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle$. □

تمارين (٣ ، ٤)

(١) أكتب $(1,-7,5)$ كتركيب خطي للمتجهات $(1,-1,1)$، $(1,0,1)$ و $(1,1,0)$.

(٢) أكتب $(-9,-7,-15)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,4)$، $(1,-1,3)$ و $(3,2,5)$.

(٣) أكتب $(0,0,0)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,4)$، $(1,-1,3)$ و $(3,2,5)$.

(٤) أكتب $(2,3,-7,3)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,0,3)$ ، $(3,-1,5,2)$ و $(-1,0,2,1)$.

(٥) أكتب x^2+1 كتركيب خطي للمتجهين $-x+1$ و $3x^2+x+2$.

(٦) أكتب $2x^2-3x+1$ كتركيب خطي للمتجهات $x+1$ ، x^2+x و x^2+2 .

(٧) أكتب $9x^2+8x+7$ كتركيب خطي للمتجهات $4x^2+x+2$ ، $3x^2-x+1$ و $5x^2+2x+3$.

(٨) أكتب $A=\begin{bmatrix} 7 & 19 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ كتركيب خطي للمصفوفات $A_1=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A_2=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

(٩) أكتب $A=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ كتركيب خطي للمصفوفات $A_1=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $A_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(١٠) إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1=(1,2,8),\mathbf{v}_2=(3,0,1)\}\subseteq\mathbf{R}^3$ فهل $\mathbf{w}=(-1,4,15)\in\langle S\rangle$ ؟

(١١) إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1=(1,2,3),\mathbf{v}_2=(3,1,2),\mathbf{v}_3=(4,1,0)\}\subseteq\mathbf{R}^3$ فهل $\mathbf{w}=(4,5,10)\in\langle S\rangle$ ؟

(١٢) إذا كانت

$$S=\{\mathbf{v}_1=(2,1,0,3),\mathbf{v}_2=(3,-1,5,2),\mathbf{v}_3=(-1,0,2,1)\}\subseteq\mathbf{R}^4$$

فبين أياً من المتجهات التالية ينتمي إلى $\langle S\rangle$:

(أ) $\mathbf{w}_1=(-4,6,-13,4)$ (ب) $\mathbf{w}_2=(1,1,1,1)$.

(١٣) إذا كانت

$$S=\{p_1(x)=x^2+x+1,\ p_2(x)=3x^2+2x-2,\ p_3(x)=6x^2+5x+1\}\subseteq \mathbf{P}_2$$

فهل $p(x)=6x^2+4x\in\langle S\rangle$ ؟

(١٤) إذا كانت

$$S=\{p_1(x)=4x^2+x+2,\ p_2(x)=3x^2-x+1,\ p_3(x)=5x^2+2x+3\}\subseteq \mathbf{P}_2$$

فهل $p(x)=6x^2+11x+6\in\langle S\rangle$ ؟

(١٥) إذا كانت $S=\{f(x)=\cos^2 x,\ g(x)=\sin^2 x\}\subseteq \mathbf{F}[a,b]$ فبين أياً من المتجهات التالية ينتمي إلى $\langle S\rangle$:

(أ) $\cos 2x$ (ب) x^2+3 (جـ) 1 (د) $\sin x$.

(١٦) إذا كانت $S=\left\{A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$

فهل $A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -4 & -1\end{bmatrix}\in\langle S\rangle$ ؟

(١٧) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{R}^3$ تولد $\mathbf{R}^3$.

(أ) $S_1=\{(2,0,2),(3,1,1),(-3,5,5)\}$.

(ب) $S_2=\{(1,5,1),(2,6,1),(3,3,0),(4,6,2)\}$.

(جـ) $S_3=\{(3,1,4),(3,4,1),(4,3,1),(3,3,1)\}$.

(١٨) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{P}_2$ تولد $\mathbf{P}_2$:

(أ) $S_1=\{-x^2+1,\ x^2+1,\ 6x^2+5x+2\}$.

(ب) $S_2=\{-8x^2+15x+3,\ -5x^2+3x,\ 3x^2+5x+2,\ -x^2+4x+1$.

(جـ) $S_3=\{3x,\ x+1,\ 2x^2+1$.

(١٩) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{M}_{22}$ تولد $\mathbf{M}_{22}$:

(أ) $S_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(ب) $S_2=\left\{\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\ -4 & -1\end{bmatrix}\right\}$.

(٢٠) لتكن $S=\{v_1=(1,2,1), v_2=(2,1,1), v_3=(3,3,2)\}\subseteq \mathbb{R}^3$.

(أ) هل $(1,0,0)\in\langle S\rangle$ ؟ (ب) هل $(-1,1,0)\in\langle S\rangle$ ؟

(جـ) هل $\langle S\rangle=\mathbb{R}^3$ ؟

(٢١) لتكن $\mathbf{u}_1=(1,0,1)$ ، $\mathbf{u}_2=(-1,-1,0)$ ، $\mathbf{v}_1=(1,2,0)$

و $\mathbf{v}_2=(0,0,1)$.

(أ) عين قيم α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 بحيث يكون $\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2$.

(ب) أثبت أن $\langle\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\rangle\neq\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}\rangle$.

(٢٢) لتكن $p_1(x)=-x^2+x+1\ ,\ p_2(x)=-x+2\in\mathbf{P}_2$.

(أ) أثبت أن $p_3(x)=-3x^2+x+4\notin\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$.

(ب) أثبت أن $\langle\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}\rangle=\mathbf{P}_2$.

(٢٣) لتكن $p_1(x)=x+1$ ، $p_2(x)=-x^2+2$ ، $p_3(x)=x^2+2x+5$

و $p_4(x)=x+2$.

(أ) إذا كان $p(x)\in\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$ فاكتب الصيغة العامة لـ $p(x)$.

(ب) أثبت أن $\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)\in\langle\{p_3(x),p_4(x)\}\rangle$ إذا وفقط إذا كان

$\alpha_1=3\alpha_2$.

(جـ) جد علاقة بين β_3 و β_4 بحيث يكون :

$\beta_3\,p_3(x)+\beta_4\,p_4(x)\in\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$.

(٢٤) عين مولدات الفضاءات الجزئية التالية :

(أ) $\mathbf{W}=\{(a,b,-a,a+b)\}\leq\mathbb{R}^4$.

(ب) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+b+c=0\}\leq\mathbb{R}^4$.

(جـ) $\mathbf{W}=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0:a_3+a_2+a_1+a_0=0\}\leq\mathbf{P}_3$.

(د) $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}:a+b+c+d=0\right\}\leq\mathbf{M}_{22}$.

(٢٥) إذا كانت $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ تولد فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ فأثبت أن

$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ تولد V أيضاً .

(٢٦) إذا كانت $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تولد فضاء المتجهات V فهل من الضروري أن تولد المجموعة $v_2, v_3, \dots, v_n$ هذا الفضاء ؟ فسر إجابتك .

(٢٧) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة $m \times n$. إذا كان $AX = BX$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ فأثبت أن $A = B$ [إرشاد : استخدم المبرهنة (٥ ، ٤) والمتجهات $e_1, e_2, \dots, e_n$] .

(٢٨) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $AX = 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ فأثبت أن $A = 0$.

(٢٩) ليكن V فضاء متجهات و $u, v, w \in V$. أثبت أن :

(أ) $\langle \{u, v\} \rangle = \langle \{u + v, u - v\} \rangle$.

(ب) $\langle \{u, v, w\} \rangle = \langle \{u - v, u + w, w\} \rangle$.

(جـ) $\langle \{u\} \rangle = \langle \{\alpha\, u\} \rangle$ لكل $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

(٤ ، ٤) الارتباط والاستقلال الخطي

Linear Dependence and Linear Independence

لنفرض أن لدينا المجموعتين الجزئيتين $S_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ و $S_2 = \{(1,1), (1,-1), (2,4)\}$ من فضاء المتجهات $\mathbb{R}^2$. من الواضح أن كلاً منهما تولد $\mathbb{R}^2$ ، بيد أن S_1 تحتوي على متجهات عددها أقل من متجهات S_2 . هذا من ناحية ، ومن ناحية أخرى ، فإن كل متجه من $\mathbb{R}^2$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة كتركيب خطي لمتجهات S_1 بينما الحال ليست كذلك بالنسبة لمتجهات S_2 إذ يمكن كتابة أي متجه من $\mathbb{R}^2$ بأكثر من طريقة كتركيب خطي لمتجهات S_2 ، فمثلاً المتجه (3 , 2) يمكن كتابته كتركيب خطي لمتجهات S_2 على النحو التالي :

$(3, 2) = (1, 1) + (1, -1) + \frac{1}{2}(2, 4)$ أو $(3, 2) = -\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{3}{2}(1, -1) + (2, 4)$.

ولهذا فإن S_1 تمتع بخاصية غير متوفرة في S_2 وهي أن S_1 أصغر مجموعة مولدة للفضاء $\mathbb{R}^2$. إن إيجاد أصغر مجموعة مولدة لفضاء متجهات تعتمد على أحد أهم مفهومين في الجبر الخطي آلا وهو مفهوم الاستقلال الخطي وهذا هو موضوع دراستنا في هذا البند .

تعريف (٨ ، ٤)

يقال عن المتجهات $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n$ في فضاء متجهات $\mathbf{V}$ أنها مستقلة خطياً (linearly independent) إذا كان الحل الوحيد للمعادلة :
$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0$ هو الحل الصفري لكل $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n \in \mathbb{R}$. أي أن الحل الوحيد هو $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

مثال (٣٧ ، ٤)

إن المتجهين $(1,-1)$ و $(1,1)$ في $\mathbb{R}^2$ مستقلان خطياً وذلك لأنه إذا كان $\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$ حيث $\alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1) = (0,0)$ فإن :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

ومن الواضح أن الحل الوحيد لهذا النظام هو الحل الصفري .أي أن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. □

تعريف (٩ ، ٤)

يقال عن المتجهات $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n$ في فضاء متجهات $\mathbf{V}$ أنها مرتبطة خطياً (linearly dependent) إذا لم تكن مستقلة خطياً . أي إذا وجد $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n \in \mathbb{R}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون : $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

مثال (٣٨ ، ٤)

أثبت أن المتجهات $(4,-1,1)$ ، $(2,1,3)$ و $(1,2,4)$ في $\mathbb{R}^3$ مرتبطة خطياً

الحل

لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ وأن

$$\alpha_1(1,2,4)+\alpha_2(2,1,3)+\alpha_3(4,-1,1)=(0,0,0) .$$

عندئذٍ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

وبإيجاد محدد مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات المتجانس نجد أن :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+3)-2(2+4)+4(6-4) = 4-12+8=0$$

ولذا فإن للنظام عدد غير منته من الحلول (أحدها ، $\alpha_1 = 2$ ، $\alpha_2 = -2$ و $\alpha_3 = 1$)
ومن ثم فإن المتجهات مرتبطة خطياً . □

مثال (٣٩ ، ٤)

أثبت أن المتجهات $(0,0,1)$ ، $(0,1,1)$ و $(1,1,1)$ مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$.

الحل

نفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ وأن

$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(0,0,1)=(0,0,0)$. عندئذٍ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\qquad &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومن الواضح أن الحل الوحيد لهذا النظام هو $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. ولذا فإن المتجهات مستقلة خطياً . □

في المثالين (٣٧ ، ٤) و (٣٨ ، ٤) كان لزاماً علينا أن نحل نظام معادلات خطية لمعرفة فيما إذا كانت مجموعة من المتجهات في $\mathbb{R}^m$ مستقلة خطياً أم لا . بصفة عامة فإن المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة بين الاستقلال الخطي لمجموعة من المتجهات في $\mathbb{R}^m$ وبين حل النظام المتجانس $AX = 0$.

مبرهنة (١٠ ، ٤)

لتكن $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \} \subseteq \mathbb{R}^m$. ولتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ أعمدتها متجهات S . عندئذٍ تكون S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان الحل الوحيد للنظام المتجانس $AX = 0$ هو الحل التافه . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $m = n$ فإن S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس .

البرهان

لنفرض أن $X = [x_1 \; x_2 \ldots x_n]^T$. باستخدام المبرهنة (٥ ، ٤) لدينا $AX = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. ولذا فإن S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. أي أن S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان الحل الوحيد للنظام المتجانس $AX = 0$ هو الحل التافه . وأخيراً عندما $m = n$ فإن هذا يكافئ أن للمصفوفة A معكوس . ♦

ملحوظة

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $m < n$ فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول للنظام $AX = 0$ ولذا فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (١١ ، ٤)

لتكن $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_n \} \subseteq \mathbb{R}^m$. إذا كان $m < n$ فإن S مرتبطة خطياً . ♦

مثال (٤٠ ، ٤)

من الواضح أن المجموعة

$$S = \{ (7,-9,6,0), (5,-4,3,2), (11,13,7,-3), (3,5,17,-18), (1,0,0,0) \} \subseteq \mathbf{R}^4$$

مرتبطة خطياً وذلك لأن $m = 4$ و $n = 5$. □

مثال (٤١ ، ٤)

ابحث الاستقلال الخطي للمتجهات $2 + x - x^2$ ، $3x + x^2$ و $1 + x$ في فضاء المتجهات $\mathbf{P}_2$.

الحل

لنفرض أن $\alpha_1 (1 + x) + \alpha_2 (3x + x^2) + \alpha_3 (2 + x - x^2) = 0$. عندئذٍ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

إن محدد مصفوفة المعاملات A لهذا النظام هي :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4+0+1=-3 \neq 0$$

ومنه فإن A لها معكوس. ولذا فإن للنظام الحل الوحيد $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ أي أن المتجهات مستقلة خطياً . □

لقد بينا في المثال (٣٧ ، ٤) أن المجموعة الجزئية :

$S=\{(1,2,4),(2,1,3),(4,-1,1)\}\subseteq \mathbb{R}^3$ مرتبطة خطياً . أي أنه لابد وأن يكون هناك علاقة ما بين متجهاتها . في الحقيقة أننا نستطيع أن نكتب أي متجه من متجهات S كتركيب خطي لباقي المتجهات . وهذا أمر سهل المنال وذلك لأن :

$$\begin{aligned}(1,2,4) &= \frac{3}{2}(2,1,3)-\frac{1}{2}(4,-1,1)\\ (2,1,3) &= \frac{2}{3}(1,2,4)+\frac{1}{3}(4,-1,1)\\ (4,-1,1) &= -2(1,2,4)+3(2,1,3)\end{aligned}$$

المبرهنة التالية تبين لنا أن هذه العلاقة بين المتجهات المرتبطة خطياً تبقى صحيحة بصفة عامة :

مبرهنة (١٢ ، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات $\mathbf{V}$ حيث $n\geq 2$. عندئذٍ تكون S مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد متجهاتها تركيباً خطياً لبقية المتجهات .

البرهان

لنفرض أولاً أن S مرتبطة خطياً . عندئذٍ توجد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n=0$. وليكن $\alpha_k\neq 0$.

عندئذٍ $\alpha_k \mathbf{v}_k = -\alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2 - \cdots - \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} - \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - \alpha_n \mathbf{v}_n$. ولما كان $\alpha_k \neq 0$ فإننا نحصل على :

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{v}_n \; .$$

وهذا يعني أن $\mathbf{v}_k$ تركيب خطي لبقية المتجهات .

ولبرهان العكس نفرض أن :

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \; .$$

بإضافة $-\mathrm{v}_k$ للطرفين نحصل على :

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + (-1)\mathbf{v}_k + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \; .$$

ولما كان معامل $\mathbf{v}_k$ لا يساوي صفراً فإننا نخلص إلى أن S مرتبطة خطياً . ♦

تمارين (٤ ، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٢٠) بين ما إذا كانت مجموعة المتجهات في فضاء المتجهات المعطى مستقلة خطياً أم مرتبطة خطياً .

(١) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ ، $S = \{(1,-1),(2,0)\}$.

(٢) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ ، $S = \{(1,2),(-1,1)\}$.

(٣) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,-1,0),(0,-1,2),(2,1,1)\}$.

(٤) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,1,2),(1,4,5),(1,2,7),(-1,8,3)\}$.

(٥) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,2,3),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

(٦) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ ، $S = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\}$.

(٧) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ ، $S = \{(0,3,1,-1),(6,0,5,1),(4,7,1,3)\}$.

(٨) $V = \mathbb{R}^4$ ، $S = \{(1,1,4,2),(1,2,1,0),(-1,1,1,-1),(1,4,6,1),(1,3,9,3)\}$.

(٩) $V = P_2$ ، $S = \{4x^2 - x + 2, 2x^2 + 6x + 3, -4x^2 + 10x + 2\}$.

(١٠) $V = P_2$ ، $S = \{x^2, x+1, 1-x-x^2, x^2+1\}$.

(١١) $V = P_2$ ، $S = \{1 + x - 2x^2, 1 - x + x^2, 2 - x^2\}$.

(١٢) $V = M_{22}$ ، $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(١٣) $V = M_{22}$ ، $S = \left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right\}$.

(١٤) $V = M_{22}$ ، $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(١٥) $V = F[1,2]$ ، $S = \left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}\right\}$.

(١٦) $V = F[0, 2\pi]$ ، $S = \{\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$.

(١٧) $V = F(-\infty, \infty)$ ، $S = \{e^x, xe^x, x^2 e^x\}$.

(١٨) $V = F(-\infty, \infty)$ ، $S = \{\sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x\}$.

(١٩) $V = F(-\infty, \infty)$ ، $S = \{6, 3\sin^2 x, 2\cos^2 x\}$.

(٢٠) $V = F[0, 2\pi]$ ، $S = \{1, \sin x, \sin 2x\}$.

(٢١) عين قيم x التي تجعل المجموعات التالية مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$.

(أ) $S = \{(1,-1,0),(x,1,0),(0,2,3)\}$.

(ب) $S = \{(2,x,1),(1,0,1),(0,1,3)\}$.

(جـ) $S = \{(1,x,1),(x,0,0),(0,0,3)\}$.

(٢٢) عين قيمة كل من a و b التي تجعل المتجهات

$(1,a,2,b)$ ، $(1,-1,2,0)$ و $(1,2,1,3)$ مرتبطة خطياً في $\mathbf{R}^4$.

(٢٣) أثبت أن أي مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مستقلة خطياً يجب أن تكون مستقلة خطياً .

(٢٤) لتكن كل من S_1 و S_2 مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ حيث $S_1 \subseteq S_2$. إذا كانت S_1 مرتبطة خطياً فأثبت أن S_2 مرتبطة خطياً .

(٢٥) لتكن $\{\mathbf{v},\mathbf{u}\}$ مجموعة مستقلة خطياً . أثبت أن :

(أ) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مستقلة خطياً .

(ب) $\{\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مستقلة خطياً .

(جـ) $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مرتبطة خطياً .

(٢٦) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية مستقلة خطياً من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. وليكن $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ليس تركيبا خطيا لمتجهات S (أي أن $\mathbf{v}\notin\langle S\rangle$)

أثبت أن $S\cup\{\mathbf{v}\}$ مجموعة مستقلة خطيا.

(٢٧) لتكن $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{R}^n$ ولتكن A مصفوفة من الدرجة n لها معكوس.

أثبت أن المجموعة $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,\dots,A\mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطياً .

(٢٨) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. إذا كان أحد عناصر S هو المتجه الصفري فأثبت أن S مرتبطة خطياً .

(٢٩) لتكن $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ مجموعة مستقلة خطياً من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. بين أي من المجموعات التالية مستقلة خطياً وأيها مرتبطة خطياً .

(أ) $\{\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_1\}$.

(ب) $\{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_1\}$.

(جـ) $\{\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_4,\mathbf{u}_4-\mathbf{u}_1\}$.

(د) $\{ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 , \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 \}$.

(٣٠) لتكن $\{ p(x), q(x) \}$ مجموعة مستقلة خطياً من $\mathbf{P}_2$. إذا كانت درجة كل من $p(x)$ و $q(x)$ أكبر من أو تساوي 1 فأثبت أن المجموعة $\{ p(x), q(x), p(x)\, q(x) \}$ مستقلة خطياً .

(٤ ، ٥) الأساس والبعد
Basis and Dimension

لنفرض أن لدينا المجموعتين

$$S_1 = \{ (1,-1), (1,1) \}$$
$$S_2 = \{ (2,1), (1,-1), (3,-2) \}$$

من المتجهات في الفضاء $\mathbb{R}^2$. يمكن التأكد وبجهد قليل من أن المجموعتين تولدان $\mathbb{R}^2$ غير أن المجموعة S_1 تتصف بصفة تميزها عن المجموعة S_2 ذلك أن S_1 مستقلة خطياً بينما S_2 مرتبطة خطياً . لذا تسمى S_1 أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$ بينما S_2 ليست أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$. في هذا البند نناقش مفهوم أساس فضاء المتجهات والذي يعتبر من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي . وسنبين كذلك أن جميع أساسات فضاء المتجهات تحتوي على نفس العدد من العناصر هذا العدد يسمى بعد فضاء المتجهات . أن عدد متجهات أساس فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ يعتمد فقط على $\mathbf{V}$ وليس على طريقة اختيار هذا الأساس .

تعريف (٤ ، ١٠)

لتكن $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. نقول إن S أساس (basis) للفضاء $\mathbf{V}$ إذا حققت الشرطين :

(١) S تولد $\mathbf{V}$ (٢) S مستقلة خطياً .

قبل أن نقدم أمثلة على الأساس نود أن نؤكد على وحدانية كتابة أي متجه من فضاء متجهات كتركيب خطي لعناصر أساسه وهذا هو فحوى المبرهنة التالية :

مبرهنة (١٣ ، ٤)

إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ فإننا نستطيع كتابة $\mathbf{v}$ بطريقة وحيدة كتركيب خطي للمتجهات $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$.

البرهان

بما أن S تولد $\mathbf{V}$ فإنه من الواضح أن $\mathbf{v}$ تركيب خطي لعناصر S . ولبرهان الوحدانية نفرض أنه يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\in\mathbb{R}$ بحيث أن

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v}=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n$$

ولذا فإن $(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{v}_1+(\alpha_2-\beta_2)\mathbf{v}_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$.

وبما أن S مستقلة خطياً فإننا نجد أن $\alpha_i-\beta_i=0$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. وبالتالي فإن $\alpha_i=\beta_i$. ♦

مثال (٤٢ ، ٤)

أثبت أن $S=\{\mathbf{e}_1=(0,1),\mathbf{e}_2=(1,0)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$.

الحل

(١) لنفرض أن $\mathbf{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. من الواضح أن

$\mathbf{v}=(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a\,\mathbf{e}_1+b\,\mathbf{e}_2$.

ولذا فإن S تولد $\mathbb{R}^2$.

(٢) لنفرض أن $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ حيث $\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$. ولذا فإن :

$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(\alpha_1,0)+(0,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$. ومنه فإن

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. وبالتالي فإن S مستقلة خطياً . □

ملحوظة

إذا كانت $S = \{\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \dots , \mathbf{e}_n\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ حيث $\mathbf{e}_i = (0,0,\dots,1,0,\dots,0)$ فإننا نستطيع بطريقة مماثلة للمثال (٤١ ، ٤) أن نثبت أن S أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$. يسمى هذا الأساس الأساس المعتاد أو الأساس القياسي (standard basis) للفضاء $\mathbb{R}^n$.

مثال (٤٣ ، ٤)

أثبت أن $S = \{1, x , x^2,\dots, x^n\}$ أساس لفضاء المتجهات $\mathbf{P}_n$.

الحل

(١) من الواضح أنه لكل $p(x) \in \mathbf{P}_n$ فإنه يوجد $a_0 , a_1 ,\cdots, a_n \in \mathbb{R}$ حيث $p(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n$. ولذا فإن S تولد $\mathbf{P}_n$.

(٢) إذا كان $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$ فإنه بمقارنة المعاملات نجد أن $a_i = 0$ لكل $i = 0,1,\dots,n$. ولذا فإن S مستقلة خطياً.

يطلق على هذا الأساس ، الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{P}_n$. □

مثال (٤ ، ٤٤)

أثبت أن $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ أساس للفضاء $\mathbf{M}_{22}$.

الحل

(١) من الواضح أن $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

ولذا فإن S تولد $\mathbf{M}_{22}$.

(٢) إذا كان $a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

فإن $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$. ولذا فإن $a=b=c=d=0$. أي أن S مستقلة خطياً .يسمى هذا الأساس، الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{M}_{22}$. وبصورة عامة فإن الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{M}_{mn}$ هو المجموعة المكونة من mn من المصفوفات $A=\left[a_{ij}\right]$ بحيث يكون $a_{ij}=1$ وجميع باقي عناصر A أصفاراً . □

مثال (٤ ، ٤٥)

أثبت أن المجموعة $S=\{(1,2,1),(2,3,1),(-1,2,-3)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل

لنفرض أن A هي المصفوفة التي أعمدتها متجهات S . أي أن $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&3&2\\1&1&-3\end{bmatrix}$.

بما أن $\det A = 1\left(-9-2\right)-2\left(-6-2\right)-1\left(2-3\right)=6\neq 0$ فإننا نجد باستخدام النتيجة (٤، ٨) والمبرهنة (٤، ١٠) أن S تولد $\mathbb{R}^3$ ومستقلة خطياً . لذا فإن S أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$. □

مثال (٤٦ ، ٤)

أثبت أن المجموعة $S=\left\{x^2+1, x-2, x+3\right\}$ أساس للفضاء $\mathbf{P}_2$.

الحل

لنفرض أن $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ عنصر في $\mathbf{P}_2$ وأن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ حيث $p(x)=\alpha_1\left(x^2+1\right)+\alpha_2\left(x-2\right)+\alpha_3\left(x+3\right)$. وبمقارنة المعاملات نحصل على نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\qquad &= a_2 \\ \alpha_2+\alpha_3 &= a_1 \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 &= a_0 \end{aligned}$$

وبإيجاد محدد مصفوفة المعاملات A نجد أن :

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=1\left(3+2\right)=5\neq 0 .$$

ولذا فإن النظام متسق ومن ثم فإن S تولد $\mathbf{P}_2$.

بما أن محدد مصفوفة النظام المتجانس المقابل هو محدد المصفوفة A . وبما أن $\det A=5\neq 0$ فإن A لها معكوس ولذا فإن الحل الوحيد للنظام المتجانس هو الحل التافه ولذا فإن $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.أي أن S مستقلة خطياً. وبالتالي فإن S أساس للنظام $\mathbf{P}_2$. □

لقد بينا في المثال (١٦ ، ٤) أنه إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ فإن مجموعة حل النظام المتجانس $AX=0$ تشكل فضاء جزئياً من الفضاء $\mathbf{M}_{n1}$ (أو الفضاء $\mathbb{R}^n$) . في المثال التالي نبين كيف نعين أساساً لهذا الفضاء الجزئي والذي أطلقنا عليه فضاء الحل للنظام المتجانس $AX=0$ أو الفضاء الصفري.

مثال (٤٧ ، ٤)

عين أساس فضاء الحل للنظام المتجانس :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

الحل

باستخدام طريقة جاوس ــ جوردان لحل النظام نجد أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة الموسعة هي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ولذا فإن النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

بوضع $x_4 = t$ و $x_3 = s$ نجد أن الحل العام للنظام هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s-3t \\ -s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولذا فإن المجموعة $S=\left\{[2,-1,1,0]^T,[-3,1,0,1]^T\right\}$ تولد فضاء الحل ومن السهل أن ترى أنها مستقلة خطياً ولذا فإن S أساس لفضاء الحل . □

مثال (٤٨ ، ٤)

عين أساساً للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbf{M}_{22}$ حيث $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a , b \in \mathbb{R}\right\}$.

الحل

لاحظ أن $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ولذا فإن المتجهين $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ يولدان $\mathbf{W}$.

كما أنه من السهل أن نرى أنهما مستقلان خطياً وبالتالي فهما أساس للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$. □

المبرهنة التالية تبين لنا أن أساس فضاء متجهات يحتوي على أقل عدد من المتجهات المستقلة خطياً والمولدة للفضاء .

مبرهنة (١٤ ، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ ولتكن $B=\{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_m\}$ مجموعة جزئية من $\mathbf{V}$. إذا كان $m > n$ فإن B مرتبطة خطياً .

البرهان

لنفرض أن $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_m \in \mathbf{R}$ وأن :

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0} \qquad (١)$$

لما كانت S أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإن كل متجه من متجهات B هو تركيب خطي لمتجهات S لذا فإنه يوجد :

$$\alpha_{11} , \alpha_{12} , \ldots , \alpha_{n1} , \alpha_{21} , \alpha_{22} , \ldots , \alpha_{n2} , \ldots , \alpha_{m1} , \alpha_{m2} , \ldots , \alpha_{mn} \in \mathbb{R}$$

بحيث يكون :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{u}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_m &= \alpha_{m1}\mathbf{v}_1 + \alpha_{m2}\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_n \end{aligned} \qquad (٢)$$

بالتعويض من (٢) في (١) والتبسيط نحصل على :

$$(\alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{21}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{m1}\alpha_m)\mathbf{v}_1 + (\alpha_{12}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{m2}\alpha_m)\mathbf{v}_2 + \ldots$$
$$+ (\alpha_{1n}\alpha_1 + \alpha_{2n}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{mn}\alpha_m)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ولما كانت S مستقلة خطياً فإن معاملات $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ جميعها أصفاراً ولذلك نحصل على النظام المتجانس التالي في المجاهيل $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{21}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{m1}\alpha_m &= 0 \\ \alpha_{12}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{m2}\alpha_m &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{1n}\alpha_1 + \alpha_{2n}\alpha_n + \ldots + \alpha_{mn}\alpha_m &= 0 \end{aligned} \qquad (٣)$$

وبما أن عدد معادلات النظام (٣) هو n ولما كان $m > n$ فإن للنظام عدد غير منته من الحلول . أي أننا نستطيع إيجاد حل $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ غير صفري . وبالتالي فإن B مرتبطة خطياً . ♦

النتيجة التالية هي صورة أخرى مكافئة للمبرهنة (١٤ ، ٤) .

نتيجة (١٥ ، ٤)

إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكانت $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ مجموعة جزئية من المتجهات المستقلة خطياً من $\mathbf{V}$ فإن $m \le n$. ♦

تزودنا النتيجة التالية بالمعلومات اللازمة لتعريف بعد فضاء المتجهات .

نتيجة (١٦ ، ٤)

إذا كانت كل من $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ و $S_1 = \{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \ldots , \mathbf{u}_m \}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإن $m = n$.

البرهان

بما أن S أساس للفضاء $\mathbf{V}$ ولما كانت S_1 مستقلة خطياً فإنه باستخدام النتيجة (١٥ ، ٤) نجد أن $m \le n$. وبالمثل لما كانت S_1 أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ ولما كانت S مستقلة خطياً فإن $n \le m$. وبالتالي فإن $m = n$. ♦

تعريف (١١ ، ٤)

إذا كانت $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد (dimension) الفضاء $\mathbf{V}$ ونكتب $\dim \mathbf{V} = n$.

ملحوظة

يقال عن فضاء متجهات $\mathbf{V}$ أنه منتهي البعد إذا كان $\mathbf{V} = \{ \mathbf{0} \}$ أو إذا كان أساس $\mathbf{V}$ يتكون من عدد منته من المتجهات . ونلفت نظر القارئ إلى أن الفضاءات غير منتهية البعد موجودة ولكننا لن نتطرق إليها في هذا الكتاب وتكون دراستنا مقصورة فقط على الفضاءات منتهية البعد .

من الأمثلة (٤١ ، ٤) ، (٤٢ ، ٤) و (٤٣ ، ٤) نجد أن :

$\dim \mathbf{M}_{mn} = m\,n$ ، $\dim \mathbf{P}_n = n+1$ و $\dim \mathbb{R}^n = n$.

كذلك فإن بعد فضاء حل النظام المتجانس في المثال (٤٦ ، ٤) هو 2 كما أن بعد الفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ في المثال (٤٧ ، ٤) هو 2 .

لقد عرفنا أساس فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ بأنها مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات وتولد $\mathbf{V}$. ولكن إذا علمنا مسبقاً بعد الفضاء وليكن n وعلمنا أن المجموعة S المكونة من n من المتجهات مستقلة خطياً (أو تولد $\mathbf{V}$) فإن S تكون أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ وهذا ما تؤكده لنا المبرهنة التالية :

مبرهنة (١٧ ، ٤)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات منتهي البعد حيث $\dim \mathbf{V} = n$ ولتكن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbf{V}$. عندئذٍ

(١) إذا كانت S مستقلة خطياً فإن S أساس للفضاء $\mathbf{V}$.

(٢) إذا كانت S تولد $\mathbf{V}$ فإن S أساس للفضاء $\mathbf{V}$ كذلك .

البرهان

(١) لنفرض أن S مستقلة خطياً ولكنها لا تولد $\mathbf{V}$. عندئذٍ يوجد $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathbf{V}$ بحيث أن $\mathbf{v}_{n+1}$ ليس تركيباً خطياً لمتجهات S ولذا فإن المجموعة $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$ مستقلة خطياً . وحينئذ $\dim \mathbf{V} \geq n+1$ مما يناقض كون $\dim \mathbf{V} = n$. ولذلك لا بد وأن تكون S تولد $\mathbf{V}$ وبالتالي فهي أساس للفضاء $\mathbf{V}$.

(٢) لنفرض أن S تولد $\mathbf{V}$. إذا كانت S مرتبطة خطياً فإن أحد متجهاتها وليكن $\mathbf{v}_n$ هو تركيب خطي لبقية المتجهات . لذا فإن المجموعة $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ تولد $\mathbf{V}$ أيضاً . إذا كانت S_1 مرتبطة خطياً فإنه بحذف أحد متجهاتها نحصل على مجموعة جديدة S_2 تولد $\mathbf{V}$. وبالاستمرار على هذا المنوال نصل في النهاية إلى مجموعة مولدة للفضاء $\mathbf{V}$ ومستقلة خطياً وتتكون من k من المتجهات حيث $k < n$ ولكن هذا يناقض كون $\dim \mathbf{V} = n$. وعليه فإن S مستقلة خطياً وبالتالي فهي أساس للفضاء $\mathbf{V}$. ♦

مثال (٤٩ ، ٤)

أثبت أن $S=\{(1,2,3),(-2,1,0),(1,0,1)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل

بما أن $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ وأن عدد عناصر S هو 3 فإنه يكفي إثبات أن S مستقلة خطياً ولذا نفرض أن A هي المصفوفة التي أعمدتها عناصر S . وبحساب محدد A نجد أن

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0)+2(2-0)+1(0-3)=2\neq 0$$

ولذا فإن S مستقلة خطياً . ومن ثم فهي أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$. □

تزودنا المبرهنة التالية بالعلاقة بين بعد فضاء متجهات وبعد فضاءاته الجزئية .

مبرهنة (١٨ ، ٤)

ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات منتهي البعد حيث $\dim \mathbf{V} = n$. وليكن $\mathbf{W} \le \mathbf{V}$. عندئذٍ فإن

(١) $\mathbf{W}$ منتهي البعد كما أن $\dim \mathbf{W} \le n$.

(٢) $\dim \mathbf{W} = n$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

البرهان

(١) سنبرهن أولاً أن $\mathbf{W}$ منتهي البعد . إذا كان $\mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$ فإن ذلك واضح ولذا نفرض أن $\mathbf{W} \neq \{\mathbf{0}\}$. وليكن $\mathbf{0} \neq \mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}$. إذا كان $\mathbf{W} = <\mathbf{w}_1>$ فإن $\mathbf{W}$ منتهي البعد وبالتالي نكون قد إنتهينا من البرهان . أما إذا كان $\mathbf{W} \neq <\mathbf{w}_1>$ فإننا نختار $\mathbf{w}_2 \notin <\mathbf{w}_1>$. ولذا فإن $\{\mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2\}$ مستقلة خطياً . إذا كان $\mathbf{W} = <\{\mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2\}>$ فإنه منتهي البعد وعليه نكون قد إنتهينا من البرهان في هذه الحالة . أما إذا كان $\mathbf{W} \neq <\{\mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2\}>$ فإننا بالاستمرار على هذا المنوال لابد من التوقف عند مرحلة معينة وذلك لأن $\dim \mathbf{V}$ منتهي وبالتالي فإننا نحصل

على مجموعة مستقلة خطياً تولد $\mathbf{W}$. وعليه فإن $\mathbf{W}$ منتهي البعد. ليكن $\dim \mathbf{W} = m$ بما أن أساس $\mathbf{W}$ مجموعة مستقلة خطياً من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وتتكون من m من العناصر فإن $m \le n$.

(٢) من الواضح أنه إذا كان $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ فإن $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} = n$. ولبرهان العكس نفرض أن $\dim \mathbf{W} = n$. عندئذٍ أي أساس $S = \{ \mathbf{w}_1 , \ldots , \mathbf{w}_n \}$ للفضاء $\mathbf{W}$ يتكون من عناصر مستقلة خطيا في $\mathbf{V}$ عددها n ولذا فإنها ، باستخدام مبرهنة (١٧ ، ٤) ، تكون أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. وعندئذٍ $\mathbf{W} = \langle S \rangle = \mathbf{V}$. ♦

لقد وعدنا في البند (٢ ، ٤) أن نبرهن أن الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}^2$ هي $\{ (0,0) \}$ ، $\mathbb{R}^2$ والمستقيمات المارة بنقطة الأصل وسنفي بهذا الوعد الآن .

مثال (٥٠ ، ٤)

بما أن $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ فإن بعد اي فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$ هو إما 0 أو 1 أو 2 . ليكن $\mathbf{W} \le \mathbb{R}^2$. إذا كان $\dim \mathbf{W} = 0$ فإن $\mathbf{W} = \{ (0,0) \}$. إذا كان $\dim \mathbf{W} = 2$ فإن $\mathbf{W} = \mathbb{R}^2$. أما إذا كان $\dim \mathbf{W} = 1$ فإن $\mathbf{W}$ يحتوي على أساس يتكون من عنصر واحد $\{ (x , y) \}$. وبالتالي $\mathbf{W} = \{ \alpha (x , y) : \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (\alpha x , \alpha y) : \alpha \in \mathbb{R} \}$.
وما هذه المجموعة إلا مجموعة نقاط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (x , y) . □

لقد تطرقنا في هذا البند لأساس وبعد فضاء المتجهات ولكننا لم نقدم البراهين على وجود أساس لفضاء متجهات $\mathbf{V}$. سنقدم هذه البراهين الآن حيث سنثبت أن أي مجموعة منتهية ومولدة لفضاء متجهات يجب أن تحتوي على أساس لهذا الفضاء ، كذلك سنثبت أن أي مجموعة جزئية مستقلة خطيا من فضاء متجهات يمكن توسيعها إلى أساس لهذا الفضاء .

مبرهنة (١٩ ، ٤)
إذا كانت $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية غير صفرية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ وكانت B تولد $\mathbf{V}$ فإن B تحتوي على أساس للفضاء $\mathbf{V}$.

البرهان
إذا كانت B مستقلة خطياً فإن B أساس للفضاء $\mathbf{V}$ وفي هذه الحالة نكون قد أنتهينا من البرهان . أما إذا كانت B مرتبطة خطياً فإن أحد متجهاتها وليكن $\mathbf{v}_n$ تركيباً خطياً لبقية متجهات B . بحذف $\mathbf{v}_n$ من B نحصل على $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}\}\subseteq B$.
سنبرهن الآن أن B_1 تولد $\mathbf{V}$. لنفرض إذن أن $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. بما أن B تولد $\mathbf{V}$ فإنه يوجد $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{v}_n$.
كذلك بما أن $\mathbf{v}_n$ تركيب خطي لمتجهات B_1 فإنه يوجد $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1}\in\mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{v}_n=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$. وبالتالي نحصل على :

$$\mathbf{v}=(\alpha_1+\alpha_n\beta_1)\mathbf{v}_1+(\alpha_2+\alpha_n\beta_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(\alpha_{n-1}+\alpha_n\beta_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}.$$

ولذا فإن B_1 تولد $\mathbf{V}$.

الآن إذا كانت B_1 مستقلة خطياً فإنها أساس للفضاء $\mathbf{V}$. أما إذا كانت مرتبطة خطياً فإن أحد متجهاتها وليكن $\mathbf{v}_{n-1}$ تركيباً خطياً لبقية المتجهات . وبحذف $\mathbf{v}_{n-1}$ نحصل على مجموعة جديدة $B_2\subseteq B_1\subseteq B$ مولدة للفضاء $\mathbf{V}$. وبالاستمرار على هذا المنوال وبما أن B مجموعة منتهية فإننا نحصل في النهاية على مجموعة S مستقلة خطياً وتولد $\mathbf{V}$ وهذه المجموعة هي أساس للفضاء $\mathbf{V}$. ♦

من الممكن إتباع برهان المبرهنة (١٩، ٤) لإيجاد أساس لفضاء متجهات كمجموعة جزئية من مجموعة مولدة لهذا الفضاء وهذا ما يبينه المثال التالي :

مثال (٥١ ، ٤)

لنفرض أن $B=\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4 , \mathbf{v}_5\}\subseteq \mathbb{R}^3$ حيث :

$\mathbf{v}_1=(1,0,1), \mathbf{v}_2=(1,1,0), \mathbf{v}_3=(-1,1,-2), \mathbf{v}_4=(1,2,1), \mathbf{v}_5=(1,1,2)$.

إذا كانت A هي المصفوفة من الدرجة 3×5 التي أعمدتها متجهات B فإنه باستخدام طريقة جاوس لحل النظام $AX=C$ لأي متجه C حيث $C\in\mathbb{R}^3$ نجد أن هذا النظام متسق ولذا فإنه باستخدام المبرهنة (٧ ، ٤) نجد أن B تولد $\mathbb{R}^3$.
بما أن $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4+\mathbf{v}_5=\mathbf{0}$ فإن B مرتبطة خطياً . ولذا فإن $\mathbf{v}_5=-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_5$. ولذا بحذف $\mathbf{v}_5$ من B نحصل على المجموعة $B_1=\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4\}$. باستخدام المبرهنة (٧ ، ٤) مرة أخرى نستطيع إثبات أن B_1 تولد $\mathbb{R}^3$. وبما أن $2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ فإن B_1 مرتبطة خطياً . ولذا فإن $\mathbf{v}_3=-2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. باستبعاد $\mathbf{v}_3$ من B_1 نحصل على المجموعة $B_2=\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_4\}$ والتي لا تزال تولد $\mathbb{R}^3$. وبما أن $\dim \mathbb{R}^3=3$ فإن B_2 مستقلة خطياً ولذا فإنها أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$. □

ملحوظة

إذا كانت $B\subseteq\mathbb{R}^n$ فإن كلاً من الخوارزميتين التاليتين تزودنا بأساس للفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المولد بالمجموعة B والتي نقدم تبريراً لصحتها في المبرهنة (٢٦ ، ٤) .

خوارزمية (١ ، ٤)

(أ) لتكن B مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$. للحصول على أساس للفضاء $\langle B\rangle$ نفذ الخطوات التالية :

(١) عين مصفوفة A صفوفها متجهات B .

(٢) استخدم طريقة جاوس لوضع A على صيغة درجية صفية أو درجية صفية مختزلة ولتكن C .

(٣) عندئذٍ صفوف C غير الصفرية تشكل أساساً للفضاء الجزئي $\langle B \rangle$.

(ب) لتكن $B \subseteq \mathbb{R}^n$. للحصول على أساس للفضاء الجزئي $\langle B \rangle$ حيث $S \subseteq B$ نفذ الخطوات التالية :

(١) عين مصفوفة A أعمدتها متجهات B .

(٢) استخدم طريقة جاوس لوضع A على صيغة درجية صفية أو صفية مختزلة ولتكن C .

(٣) عين الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C .

(٤) لتكن S_1 هي مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C ولتكن S هي مجموعة المتجهات في A المقابلة لعناصر S_1.

(٥) عندئذٍ $S \subseteq B$ هي أساس للفضاء الجزئي $\langle B \rangle$.

مثال (٥٢ ، ٤)

إذا اتبعنا الخوارزمية (١ ، ٤) (ب) لإيجاد أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ المولد بالمجموعة B المقدمة في المثال (٥٠ ، ٤) فإننا نحصل على :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

وباستخدام طريقة جاوس ـ جوردان فإن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

إن الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C هي الأول والثاني والرابع وهذه الأعمدة تقابل الأعمدة في A التي تشكل الأساس المطلوب وهو :

$$S = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,2,1)\}$$

وهذا يتفق مع ما وجدناه في المثال (٥٠ ، ٤) . □

مبرهنة (٢٠ ، ٤)

إذا كانت S مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً في فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ المنتهي التوليد فإنه يوجد أساس T للفضاء $\mathbf{V}$ يحتوي S .

البرهان

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$. إذا كانت S تولد $\mathbf{V}$ فإن البرهان يكون قد انتهى في هذه الحالة . أما إذا كانت S لا تولد $\mathbf{V}$ فإننا نختار $\mathbf{v}_{k+1}\notin\langle S\rangle$. باستخدام المبرهنة (١٢، ٤) نجد أن $S_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1}\}$ مستقلة خطياً . إذا كانت S_1 تولد $\mathbf{V}$ فإن البرهان يكون قد انتهى في هذه الحالة ايضاً . أما إذا كانت S_1 لا تولد $\mathbf{V}$ فإننا نختار $\mathbf{v}_{k+2}\notin\langle S_1\rangle$. ولذا نحصل على مجموعة $S_2=S_1\cup\{\mathbf{v}_{k+2}\}$ مستقلة خطياً . وبالإستمرار على هذا المنوال نحصل على $S\subseteq S_1\subseteq S_2\subseteq\ldots$. وبما أن $\mathbf{V}$ منتهي التوليد فلا بد أن نتوقف بعد عدد منته من الخطوات وبالتالي نحصل على أساس للفضاء $\mathbf{V}$. ♦

مثال (٥٣ ، ٤)

عين أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يحتوي $\mathbf{v}=(0,1,1)$.

الحل

لتكن $S=\{(0,1,1)\}$. من الواضح أن S مستقلة خطياً . لنفرض أن $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$ ، عندئذٍ ، $\mathbf{v}_1\notin\langle S\rangle$. ولذا فإن $S_1=\{(0,1,1),(1,0,0)\}$ مستقلة خطياً . نستطيع الآن أن نرى ، وبسهولة أن $\mathbf{v}_2=(0,1,0)\notin\langle S_1\rangle$. وبالتالي فإن :

$S_2=\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ مستقلة خطياً . وبما أن بعد $\mathbb{R}^3$ هو 3 فإن S_2 أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ يحتوي S . □

مثال (٤ ، ٥٤)

عين أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$ يحتوي $p(x)=x^2-x+1$.

الحل

نفرض أن $S=\{p(x)\}$. من الواضح أن S مستقلة خطياً و أن $q(x)=x+2\notin\langle S\rangle$ لذا فإن $S_1=\{p(x),q(x)\}$ مستقلة خطياً . الآن نستطيع ، وبسهولة ، أن نثبت أن $r(x)=x^2+3\notin\langle S_1\rangle$. وبالتالي فإن $S_2=\{p(x),q(x),r(x)\}$ مستقلة خطياً .

وبما أن بعد $\mathbf{P}_2$ هو 3 فإن S_2 أساس للفضاء $\mathbf{P}_2$. □

إذا كان فضاء المتجهات هو $\mathbb{R}^n$ فإننا نستطيع الإستعانة بالخوارزمية (١ ، ٤) لتوسيع مجموعة مستقلة من متجهات في $\mathbb{R}^n$ إلى أساس له كالتالي :

خوارزمية (٢، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k\}$ مجموعة مستقلة خطياً من متجهات في $\mathbb{R}^n$. للحصول على أساس B يحتوي S نفذ الخطوات التالية :

(١) اختر أساساً $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\}$ للفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذ :

$S_1=\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n\}$ تولد $\mathbb{R}^n$.

(٢) طبق خطوات الخوارزمية (١ ، ٤) (ب) للحصول على أساس B حيث $B\subseteq S_1$.

مثال (٥٥ ، ٤)

عين أساساً للفضاء $\mathbf{R}^3$ يحتوي المجموعة $S=\{(1,0,2),(1,1,1)\}$.

الحل

من السهل أن نرى أن المجموعة S مستقلة خطياً. نختار الأساس المعتاد $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ للفضاء $\mathbf{R}^3$. الآن نفرض أن $S_1=\{(1,0,2),(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. الآن نضع المصفوفة A التي أعمدتها متجهات S_1 على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة فنجد أن هذه الصيغة هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وبما أن الأعمدة ذات العناصر المتقدمة هي الأول والثاني والثالث، لذا فإن أعمدة A التي تكون الأساس المطلوب هي الأول والثاني والثالث . أي أن الأساس هو $B=\{(1,0,2),(1,1,1),(1,0,0)\}$. □

تمارين (٥ ، ٤)

(١) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{R}^2$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbb{R}^2$:

(أ) $\{(1,3),(3,5)\}$

(ب) $\{(7,1),(10,1)\}$

(جـ) $\{(7,1),(21,3)\}$

(د) $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$

(٢) بين أ ياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$ تشكل اساساً لفضاء لمتجهات $\mathbb{R}^3$:

(أ) $\{(0,17,8),(1,7,5),(2,-3,2)\}$.

(ب) $\{(\sqrt{2},0,\sqrt{2}),(\sqrt{3},0,\sqrt{6}),(0,-\sqrt{6},\sqrt{3})$.

(جـ) $\{(1,2,1),(1,3,1),(2,3,1)\}$.

(د) $\{(2,1,3),(-1,2,1),(3,0,0)\}$.

(٣) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^4$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbb{R}^4$:

(أ) $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

(ب) $\{(1,1,3,-1),(1,1,-1,-1),(2,2,2,-2),(3,3,1,-3)\}$.

(جـ) $\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$.

(د) $\{(3,0,-3,6),(0,2,3,1),(0,-2,-2,0),(-2,1,2,1)\}$.

(٤) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{P}_2$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{P}_2$:

(أ) $\{1, x+1, x^2-x\}$.

(ب) $\{x^3+1, x^3-1, x^2+1, x^2-1$.

(جـ) $\{x^2+3x+5, 5x^2+3x+1, x^2+x+1\}$.

(د) $\{x+5, -x^2-x+1, 2x^2+x+3$.

(٥) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{M}_{22}$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{M}_{22}$:

(أ) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\right\}$.

(ب) $\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\ 5 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$.

(جـ) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$.

(د) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$.

(٦) عين أساس وبعد كل من الفضاءات الجزئية المبينة :

(أ) $\mathbf{W}=\{(a,b,c):a+b+c=0\}\le\mathbb{R}^3$.

(ب) $\mathbf{W}=\{(a,b,c):a+b=b+c=0\}\le\mathbb{R}^3$.

(جـ) $\mathbf{W}=\{(a-b,b+c,b,b-c):a,b,c\in\mathbb{R}\}\le\mathbb{R}^4$.

(د) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+2b+3c+d=0\}\le\mathbb{R}^4$.

(هـ) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+b=0,\ b+c+d=0\}\le\mathbb{R}^4$.

(و) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{22}:A^T+A=0\}\le\mathbf{M}_{22}$.

(ز) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:A\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}A\right\}\le\mathbf{M}_{22}$.

(ح) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{22}:2a_{11}+a_{22}=a_{12}+a_{21}=0\}\le\mathbf{M}_{22}$.

(ط) $\mathbf{W}=\{a(x+1)+b(x+x^2):a,b\in\mathbb{R}\}\le\mathbf{P}_2$.

(ى) $\mathbf{W}=\{ax^2+bx+c:a+b+c=0\}\le\mathbf{P}_2$.

(٧) عين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس $AX=0$ حيث :

(أ) $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&3&-2\\2&-4&3\end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&-1&2&-1\\1&-3&4&-5\\5&-3&5&-4\end{bmatrix}$

(جـ) $A=\begin{bmatrix}3&1&1&1\\5&-1&1&-1\end{bmatrix}$ (د) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&2&-2\\4&3&-1\\6&5&1\end{bmatrix}$

(هـ) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -5 & 4\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$ (و) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 7\end{bmatrix}$

(ز) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5\end{bmatrix}$.

(٨) عين أساساً لفضاء المتجهات المعطى الذي يحتوي على كل من المجموعات الواردة فيما يأتي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ، $S=\{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_3$ ، $S=\{1+x,1-x+x^2-x^3\}$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(د) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ، $S=\{(0,0,1,1),(1,1,1,1)\}$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_3$ ، $S=\{x^2+1,x^2+x\}$.

(٩) عين أساساً لكل فضاء متجهات معطى من بين مجموعة المتجهات الواردة فيما يأتي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $S=\{(2,1,4),(1,3,-2),(0,1,-1),(3,-6,18),(-2,1,-6)\}$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{2+x,3+x^2,x^2-2x-1,x^2-x\}$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ،

$S=\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$.

(د) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $S=\{(1,2),(1,3),(-2,3),(4,1)\}$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $S=\{(-1,1,0),(1,0,-1),(-3,2,1),(0,1,1)\}$.

(و) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ،

$S=\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0)\}$.

(ز) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{x^2+x-1,2x^2-3,3x+1,x^2-x-2\}$.

(١٠) أثبت أن الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}^3$ هي $\{(0,0)\}$ ، $\mathbb{R}^3$ ، المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل .

(١١) أثبت أن $\{(a,b),(a_1,b_1)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كانت $\{a+bx,a_1+b_1x\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_1$.

(١٢) عين أساساً S لفضاء المتجهات $\mathbf{M}_{22}$ بحيث يكون $A^2=A$ لكل $A\in S$.

(١٣) هل تستطيع إيجاد أساس لفضاء المتجهات $\mathbf{P}_3$ بحيث يكون مجموع معاملات كل من عناصره يساوي صفراً ؟

(١٤) إذا كان $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فبين أي من المجموعات التالية تكون أساساً للفضاء $\mathbf{V}$:

(أ) $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ (ب) $\{2\mathbf{u}+\mathbf{v}+3\mathbf{w},3\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{u}-4\mathbf{w}\}$

(جـ) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ (د) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$.

(١٥) هل يمكن لمجموعة مكونة من أربعة متجهات أن تولد $\mathbb{R}^3$ ؟ هل يمكن أن تكون مستقلة خطياً ؟

(١٦) إذا كان $\mathbf{U}=\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}\rangle$ وكان $\mathbf{W}=\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}\}\rangle$ فأثبت أن $\dim\mathbf{W}=\dim\mathbf{U}$ أو أن $\dim\mathbf{W}=\dim\mathbf{U}+1$.

(١٧) إذا كانت $p(x),q(x)\in\mathbf{P}_1$ حيث $p(1)\neq0$ ، $q(2)=0$ و $p(2)=0=q(1)$ فأثبت أن $\{p(x),q(x)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{P}_1$.

(١٨) إذا كان كل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ فضاءاً جزئياً من $\mathbf{V}$ فأثبت أن :

$\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})\leq\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$. وإذا كان $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}=\{\mathbf{0}\}$ فأثبت أن :

$\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

(٦ ، ٤) الإحداثيات وتغيير الأساس

Coordinates and Change of Basis

إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإننا نستطيع التعبير عن أي عنصر $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ بطريقة وحيدة كتركيب خطي لعناصر S . أي أنه توجد أعداد وحيدة $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\dots+\alpha_n\mathbf{v}_n$. ولهذا نقدم التعريف التالي :

تعريف (١٢ ، ٤)

إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\dots+\alpha_n\mathbf{v}_n$ فإن الأعداد الوحيدة $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ تسمى إحداثيات $\mathbf{v}$ بالنسبة إلى الأساس S (coordinates of v relative to S) . كما يسمى المتجه

$$[\mathbf{v}]_S=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

المتجه الإحداثي للمتجه $\mathbf{v}$ بالنسبة للأساس S (coordinate vector of v relative to S) .

مثال (٥٦ ، ٤)

أحسب $[\mathbf{v}]_S$ و $[\mathbf{v}]_B$ حيث S هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ و B هو الأساس $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(-1,3,2)$.

الحل

بما أن $(-1,3,2)=-1(1,0,0)+3(0,1,0)+2(0,0,1)$ فإن

$$[\mathbf{v}]_S=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

. ولإيجاد $[\mathbf{v}]_B$ لاحظ أنه إذا كان :

$$.\left(-1,3,2\right)=\alpha_1\left(1,1,0\right)+\alpha_2\left(1,0,1\right)+\alpha_3\left(0,1,1\right)$$

فإننا نحصل على نظام المعادلات :

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2 \qquad &= -1\\ \alpha_1 \qquad +\alpha_3 &= 3\\ \alpha_2+\alpha_3 &= 2\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $\alpha_1=2,\alpha_2=-3,\alpha_3=1$. ولذا فإن $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$.□

مثال (٥٧ ، ٤)

ليكن S الأساس المعتاد للفضاء $\mathbf{P}_2$ ولتكن $B=\left\{1+x,x+x^2,1+x^2\right\}$ أساساً آخر . عين كلاً من $\left[p\left(x\right)\right]_S$ و $\left[p(x)\right]_B$ حيث $p\left(x\right)=2+3x+4x^2$.

الحل

مــن الواضــح أن $\left[p\left(x\right)\right]_S=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$. ولإيجــاد $\left[p\left(x\right)\right]_B$ نفــرض أن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ حيث :

$$p\left(x\right)=2+3x+4x^2=\alpha_1\left(1+x\right)+\alpha_2\left(x+x^2\right)+\alpha_3\left(1+x^2\right) .$$

لذا فإننا نحصل على نظام المعادلات :

$$\begin{aligned}\alpha_1 \qquad +\alpha_3 &= 2\\ \alpha_1+\alpha_2 \qquad &= 3\\ \alpha_2+\alpha_3 &= 4\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن :

$\alpha_1=\dfrac{1}{2}, \alpha_2=\dfrac{5}{2}, \alpha_3=\dfrac{3}{2}$. وبالتالي فإن $[p(x)]_B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$. □

لاحظ أنه في كل من المثالين السابقين قد تغير متجه الإحداثيات بتغير الأساس . والسؤال الذي يطرح نفسه هنا : هل توجد علاقة بين متجهي الإحداثيات عند الإنتقال من أساس إلى أساس آخر لفضاء متجهات ؟ وإذا وجدت هذه العلاقة هل نستطيع تحديد ماهيتها ؟ المبرهنة التالية تجيبنا على هذين السؤالين :

مبرهنة (٢١ ، ٤)

ليكن كل من $B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ و $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$. ولتكن ${}_C P_B$ مصفوفة من الدرجة $\mathbf{n}$ أعمدتها $[\mathbf{v}_1]_C, \dots, [\mathbf{v}_n]_C$.

عندئذٍ فإن ${}_C P_B$ مصفوفة لها معكوس . كما أن

$[\mathbf{v}]_C={}_C P_B\,[\mathbf{v}]_B$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. بما أن B أساس للفضاء $\mathbf{V}$ فإنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\in\mathbf{R}$

بحيث يكون $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\dots+\alpha_n\mathbf{v}_n$. ولذا فإن $[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$.

الآن بما أن C أساس للفضاء $\mathbf{V}$ فإننا نستطيع أن نكتب كل من عناصر B كترتيب خطي لعناصر C . ولذا فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{u}_1 + \alpha_{21}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= \alpha_{12}\mathbf{u}_1 + \alpha_{22}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\mathbf{u}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= \alpha_{1n}\mathbf{u}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

ومنه فإن :

$$[\mathbf{v}_1]_C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_2]_C = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_C = \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

ولذا فإن ${}_C P_B$ هي المصفوفة :

$${}_C P_B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

الآن لدينا :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n \\
&= \alpha_1\left(\alpha_{11}\mathbf{u}_1 + \alpha_{21}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\mathbf{u}_n\right) + \alpha_2\left(\alpha_{12}\mathbf{u}_1 + \alpha_{22}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\mathbf{u}_n\right) \\
&\quad + \ldots + \alpha_n\left(\alpha_{1n}\mathbf{u}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\mathbf{u}_n\right) \\
&= \left(\alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{1n}\alpha_n\right)\mathbf{u}_1 + \left(\alpha_{21}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}\alpha_n\right)\mathbf{u}_2 \\
&\quad + \ldots + \left(\alpha_{n1}\alpha_1 + \alpha_{n2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_{nn}\alpha_n\right)\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

ولذا فإن :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{v}]_C &= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{1n}\alpha_n \\ \alpha_{21}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_{n1}\alpha_1 + \alpha_{n2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{nn}\alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = {}_C P_B [\mathrm{v}]_B
\end{aligned}$$

وأخيراً لبرهان أن للمصفوفة ${}_{C}P_{B}$ معكوس فإنه يكفي أن نبرهن أن النظام ${}_{C}P_{B}X = D$ متسق لكل $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$.

لنفرض إذن أن $\mathbf{v} = d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \ldots + d_n\mathbf{u}_n$. عندئذٍ ، $D = [\,\mathbf{v}\,]_C = {}_{C}P_{B}\ [\,\mathbf{v}\,]_B$.

ولذا فإن $[\,\mathbf{v}\,]_B$ حل للنظام ${}_{C}P_{B}\,X = D$ لكل D. ♦

تعريف (١٣ ، ٤)

تسمى المصفوفة ${}_{C}P_{B}$ في المبرهنة (٤،٢١) مصفوفة الانتقال (transition matrix) من الأساس B إلى الأساس C .

نتيجة (٢٢ ، ٤)

إذا كانت كل من B و C أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكانت ${}_{C}P_{B}$ هي مصفوفة الانتقال من B إلى C و ${}_{B}P_{C}$ هي مصفوفة الانتقال من C إلى B فإن :

$${}_{B}P_{C} = {}_{C}P_{B}^{-1}.$$

البرهان

لكل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ لدينا $({}_{B}P_{C})({}_{C}P_{B})[\,\mathbf{v}\,]_B = {}_{B}P_{C}\,[\,\mathbf{v}\,]_C = [\,\mathbf{v}\,]_B$. ولذا فإن $({}_{B}P_{C})({}_{C}P_{B}) = I$. أي أن ${}_{B}P_{C} = {}_{C}P_{B}^{-1}$. ♦

مثال (٥٨ ، ٤)

ليكن كل من $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ و $C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1)$$
$$\mathbf{u}_1 = (2,-1,3), \mathbf{u}_2 = (0,1,1), \mathbf{u}_3 = (1,-1,0).$$

عين كلاً من ${}_{C}P_{B}$ ، ${}_{B}P_{C}$ ، $[\,\mathbf{v}\,]_C$ و $[\,\mathbf{v}\,]_B$ حيث $\mathbf{v} = (2,3,5)$.

الحل

من الواضح أن $[\,\mathbf{v}\,]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. من السهل أن نرى أن :

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{u}_2 + (-1)\mathbf{u}_3$$

ولذا فإن $${}_C P_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

$[\mathbf{v}]_C = {}_C P_B [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. وأخيراً ، ${}_B P_C = {}_C P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\square$

مثال (٩، ٥٩ ، ٤)

ليكن كل من $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ و $C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$ حيث $\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1)$ ، $\mathbf{u}_2 = (-\sin\Theta, \cos\Theta)$ ، $\mathbf{u}_1 = (\cos\Theta, \sin\Theta)$ حيث $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$. أي أن C هو الأساس الذي نحصل عليه من B بدوران الإحداثيات الديكارتية حول نقطة الأصل بزاوية Θ باتجاه عكس عقارب الساعة . عين $[\,\mathbf{v}]_C$ لكل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

الحل

لنفرض أن $\mathbf{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. من الواضح أن $[v]_B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. الآن

$$\mathbf{v}_1=(1,0)=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2=\alpha_1(\cos\Theta,\sin\Theta)+\alpha_2(-\sin\Theta,\cos\Theta)$$

ولذا فإن :

$$\begin{aligned}1&=\alpha_1\cos\Theta-\alpha_2\sin\Theta\\0&=\alpha_1\sin\Theta+\alpha_2\cos\Theta\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن : $\alpha_1=\cos\Theta,\alpha_2=-\sin\Theta$. كذلك لدينا :

$$\mathbf{v}_2=(0,1)=\beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2=\beta_1(\cos\Theta,\sin\Theta)+\beta_2(-\sin\Theta,\cos\Theta)$$

ولذا فإن

$$\begin{aligned}0&=\beta_1\cos\Theta-\beta_2\sin\Theta\\1&=\beta_1\sin\Theta-\beta_2\cos\Theta\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن : $\beta_1=\sin\Theta,\ \beta_2=\cos\Theta$. وبالتالي فإن :

$${}_CP_B=\begin{bmatrix}\cos\Theta & \sin\Theta\\ -\sin\Theta & \cos\Theta\end{bmatrix}$$

ولذا فإن

$$[v]_C={}_CP_B\,[v]_B=\begin{bmatrix}x\cos\Theta+y\sin\Theta\\ -x\sin\Theta+y\cos\Theta\end{bmatrix}.\ \square$$

مثال (٦٠ ، ٤)

إذا كانت كل من $B=\{1,x,x^2\}$ و $C=\{1,(1-x),(1-x)^2\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$ فاحسب ${}_CP_B$.

الحل

بما أن

$$\begin{aligned}1&=1+0(1-x)+0(1-x)^2\\x&=1-(1-x)+0(1-x)^2\\x^2&=1-2(1-x)+1(1-x)^2\end{aligned}$$

فإن $\;{}_{C}P_{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\;.\;\square$

تمارين (٦، ٤)

(١) عين $[\,v\,]_B$ لكل مما يلي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2 \;,\; B=\{x^2, x+1, x+2\} \;,\; \mathbf{v}=2x^2+x-1$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3 \;,\; B=\{(1,-1,2),(1,1,-1),(0,0,1)\} \;,\; \mathbf{v}=(1,2,3)$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22} \;,\; B=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\} \;,\; \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$.

(د) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{x^2, x+1, x+2\}$ ، $\mathbf{v}=ax^2+bx+c$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(1,-1,2),(1,1,-1),(0,0,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(a,b,c)$.

(و) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ،

$B=\left\{\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ ، $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}$.

في التمارين من (٢) إلى (١١) احسب كلاً من ${}_{C}P_{B}$ ، ${}_{B}P_{C}$ ، $[\mathbf{v}]_C$ و $[\mathbf{v}]_B$.

(٢) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $B=\{(1,1),(-1,1)\}$ ، $C=\{(1,2),(2,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(3,-5)$.

(٣) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $B=\{(1,0),(1,1)\}$ ، $C=\{(1,-1),(1,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(5,7)$.

(٤) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ ،

$C=\{(-1,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ ، $\mathbf{v}=(3,0,-7)$.

(٥) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(-3,0,-3),(-3,2,1),(1,6,-1)\}$ ،

$C=\{(-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7)\}$ ، $\mathbf{v}=(-5,8,-5)$.

(٦) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_1$ ، $B=\{1+x, 1-x\}$ ، $C=\{2+x, 1+2x\}$ ، $\mathbf{v}=-3x+4$.

(٧) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{3x+6, 2x+10\}$ ، $C=\{2, 2x+3\}$ ، $\mathbf{v}=x-4$.

(٨) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{1+x^2, x^2, x+x^2\}$ ، $C=\{1, x^2, x^2+x+1\}$ ،
$\mathbf{v}=4x^2+2x-1$.

(٩) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{x, x^2, x+1\}$ ، $C=\{2, x+3, x^2-1\}$ ، $\mathbf{v}=x^2+x+1$.

(١٠) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ ،
$C=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3&-1\\1&4\end{bmatrix}$.

(١١) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ ،
$C=\left\{\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ ، $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2&-6\\7&5\end{bmatrix}$.

(١٢) لتكن B أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{V}$. أثبت أن :

(أ) $[\mathbf{v}+\mathbf{u}]_B=[\mathbf{v}]_B+[\mathbf{u}]_B$ لكل $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(ب) $[\alpha\mathbf{v}]_B=\alpha[\mathbf{v}]_B$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ و لكل $\alpha\in\mathbb{R}$.

(جـ) إذا كان $[\mathbf{v}]_B=[\mathbf{u}]_B$ فإن $\mathbf{v}=\mathbf{u}$.

(د) أثبت أن $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ مجموعة مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت $\{[\mathbf{u}]_B, [\mathbf{v}]_B\}$ مجموعة مستقلة خطياً .

(١٣) لتكن كل من B ، C و D أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. أثبت أن ${}_D P_B=({}_D P_C)({}_C P_B)$.

(١٤) إذا كانت $B=\{(1,1,1),(1,-2,1),(1,0,-1)\}$ ،
$C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ و $D=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$
أساسات للفضاء $\mathbb{R}^3$ فتحقق من صحة المتطابقة في التمرين (١٣) .

(١٥) أعد التمرين (١٤) للفضاء $\mathbf{P}_2$ والأساسات $B=\{1, x, x^2\}$ ،
$C=\{x^2+x+1, -x+1, x^2-1\}$ و $D=\{x, x+1, x^2\}$.

(١٦) ليكن $\mathbf{V}=\langle\{\sin x, \cos x\}\rangle$. أثبت أن :

(أ) $C=\{2\sin x+\cos x, 3\cos x\}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$.

(ب) أحسب مصفوفة الانتقال من $B=\{\sin x, \cos x\}$ إلى C .

(جـ) أحسب مصفوفة الانتقال من C إلى B .

(د) إذا كان $\mathbf{v} = 2\sin x - 5$ فتحقق من أن $[\,\mathbf{v}\,]_C = {}_C P_B\,[\,\mathbf{v}\,]_B$.

(١٧) لتكن كل من $B = \{3e^x - x\,e^x, 2e^x\}$ و $C = \{4e^x - 2x\,e^x, -e^x + 3x\,e^x\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V} = \langle \{e^x, x\,e^x\} \rangle$.

(أ) أحسب ${}_C P_B$ و ${}_B P_C$.

(ب) إذا كان $\mathbf{v} = 5e^x + x\,e^x$ فتحقق من أن $[\,\mathbf{v}\,]_C = {}_C P_B\,[\,\mathbf{v}\,]_B$.

(٧ ، ٤) رتبة المصفوفة

Rank of a Matrix

سنتعرف في هذا البند على ثلاث فضاءات متجهات هامة جداً ، هذه الفضاءات نحصل عليها من أي مصفوفة ولذا فإنها تعمق فهمنا للعلاقة بين حلول أنظمة المعادلات الخطية وبين مصفوفة المعاملات لتلك الأنظمة . ولكن قبل تقديم هذه الفضاءات بصورة عامة ندرس العلاقة بين قابلية العكس للمصفوفة المربعة والتوليد والإستقلال الخطي .

مبرهنة (٢٣ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن جميع العبارات التالية متكافئة :

(١) صفوف A مجموعة جزئية مستقلة خطياً من $\mathbb{R}^n$.

(٢) صفوف A تولد $\mathbb{R}^n$.

(٣) يوجد معكوس للمصفوفة A .

البرهان

(١) $\Leftarrow$ (٢) : بما أن $\dim \mathbb{R}^n = n$ والصفوف مجموعة مستقلة خطياً عددها n فإنها تولد $\mathbb{R}^n$ وذلك استناداً إلى المبرهنة (١٧ ، ٤) .

(٢) ⇐ (٣) : لنفرض أن $r_1, r_2, \dots, r_n$ هي صفوف A. سنبرهن على وجود مصفوفة B حيث $BA = I$. الآن بما أن $r_1, r_2, \dots, r_n$ تولد $\mathbb{R}^n$ وأن $\mathbf{e}_i = (0,0,\dots,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$ فإنه يوجد $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$ بحيث يكون $\mathbf{e}_i = \alpha_{i1} r_1 + \alpha_{i2} r_2 + \cdots + \alpha_{in} r_n$.

لنفرض الآن أن $B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$. من الواضح أن $BA = I$.

ولذا فإن A لها معكوس .

(٣) ⇐ (١) لنفرض أن A لها معكوس وأن $r_1, r_2, \dots, r_n$ هي صفوف A بحيث أن $k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_n r_n = 0$. إذا فرضنا أن $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ فإننا نجد أن $KA = k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_n r_n = 0$. ولذا فإن $K = KAA^{-1} = 0A^{-1} = 0$. إذن $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. ومنه فإن صفوف A مستقلة خطياً . ♦

بما أن $\det A = \det A^T$ فإن A لها معكوس إذا وفقط إذا كانت A^T لها معكوس . وبما أن صفوف A هي أعمدة A^T فإننا نحصل من المبرهنة (٢٣ ، ٤) على النتيجة التالية :

نتيجة (٢٤ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن العبارات التالية جميعها متكافئة :

(١) أعمدة A مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^n$.

(٢) أعمدة A تولد $\mathbb{R}^n$.

(٣) المصفوفة A يوجد لها معكوس . ♦

ننتقل الآن إلى الحالة العامة حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$.

تعريف (١٤ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$.

(١) يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المولد بصفوف A الفضاء الصفي (row space) للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $row(A)$.

(٢) يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^m$ المولد بأعمدة A الفضاء العمودي (column space) للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $col(A)$.

(٣) يسمى فضاء حل النظام المتجانس $AX = 0$ الفضاء الصفري (null space) للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $N(A)$. لاحظ أن $N(A)$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$. يسمى بعد الفضاء الصفري بصفرية A ويرمز له بالرمز $nullity(A)$.

تزودنا المبرهنة التالية ببعض خواص هذه الفضاءات والتي سنحتاجها فيما بعد.

مبرهنة (٢٥ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ، B مصفوفة من الدرجة m و C مصفوفة من الدرجة n . عندئذٍ :

(١) $row(B\,A) \subseteq row(A)$.

(٢) إذا كان للمصفوفة B معكوس فإن $row(B\,A) = row(A)$.

(٣) $col(A\,C) \subseteq col(A)$.

(٤) إذا كان للمصفوفة C معكوس فإن $col(A\,C) = col(A)$.

البرهان

(١) ليكن $b_i = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{bmatrix}$ هو الصف رقم i من B ولتكن $r_1, r_2, \dots, r_m$ هي صفوف A .عندئذٍ يكون الصف رقم i من المصفوفة BA هو :

$$b_i A = \left[b_{i1} \;\; b_{i2} \;\; \ldots \;\; b_{im} \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = b_{i1} r_1 + b_{i2} r_2 + \ldots + b_{im} r_m .$$

ولـذا فـإن كـل صـف مـن صـفوف BA هـو تـركيب خطـي لصـفوف A . إذن $\text{row}(BA) \subseteq \text{row}(A)$.

(٢) إذا كان للمصفوفة B معكوس فإن $A = B^{-1}(BA)$. وباستخدام الفقرة (١) نجد أن $\text{row}(A) = \text{row}(B^{-1}(BA)) \subseteq \text{row}(BA)$. وبالتالي فإن $\text{row}(BA) = \text{row}(A)$.

أما برهان الفقرتين (٣) و (٤) فإننا نحصل عليهما من الفقرتين (١) و (٢) وذلك بملاحظة أن $(AC)^T = C^T A^T$. ♦

مبرهنة (٢٦ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ولتكن R الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A . عندئذٍ :

(١) الصفوف غير الصفرية للمصفوفة R تشكل أساساً للفضاء $\text{row}(R)$ ومن ثم فهي أساس للفضاء $\text{row}(A)$.

(٢) إذا كانت $S = \{ R_1 , R_2 , \ldots , R_k \}$ هي مجموعة أعمدة R التي تحتوي على العناصر المتقدمة لصفوف R وإذا كانت $T = \{ A_1 , A_2 , \ldots , A_k \}$ مجموعة أعمدة A المقابلة لعناصر S فإن :

(أ) S أساس للفضاء $\text{col}(R)$. (ب) T أساس للفضاء $\text{col}(A)$.

البرهان

(١) من الواضح أنه لا يمكن كتابة أي صف من الصفوف غير الصفرية للمصفوفة R كتركيب خطي لبقية الصفوف ولذا فهي مستقلة خطياً . ومن تعريف

$\mathrm{row}(R)$ نجد أنها تشكل أساساً للفضاء $\mathrm{row}(R)$. الآن لاحظ أن $R = BA$ حيث B مصفوفة لها معكوس . باستخدام المبرهنة (٢٥، ٤) نجد أن :

$$\mathrm{row}(R) = \mathrm{row}(BA) = \mathrm{row}(A) .$$

(٢) (أ) سنبرهن أولاً أن S مستقلة خطياً . لنفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ وأن $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_k R_k = 0$ (١)

سنبرهن أولاً أن $\alpha_k = 0$. لنفرض أن :

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{j1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, R_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, R_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{jk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} .$$

عندئذٍ من المعادلة (١) نجد أن :

$$\alpha_1 a_{j1} + \alpha_2 a_{j2} + \dots + \alpha_k a_{jk} = 0 .$$

الآن إذا فرضنا أن $a_{jk} = 1$ هو العنصر المتقدم لأحد صفوف R فإننا نجد أن $a_{j1} = a_{j2} = \dots = a_{jk-1} = 0$. وبالتالي فإن $\alpha_k = \alpha_k a_{jk} = 0$. وبالمثل يمكن إثبات أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. ومن ثم فإن S مستقلة خطياً . الآن بما أن S تحتوي على أعمدة عددها k وكل من هذه الأعمدة يحتوي على عنصر متقدم واحد فقط لأحد صفوف B فإننا نجد أن العناصر السفلية والتي عددها $m - k$ يجب أن تكون جميعها أصفاراً . ولذلك نخلص إلى أن الفضاء العمودي $\mathrm{col}(R)$ هو الفضاء الجزئي المكون من m من المتجهات حيث العناصر الأخيرة من كل منها أصفاراً ولذا فإن المتجهات التالية تكون أساساً للفضاء $\mathrm{col}(R)$:

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0 \dots 0]^T, \mathbf{v}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 0 \dots 0]^T, \dots, \mathbf{v}_k = [0 \dots 0 \ \ 1 \ \ 0 \dots 0]^T .$$

وبالتالي فإن $\dim \operatorname{col}(R)=k$. وبما أن S مستقلة خطياً وأن $|S|=k$ فإن S يجب أن تكون أساساً للفضاء $\operatorname{col}(R)$.

(ب) بما أن $R \sim A$ فإن $R=BA$ حيث B مصفوفة لها معكوس . إذن لكل $\mathbf{v}=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ لدينا : $A\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow BA\mathbf{v}=B\,\mathbf{0}=\mathbf{0} \Leftrightarrow B\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

وإستناداً إلى المبرهنة (٥ ، ٤) نجد أن :

$$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n=\mathbf{0} \Leftrightarrow x_1R_1+x_2R_2+\ldots+x_nR_n=\mathbf{0}.$$

وبالتالي فإن أي مجموعة جزئية من أعمدة A تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت المجموعة الجزئية من أعمدة R المقابلة مستقلة خطياً . بما أن S أساس للفضاء $\operatorname{col}(R)$ فإنه عند إضافة أي عمود إلى S نحصل على مجموعة مرتبطة خطياً. ولذا فإن المجموعة المقابلة مرتبطة خطياً أيضاً . ولذلك فإن S أساس للفضاء $\operatorname{col}(R)$ إذا وفقط إذا كانت T أساساً للفضاء $\operatorname{col}(A)$. ♦

نحصل الآن على النتيجة الهامة التالية :

نتيجة (٢٧ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن $\dim \operatorname{col}(A)=\dim \operatorname{row}(A)$.

البرهان

لنفرض أن R هي الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A . وفقاً المبرهنة (٢٦ ، ٤) نجد أن $\dim(\operatorname{row}(A))=k=\dim(\operatorname{col}(A))$. ♦

تعريف (١٥ ، ٤)

تعرف رتبة المصفوفة A بأنها بعد فضاءها الصفي (أو فضاءها العمودي) ويرمز لها بالرمز $\operatorname{rank}(A)$.

مثال (٦١ ، ٤)

أحسب رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ثم عين أساساً لكل من الفضاء الصفي والعمودي .

الحل

باستخدام العمليات الصفية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

واستناداً إلى المبرهنة (٢٦ ، ٤) نجد أن $\{[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1], [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0], [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2]\}$ أساس للفضاء $\mathrm{row}(A)$.

كذلك فإن $\{[1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T, [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T, [2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0]^T\}$ أساس للفضاء $\mathrm{col}(R)$. ولذا فإن $\{[1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3]^T, [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0]^T, [2 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 3]^T\}$ أساس للفضاء $\mathrm{col}(A)$. وبالتالي فإن $\mathrm{rank}(A) = 3$. □

ملحوظات

(١) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن $\mathrm{rank}(A) \le m$ و $\mathrm{rank}(A) \le n$.

(٢) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$.

(٣) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $\mathrm{rank}(A) = n$ إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس .

(٤) لتكن $S \leq \mathbb{R}^n$. سبق وأنا بينا في الخوارزمية (١ ، ٤) كيفية إيجاد أساس للفضاء الجزئي $\langle S \rangle$. المبرهنة (٢٦ ، ٤) تبين لنا أن هذا الأساس هو أساس للفضاء الصفي أو العمودي للمصفوفة A التي صفوفها (أو أعمدتها) هي عناصر S .

مثال (٦٢، ٤)

عين أساساً للفضاء الجزئي من R^4 المولد بالمجموعة $S=\{(1,1,2,3,),(2,3,1,0),(1,3,-4,-9)\}$. ثم عين أساساً آخر كمجموعة جزئية من S .

الحل

لاحظ أن الأساس المطلوب ما هو إلا الفضاء الصفي للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&3&1&0\\1&3&-4&-9\end{bmatrix}$. وباستخدام العمليات الصفية الأولية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي :

$$R=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&-3&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

وبالتالي فإن الأساس المطلوب هو $\{(1,1,2,3),(0,1,-3,-6)\}$.

إما إذا أردنا ايجاد الأساس كمجموعة جزئية من S فإننا نبحث عن أساس للفضاء العمودي للمصفوفة $A^T=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&3\\2&1&-4\\3&0&-9\end{bmatrix}$. وباستخدام العمليات الصفية الأولية نجد

أن الصيغة المدرجة الصفية للمصفوفة A^T هي $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. لذلك فإن

أساس الفضاء $col(A)$ هو $\{(1,1,2,3),(2,3,1,0)\}$. $\blacksquare$

ننتقل الآن إلى دراسة العلاقة الهامة جداً بين رتبة المصفوفة A وصفريتها . سنوضح ذلك أولاً بالمثال التالي :

مثال (٦٣ ، ٤)

عين كلاً من رتبة وصفرية المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

الحل

باستخدام العمليات الصفية الأولية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $rank(A) = 2$. ولإيجاد صفرية A يجب أن نجد أساساً لفضاء الحل $AX = 0$. من الصيغة الدرجية الصفية المختزلة نجد أن هذاالنظام يكافئ النظام :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

بوضع $x_4 = t$ و $x_3 = s$ نجد أن الحل العام للنظام هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولذا فإن أساس فضاء الحل هو:

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T , \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$. ولذلك فإن $\text{nullity}(A) = 2$. □

ملحوظات

(١) لاحظ أن $\text{nullity}(A) + \text{rank}(A) = 4$ وهذا هو عدد أعمدة A . إن العلاقة أعلاه ليست مصادفة ولكنها صحيحة بصفة عامة وهذا هو فحوى المبرهنة التالية .

(٢) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإننا نعلم من النتيجة (٦ ، ٤) أن النظام $AX = B$ متسق إذا و فقط إذا كان B ينتمي إلى الفضاء العمودي للمصفوفة A . وبالتالي فإن الفضاء العمودي للمصفوفة A هو $C_A = \left\{ B \in \mathbb{R}^n : AX = B \ , X \in \mathbb{R}^n \right\}$.

مبرهنة (٢٨ ، ٤) (مبرهنة البعد للمصفوفات)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن $\text{nullity}(A) + \text{rank}(A) = n$.

البرهان

ليكن $T = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_k \}$ أساساً للفضاء الصفري . باستخدام المبرهنة (٢٠ ، ٤) نستطيع توسيع T إلى أساس $M = \{ \mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_k , \mathbf{v}_{k+1} , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ لفضاء المتجهات $\mathbb{R}^n$. سنبرهن على أن $S = \{ A\mathbf{v}_{k+1} , \ldots , A\mathbf{v}_n \}$ أساس للفضاء العمودي C_A . لنفرض أن $B \in C_A$. عندئذ يوجد $X \in \mathbb{R}^n$ حيث $AX = B$. بما أن M أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$ فإننا نستطيع إيجاد $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث يكون :

$$. X=\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$$

وعندئذٍ :

$$\begin{aligned} B=AX&=\alpha_1A\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_kA\mathbf{v}_k+\alpha_{k+1}A\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_nA\mathbf{v}_n \\ &=\alpha_{k+1}A\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_nA\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

وذلك لأن $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ متجهات في الفضاء الصفري. وبالتالي فإن S تولد C_A .

لنفرض الآن أن $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ حيث :

$$.\alpha_{k+1}A\mathbf{v}_{k+1}+\alpha_{k+2}A\mathbf{v}_{k+2}+\ldots+\alpha_nA\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$$

عندئذٍ :

$$A\left(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\alpha_{k+2}\mathbf{v}_{k+2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n\right)=\mathbf{0}$$

ولذا فإن $\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\alpha_{k+2}\mathbf{v}_{k+2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$ ينتمي إلى الفضاء الصفري . وبالتالي فإنه يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ حيث $\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$. ومنه فإن $\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+(-\alpha_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. وبما أن M مستقلة خطياً فإن $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. وعندئذٍ فإن S مستقلة خطياً. ومن ثم فإن S أساس للفضاء C_A . وبما أن بعد C_A هو $n-k$ فإننا نخلص إلى أن $\text{nullity}(A)+\text{rank}(A)=(n-k)+k=n$. ♦

نتيجة (٢٩ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ رتبتها r فإن $\text{nullity}(A)=n-r$.
كما أن $\text{nullity}(A^T)=m-r$.

البرهان

بما أن $\text{rank}(A)=\text{rank}(A^T)=r$ فإننا نحصل على المطلوب باستخدام المبرهنة (٢٨ ، ٤) . ♦

مثال (٦٤ ، ٤)

احسب كلا من $\text{nullity}(A)$ و $\text{nullity}(A^T)$ حيث

$$.A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

باستخدام العمليات الصفية الأولية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $\text{rank}(A^T)=\text{rank}(A)=3$. ولذا فإن $\text{nullity}(A)=6-3=3$ وأن $\text{nullity}(A^T)=4-3=1$. □

تزودنا المبرهنة التالية بالشرط اللازم والكافي لوجود حل للمعادلة المصفوفية $AX=B$ بدلالة رتبة المصفوفة .

مبرهنة (٣٠، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m\times n$. عندئذ يكون النظام $AX=B$ متسقاً إذا وفقط إذا كانت $\text{rank}(A)=\text{rank}([A\,|\,B])$.

البرهان

لنفرض أولاً أن النظام $AX=B$ متسق . استناداً إلى النتيجة (٦ ، ٤) نجد أن B ينتمي إلى الفضاء العمودي للمصفوفة A. وبما أن الفضاء العمودي لمصفوفة هو

الفضاء المولد بأعمدتها فإننا نجد أن الفضاء العمودي للمصفوفة A يساوي الفضاء العمودي للمصفوفة $[A|B]$. ولذا فإن $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}([A|B])$.

ولبرهان العكس نفرض أن :

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}([A|B])=r$. ولنفرض أن $\{C_1, C_2, ..., C_r\}$ مجموعة جزئية من أعمدة A تشكل أساساً لفضاء A العمودي . لاحظ أن كلاً من C_i , $1 \le i \le r$ ينتمي إلى فضاء $[A|B]$ العمودي . ولذا فهي تشكل ايضاً أساساً لهذا الفضاء . وبالتالي يمكن كتابة B كتركيب خطي للأعمدة $C_1, C_2, ..., C_r$ ومن ثم فإن B ينتمي إلى فضاء A العمودي. وباستخدام نتيجة (٦ ، ٤) نجد أن $AX = B$ مستق . ♦

مثال (٦٥ ، ٤)

استخدم المبرهنة (٣٠ ، ٤) لإثبات أن النظام التالي ليس متسقاً .

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل

باستخدام العمليات الصفية الأولية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة $[A|B]$ هي :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right].$$

ولذا فإن $\operatorname{rank}(A)=2$ بينما $\operatorname{rank}([A|B])=3$. وباستخدام المبرهنة (٣٠ ، ٤) نخلص إلى أن النظام ليس متسقاً . □

ملحوظة

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. لقد رأينا من النتيجة (٣ ، ٣) أن النظام $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $n \times 1$ إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس . نقدم الآن الشرط الكافي واللازم الذي يجعل النظام $AX = B$ متسقاً في الحالة العامة التي تكون فيها المصفوفة من الدرجة $m \times n$.

مبرهنة (٣١ ، ٤)

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$. عندئذ يكون النظام $AX = B$ متسقاً لكل مصفوفة B من الدرجة $m \times 1$ إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{rank}(A) = m$.

البرهان

لنفرض أولاً أن النظام $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $m \times 1$. عندئذ استناداً إلى نتيجة (٦ ، ٤) نجد أن B ينتمي إلى الفضاء العمودي للمصفوفة A وذلك لكل $B \in \mathbb{R}^m$. ومن ثم فإن $\operatorname{col}(A) = \mathbb{R}^m$. وبالتالي فإن $\operatorname{rank}(A) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$.

ولبرهان العكس نفرض أن $\operatorname{rank}(A) = m$. عندئذ يكون فضاء A العمودي فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^m$ بعده m . ولذا فإن $\operatorname{col}(A) = \mathbb{R}^m$. وبالتالي فإن النظام $AX = B$ متسق لكل $B \in \mathbb{R}^m$. ♦

نتيجة (٣٢ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $m > n$ فإن النظام $AX = B$ ليس متسقاً لكل $B \in \mathbb{R}^m$.

البرهان

بما أن $m > n$ فإن الفضاء العمودي للمصفوفة A لا يمكن ان يولد $\mathbb{R}^m$. ولذا فإن $\text{rank}(A) \neq m$. وبالتالي فإنه لا يوجد حل للنظام $AX = B$ لكل $B \in \mathbb{R}^m$. ♦

ملحوظة

لقد سبق وأن بينا العلاقة بين حلول الأنظمة المتجانسة وغير المتجانسة في المبرهنة (٥ ، ٣) والتي نستطيع اعادة صياغتها كما يلي :

لنفرض أن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وأن X_0 حل للنظام غير المتجانس $AX = B$. لنفرض ايضاً أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ أساس للفضاء الصفري للمصفوفة A(أي فضاء حل النظام $AX = 0$) . عندئذ أي حل للنظام $AX = B$ يجب أن يكون على الصيغة $X = X_0 + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$.

لاحظ أيضاً أن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ما هي إلا المتغيرات الحرة التي تظهر في الحل العام وأن $\text{nullity}(A) = k$.

نتيجة (٣٣ ، ٤)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وكانت $\text{rank}(A) = r$ وإذا كان النظام $AX = B$ متسقاً فإن عدد المتغيرات الحرة هو $n - r$.

البرهان

من الملاحظة المقدمة أعلاه والمبرهنة (٢٨ ، ٤) نجد أن عدد المتغيرات الحرة هو $\text{nullity}(A)$ وأن $\text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) = n - r$. ♦

تمارين (٧ ، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٧) احسب كلا من رتبة المصفوفة وصفريتها .

(١) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & -4 & -4\\ 7 & -6 & 2\end{bmatrix}$.

(٢) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

(٣) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

(٤) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

(٥) $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$

(٦) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

(٧) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3\\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4\\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5\\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5\end{bmatrix}$.

في التمارين من (٨) إلى (١١)عين أساساً لكل من الفضاء الصفري والعمودي لكل من المصفوفات المعطاة . أحسب أيضاً صفرية المصفوفة .

(٨) $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6 & 8\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 4 & -5 & 9 & 10\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

(٩) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

(١٠) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & -2 & 2\\ 2 & 3 & -2 & 5 & 1\\ 0 & 5 & -12 & 9 & -3\\ 1 & 4 & -7 & 7 & -1\end{bmatrix}$

(١١) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

(١٢) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 6×8 وكان للنظام $AX=0$ الحل التافه فقط . فما هي رتبة A ؟ هل النظام $AX=B$ متسق لكل $B\in\mathbb{R}^8$ ؟

(١٣) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 8×6 وكان النظام $AX=B$ متسقاً لكل $B\in\mathbb{R}^6$ فما هي صفرية A ؟

(١٤) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 8×3 وكانت $\operatorname{rank}(A)=3$ فأحسب كلا من $\operatorname{nullity}(A)$ ، $\dim(\operatorname{row} A)$ و $\operatorname{rank}(A^T)$.

(١٥) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 6×5 وكان بعد فضاء الحل للنظام $AX=0$ هو 4 فأحسب بعد الفضاء العمودي .

(١٦) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 5×8 وكان بعد فضاء الحل للنظام $AX=0$ هو 2 فأحسب بعد الفضاء الصفي .

(١٧) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 5×7 فما هي أكبر قيمة لـ $\operatorname{rank}(A)$ ؟

(١٨) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 7×5 فما هي أكبر قيمة لـ $\operatorname{rank}(A)$ ؟

(١٩) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 8×6 فما هي أصغر قيمة لصفرية A ؟

(٢٠) عين أساساً للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$ حيث :

(أ) $S=\{(1,-1,2,5,1),(3,1,4,2,7),(1,1,0,0,0),(5,1,6,7,8)\}$.

(ب) $S=\{[1\quad 5\quad -6]^T,[2\quad 6\quad -8]^T,[3\quad 7\quad -10]^T,[4\quad 8\quad 12]^T\}$.

(٢١) إذا كان النظام $AX=B$ ليس متسقاً فأثبت أن $\operatorname{rank}([A\mid B])=\operatorname{rank}(A)+1$.

(٢٢) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة $m\times n$ فأثبت أن :

$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

(٢٣) لتكن A و B مصفوفتين من الدرجة $m\times n$. نقول إن A و B متكافئتان ونكتب $A\sim B$ إذا وجدت مصفوفتان U و V من الدرجة $m\times m$ و $n\times n$ على التوالي حيث $A=UBV$.

(أ) أثبت أن العلاقة $\sim$ علاقة تكافؤ على مجموعة المصفوفات من الدرجة $m\times n$.

(ب) أثبت أن $A\sim B$ إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

(٢٤) لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n :

(أ) أثبت أن $\text{nullity}(A)>0$ إذا وفقط إذا كان $\det A=0$.

(ب) أثبت أن $\text{nullity}(A)=0$ إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس .

(٢٥) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ فأحسب $\text{nullity}(A-2I)$.

(٢٦) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ فأحسب $\text{nullity}(A-2I)$.

(٢٧) إذا كان $a\neq b\neq c$ فأثبت أن $\text{rank}(A)=3$ حيث $A=\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix}$.

(٢٨) لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$

(أ) أحسب كلا من $\text{nullity}(A)$ و $\text{nullity}(B)$.

(ب) أثبت أن فضاء B الصفري محتوى في فضاء A الصفري .

(٢٩) لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&3\end{bmatrix}$.

(أ) أحسب كلا من $\text{nullity}(A)$ و $\text{nullity}(B)$.

(ب) أثبت أن كلاً من فضاء A الصفري وفضاء B الصفري محتوى في فضاء $C=\begin{bmatrix}1&1&0&0\end{bmatrix}$ الصفري .

(٣٠) لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$.

(أ) أحسب كلا من $\text{rank}(A)$ و $\text{rank}(B)$.

(ب) أثبت أن فضاء A الصفي محتوى في فضاء B الصفي .

(٣١) لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&3\end{bmatrix}$.

(أ) أحسب كلاً من $\operatorname{rank}(A)$ و $\operatorname{rank}(B)$.

(ب) أثبت أن $\operatorname{row}(A)\cap\operatorname{row}(B)=\operatorname{row}\left(\begin{bmatrix}1&1&0&0\end{bmatrix}\right)$.

(٣٢) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&1&1&-3&2\\1&4&4&-9&5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}0&-1&1&0&0\\1&2&0&1&0\\-1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

فأثبت أن فضاء A الصفي يساوي الفضاء الصفري للمصفوفة B .

(٨ ، ٤) الجمع المباشر

Direct Sum

ليكن **V** فضاء متجهات وكل من **U** و **W** فضاءً جزئياً من **V** . من الواضح أن $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$ فضاء جزئي من **V** وأنه محتوى في كل من **U** و **W** . نقدم الآن فضاء جزئياً من **V** يحتوي كلاً من **U** و **W**.

تعريف (١٦ ، ٤)

إذا كان كل من **U** و **W** فضاء جزئياً من **V** فإننا نعرف مجموعهما $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ (sum) على النحو التالي :

$$.\ \mathbf{U}+\mathbf{W}=\{\mathbf{u}+\mathbf{w}:\mathbf{u}\in\mathbf{U},\mathbf{w}\in\mathbf{W}\}$$

وبصورة عامة إذا كان $\mathbf{W}_i$ فضاء جزئياً من **V** لكل $1\le i\le k$ فإن :

$$.\ \mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2+\cdots+\mathbf{W}_k=\{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2+\cdots+\mathbf{w}_k:\mathbf{w}_i\in\mathbf{W}_i, 1\le i\le k\}$$

سنبرهن الآن أن $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ فضاء جزئي من **V**.

مبرهنة (٤ ، ٣٤)

إذا كان كل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ فضاء جزئياً من V فإن $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ أصغر فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ يحتوي كلاً من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$.

البرهان

من الواضح أن $\mathbf{U}+\mathbf{W} \neq \Phi$ لأن $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض أن :
$\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1 , \mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2 \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ وأن $\alpha \in \mathbb{R}$. عندئذٍ ،
$(\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1)+(\mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2)=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)\in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. كذلك ،
$\alpha(\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1)=\alpha_1 \mathbf{u}_1+\alpha \mathbf{w}_1 \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. ولذا فإن $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.
من الواضح أن $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}+\mathbf{W}$ وأن $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض الآن أن $\mathbf{W}_1$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_1$. ولنفرض أن $\mathbf{u}+\mathbf{w} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. بما أن $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ فإن $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_1$ ، وبما أن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ فإن $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_1$. ولذا فإن $\mathbf{u}+\mathbf{w} \in \mathbf{W}_1$. وبالتالي فإن $\mathbf{U}+\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_1$. وبهذا يكون $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ هو أصغر فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ يحتوي كلاً من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$. ♦

مثال (٤ ، ٦٦)

إذا كان $\mathbf{U}=\{(x,0,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ وكان $\mathbf{W}=\{(0,x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ فإنه من الواضح أن $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbb{R}^3$ لأن أي $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ يمكن كتابته على الصورة

$$(x,y,z)=\left(x,0,\frac{1}{2}z\right)+\left(0,y,\frac{1}{2}z\right) . \quad \square$$

مثال (٤ ، ٦٧)

إذا كان $\mathbf{U}=\{(x,y,x-y):x,y\in\mathbb{R}\}$ وكان $\mathbf{W}=\{(x,0,x):x\in\mathbb{R}\}$ فإنه من الواضح أن $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$. ومنه فإن $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbf{U}\neq\mathbb{R}^3$. $\square$

تزودنا المبرهنة التالية بالعلاقة الأساسية بين أبعاد الفضاءات $\mathbf{U}$ ، $\mathbf{W}$ ، $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$.

مبرهنة (٤ ، ٣٥)

إذا كان كل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ فضاء جزئياً من فضاء المتجهات المنتهي البعد $\mathbf{V}$ فإن $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=\dim(\mathbf{U})+\dim \mathbf{W}-\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})$.

البرهان

لنفرض أن $B=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r\}$ أساس للفضاء الجزئي $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$. بما أن B مجموعة جزئية مستقلة خطياً من كل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ فإننا نستطيع توسيعها إلى أساس لكل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$. ولذا نفرض أن :

$B_1=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s\}$ و $B_2=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_t\}$ أساس لكل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ على التوالي . ولنفرض أن :

$S=B_1\cup B_2=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_t\}$. سنبرهن الآن على أن S أساس للفضاء $\mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض أن $\mathbf{u}+\mathbf{w}\in\mathbf{U}+\mathbf{W}$. بما أن $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ فإنه يوجد $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_s\in\mathbb{R}$ حيث :

$\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_r\mathbf{v}_r+\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_s\mathbf{u}_s$. وبما أن $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ فإنه يوجد $\gamma_1,\dots,\gamma_r,\delta_1,\dots,\delta_t\in\mathbb{R}$ حيث $\mathbf{w}=\gamma_1\mathbf{v}_1+\cdots+\gamma_r\mathbf{v}_r+\delta_1\mathbf{w}_1+\cdots+\delta_t\mathbf{w}_t$.

ولذا فإن :

$$\mathbf{u}+\mathbf{w}=(\alpha_1+\gamma_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(\alpha_r+\gamma_r)\mathbf{v}_r+\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_2\mathbf{u}_2+\delta_1\mathbf{w}_1+\cdots+\delta_t\mathbf{w}_t$$

وبالتالي فإن S تولد $\mathbf{U}+\mathbf{W}$. ولإثبات أن S مستقلة خطياً نفرض أن :

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_r\mathbf{v}_r+\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_s\mathbf{u}_s+\gamma_1\mathbf{w}_1+\cdots+\gamma_t\mathbf{w}_t=\mathbf{0} \qquad (١)$$

حيث $\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\in\mathbb{R}$ لكل $1\le i\le r$ ، $1\le j\le s$ ، $1\le k\le t$. وبوضع

$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_r\mathbf{v}_r$ ، $\mathbf{u}=\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_s\mathbf{u}_s$ و $\mathbf{w}=\gamma_1\mathbf{w}_1+\cdots+\gamma_t\mathbf{w}_t$

نجـد أن $-\mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$. بمـا أن $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ وأن $\mathbf{v}+\mathbf{w} = -\mathbf{u}$ فـإن $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ وبالـتالي فإن $\mathbf{u}\in\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$. وعليه فإنه يمكن كتابة $\mathbf{u}$ كتركيب خطي لعناصر B . أي أنه يوجد $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbf{R}$ بحيث أن $\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{v}_r$. ولما كان $\mathbf{u}=\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_s\mathbf{u}_s$ فإن $\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{v}_r=\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_s\mathbf{u}_s$. أي أن $\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{v}_r+(-\beta_1)\mathbf{u}_1+\cdots+(-\beta_s)\mathbf{u}_s=\mathbf{0}$. ولكن B_1 مستقلة خطياً . ومنه فإن $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\beta_1=\cdots=\beta_s=0$. وبالتعويض في العلاقة (١) نجد أن : $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_r\mathbf{v}_r+\gamma_1\mathbf{w}_1+\cdots+\gamma_t\mathbf{w}_t=\mathbf{0}$. ولكن B_2 مستقلة خطياً ، لذا فإن $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=\gamma_1=\cdots=\gamma_t=\mathbf{0}$. وبالتالي نخلص إلى أن S مستقلة خطياً . ونكون قد برهنا على أن S أساس للفضاء $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ وأن $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=r+s+t$. وبما أن $\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})=r$ ، $\dim(\mathbf{U})=r+s$ و $\dim(\mathbf{W})=r+t$ فإننا نخلص إلى أن :

$$\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=\dim(\mathbf{U})+\dim(\mathbf{W})-\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) . \blacklozenge$$

إن أهم زوج U و W من الفضاءات الجزئية لفضاء متجهات V هما اللذان يجعلان $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$ أصغر ما يمكن و $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ أكبر ما يمكن وهذا ما يقدمه لنا التعريف التالي :

تعريف (١٧ ، ٤)

نقول إن فضاء المتجهات **V** هو الجمع المباشر (direct sum) للفضائين الجزئين **U** و **W** ونكتب $\mathbf{V}=\mathbf{U}\oplus\mathbf{W}$ إذا كان $\mathbf{V}=\mathbf{U}+\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}=\{\mathbf{0}\}$. وفي هذه الحالة نقول إن **W** متمم (complement) للفضاء **U** أو أن **U** متمم للفضاء **W** .

مثال (٦٨ ، ٤)

ليكن كل من $\mathbf{U}=\{(x,y,0):x,y\in\mathbf{R}\}$ و $\mathbf{W}=\{(0,0,z):z\in\mathbf{R}\}$ فضاء جزئيا من $\mathbf{R}^3$. بين أن $\mathbf{R}^3=\mathbf{U}\oplus\mathbf{W}$.

الحل

لنفرض أن $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$. بما أن $(x,y,z)=(x,y,0)+(0,0,z)$ فإن $\mathbb{R}^3=\mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض الآن أن $(x,y,z)\in \mathbf{U}\cap \mathbf{W}$. ومنه فإن $(x,y,z)\in \mathbf{U}$ وإن $(x,y,z)\in \mathbf{W}$. ولذا فإن $z=0$ وأن $x=y=0$. وبالتالي فإن $(x,y,z)=(0,0,0)$. ومن ثم فإن $\mathbb{R}^3=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$. □

مثال (٤ ، ٦٩)

ليكن كل من $\mathbf{U}=\{(x,x,x):x\in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}=\{(0,y,z):y,z\in \mathbb{R}\}$ فضاء جزئيا من $\mathbb{R}^3$. بين أن $\mathbb{R}^3=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$.

الحل

بما أن $(x,y,z)=(x,x,x)+(0,y-x,z-x)$ فإن $\mathbb{R}^3=\mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض الآن أن $(x,y,z)\in \mathbf{U}\cap \mathbf{W}$. بما أن $(x,y,z)\in \mathbf{U}$ فإن $x=y=z$ ، وبما أن $(x,y,z)\in \mathbf{W}$ فإن $x=0$. ولذا فإن $(x,y,z)=(0,0,0)$. وبالتالي فإن $\mathbb{R}^3=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$. □

مثال (٤ ،٧٠)

ليكن كل من $\mathbf{U}=\{A\in \mathbf{M}_{nn}:A^T=A\}$ و $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{nn}:A^T=-A\}$ فضاء جزئيا من $\mathbf{M}_{nn}$. بين أن $\mathbf{M}_{nn}=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$.

الحل

بما أن $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$ وأن $\frac{1}{2}(A+A^T)\in \mathbf{U}$ و

$\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)\in \mathbf{W}$ فإن $\mathbf{M}_{nn}=\mathbf{U}+\mathbf{W}$. وإذا كان $A\in \mathbf{U}\cap \mathbf{W}$ فإن $A^{T}=A$ وأن $A^{T}=-A$. ومنه فإن $A=-A$. أي أن $A=0$. وبالتالي فإن $\mathbf{M}_{nn}=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$. □

مثال (٤ ، ٧١)

ليكن كل من $\mathbf{U}=\{a+bx:a,b\in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}=\{ax^{2}+bx^{3}:a,b\in \mathbb{R}\}$ فضاء جزئيا من $\mathbf{P}_3$. بين أن $\mathbf{P}_3=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$.

الحل

من الواضح أن $\mathbf{P}_3=\mathbf{U}+\mathbf{W}$. لنفرض الآن أن :

$$p(x)=a+bx+cx^{2}+dx^{3}\in \mathbf{U}\cap \mathbf{W}.$$

بما أن $p(x)\in \mathbf{U}$ فإن $c=d=0$ ، وبما أن $p(x)\in \mathbf{W}$ فإن $a=b=0$. ولذا فإن $p(x)=0$. وبالتالي فإن $\mathbf{P}_3=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$. □

مثال (٤ ، ٧٢)

إذا كان $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ كما في المثال (٤ ، ٦٥) فإننا قد وجدنا أن $\mathbf{R}^{3}=\mathbf{U}+\mathbf{W}$ ولكن $\mathbf{R}^{3}\neq \mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$ لأنه على سبيل المثال $(0,0,1)\in \mathbf{U}\cap \mathbf{W}$. □

المبرهنة التالية تقدم لنا وصفين آخرين لكي يكون فضاء متجهات جمعاً مباشراً .

مبرهنة (٤ ، ٣٦)

إذا كان كل من $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ فضاء جزئيا من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإن العبارات التالية جميعها متكافئة :

(١) $\mathbf{V}=\mathbf{U}\oplus \mathbf{W}$.

(٢) يمكن كتابة أي $\mathbf{v}\in \mathbf{V}$ بطريقة وحيدة على الصورة $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ حيث

. $\mathbf{w} \in \mathbf{W}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}$

(٣) إذا كان $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ و $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أساسين للفضائين $\mathbf{U}$ و $\mathbf{W}$ على التوالي فإن $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$.

البرهان

(١) $\Leftarrow$ (٢) : لنفرض أن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. بما أن $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ فإنه يوجد $\mathbf{w} \in \mathbf{W}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}$ حيث $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ حيث $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$، $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}$. عندئذٍ ، $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$. ولذا فإن $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. وبالتالي فإن $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ وأن $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$.

(٢) $\Leftarrow$ (٣) : لنفرض أن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. بما أن $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ حيث $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ و $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ فإنه من الواضح أن $\mathbf{v} \in \langle B \rangle$. ومن ثم فإن $\mathbf{V} = \langle B \rangle$. ولبرهان أن B مستقلة خطياً ، نفرض أن $\mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k + \mathrm{b}_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$. وإذا وضعنا $\mathbf{u} = \mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k$ ، $\mathbf{w} = \mathrm{b}_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{w}_m$ فإننا نجد أن $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. ولذا نجد من الوحدانية أن $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ وأن $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ومن ثم فإن $\mathrm{a}_i = 0$ وأن $\mathrm{b}_j = 0$ لكل $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le m$. وبالتالي فإن $\mathbf{B}$ مستقلة خطياً .

(٣) $\Leftarrow$ (١) : لنفرض أن $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ أساس للفضاء $\mathbf{U}$ وأن $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أساس للفضاء $\mathbf{W}$. عندئذٍ ، تكون المجموعة $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$. لنفرض الآن أن $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. لذا فإنه يوجد $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_k, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_m \in \mathbb{R}$ حيث

$$\mathbf{v} = \mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \mathrm{a}_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k + \mathrm{b}_1\mathbf{w}_1 + \mathrm{b}_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{w}_m .$$

وبوضع $\mathbf{u} = \mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k$ و $\mathbf{w} = \mathrm{b}_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{w}_m$ نجد أن :

$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$. ومنه فإن $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$. وأخيراً ، إذا كان $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ فإن $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ و $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. ولذا فإن $\mathbf{v} = \mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k = \mathrm{b}_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{w}_m$. ومنه فإن $\mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathrm{a}_k\mathbf{u}_k + (-\mathrm{b}_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (-\mathrm{b}_m)\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$. وبما أن B

مستقلة خطيا فإن $a_i = 0$ وأن $b_j = 0$ لكل $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le m$. وبالتالي فإن $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ومن ثم فإن $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. ♦

النتيجة التالية نحصل عليها مباشرة من المبرهنة (٣٥، ٤) والمبرهنة (٣٦، ٤)

نتيجة (٣٧ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ فإن $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{U} + \dim\mathbf{W}$. ♦

مثال (٧٣ ، ٤)

استخدم الفقرة (٣) من المبرهنة (٣٦ ، ٤) لإثبات أن $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ حيث $\mathbf{U} = \{(x, y, x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W} = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

الحل

بما أن $(x, y, x-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1)$ فإن $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{U}$. ومن الواضح أن $\{(1,1,1)\}$ أساس للفضاء $\mathbf{W}$. من السهل الآن أن نبين أن $\{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$. وبالتالي فإن $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. □

من الممكن تعميم تعريف الجمع المباشر لأي عدد منته من الفضاءات الجزئية وهو ما يقدمه التعريف التالي :

تعريف (١٨ ، ٤)

لتكن $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_k$ فضاءات جزئية من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$. نقول إن $\mathbf{V}$ جمع مباشر للفضاءات الجزئية $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_k$ ونكتب :

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}_k$$

إذا كان :

(١) $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \cdots + \mathbf{W}_k$.

(٢) $\mathbf{W}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathbf{W}_j = \{\mathbf{0}\}$ لكل $1 \leq i \leq k$.

بطريقة مماثلة لبرهان المبرهنة (٣٨ ، ٤) نحصل على المبرهنة التالية والتي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (٣٨ ، ٤)

إذا كانت $\mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 , \ldots , \mathbf{W}_k$ فضاءات جزئية من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فإن جميع العبارات التالية متكافئة :

(١) $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}_k$.

(٢) يمكن كتابة أي $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ بطريقة وحيدة على الصورة $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k$ حيث $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}_i$ لكل $1 \leq i \leq k$.

(٣) إذا كانت B_i أساسا للفضاء $\mathbf{W}_i$ لكل $1 \leq i \leq k$ حيث $B_i \cap B_j = \{0\}$ لكل $i \neq j$ فإن $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ أساس للفضاء $\mathbf{V}$ وأن :

$$\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{W}_1 + \dim\mathbf{W}_2 + \cdots + \dim\mathbf{W}_k . \blacklozenge$$

مثال (٧٤ ، ٤)

إذا كان $\mathbf{W}_1 = \{ t(1,0,0) : t \in \mathbb{R} \}$ ، $\mathbf{W}_2 = \{ t(0,1,0) : t \in \mathbb{R} \}$ و $\mathbf{W}_3 = \{ t(0,0,1) : t \in \mathbb{R} \}$ فإنه من الواضح أن $\mathbb{R}^3 = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \mathbf{W}_3$.

وبصورة عامة إذا كان $\{ \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , \ldots , \mathbf{e}_n \}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$ فإن $\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{e}_n \rangle$. □

مثال (٧٥ ، ٤)

لتكن $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ ، $\mathbf{W}_2 = \{(x,0,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}_3 = \{(x+y,y,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ فضاءات جزئية من $\mathbb{R}^3$. بيــن أن :

$\mathbb{R}^3 \neq \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \mathbf{W}_3$.

الحل

لاحظ أن $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ ، $B_2 = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ و $B_3 = \{(1,0,0),(1,1,1)\}$ أساسات للفضاءات $\mathbf{W}_1$ ، $\mathbf{W}_2$ و $\mathbf{W}_3$ على التوالي . ولذا فإن $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 6 = 2+2+2 = \dim\mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2 + \dim\mathbf{W}_3$. وبالتالي فإن $\mathbb{R}^3 \neq \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \mathbf{W}_3$. □

تمارين (٨ ، ٤)

(١) بين ما إذا كان $\mathbb{R}^3$ جمعا مباشراً للفضاءات الجزئية المعطاة :

(أ) $\mathbf{W}_1 = \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$ و

$\mathbf{W}_2 = \{(x+y, y-x, 2x+4y) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

(ب) $\mathbf{W}_1 = \{(-x,3x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ ، $\mathbf{W}_2 = \{(2x,-5x,4x) : x \in \mathbb{R}\}$ و

$\mathbf{W}_3 = \{(3x,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(جـ) $\mathbf{W}_1 = \{(3y, x-y, 4x+2y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ و

$\mathbf{W}_2 = \{(5x+y, x-y, 2y) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

(د) $\mathbf{W}_1 = \{(-x,3x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$ ، $\mathbf{W}_2 = \{(2x,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ و

$\mathbf{W}_3 = \{(0,6x,5x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(هـ) $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}_2 = \{(0,x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(و) $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}_2 = \{(0,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

(٢) بين ما إذا كان $\mathbb{R}^4$ جمعا مباشرا للفضاءات الجزئية المعطاة .

(أ) $\mathbf{W}_1 = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}_2 = \{(0, 0, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(ب) $\mathbf{W}_1 = \{(x, x+y, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ و

$\mathbf{W}_2 = \{(0, x, y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(جـ) $\mathbf{W}_1 = \{(x, y, z, 0) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbf{W}_2 = \{(0, x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(٣) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1 = \langle\{2x-1, x+3\}\rangle$ و $\mathbf{W}_2 = \langle x^2 - 1\rangle$ فضاء جزئيا

من $\mathbf{P}_2$ فهل $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ ؟

(٤) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1 = \langle\{3x+2, x^3 - 4x^4\}\rangle$ و $\mathbf{W}_2 = \langle\{x^2 - 1, x^3 - 4\}\rangle$

فضاء جزئيا من $\mathbf{P}_3$ فهل $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ ؟

(٥) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ و $\mathbf{W}_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$

فضاء جزئيا من $\mathbf{M}_{22}$ فهل $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ ؟

(٦) إذا كان $\mathbf{U}$ فضاء جزئيا من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فأثبت أنه يوجد فضاء جزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

(٧) إذا كان $\mathbf{U} = \langle\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}\rangle$ فضاء جزئيا من $\mathbb{R}^4$ فعين

فضائين جزئيين $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ من $\mathbb{R}^4$ حيث $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}_1 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}_2$.

(٨) إذا كان كل من $\mathbf{U}$ ، $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئيا من $\mathbf{V}$ حيث :

$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}_1 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}_2$ فأثبت أن $\dim \mathbf{W}_1 = \dim \mathbf{W}_2$.

(٩) إذا كان $\mathbf{W}_1 = \{p(x) \in \mathbf{P}_n : p(-x) = p(x)\}$ وكان

$\mathbf{W}_2 = \{p(x) \in \mathbf{P}_n : p(-x) = -p(x)\}$ فأثبت أن كلا من $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئي من $\mathbf{P}_n$ وأن $\mathbf{P}_n = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$.

(١٠) لتكن $E \in \mathbf{M}_{22}$ حيث $E^2 = E$ وليكن $\mathbf{W}_1 = \{A : AE = A\}$ و

$\mathbf{W}_2 = \{A : AE = 0\}$. أثبت أن كلا من $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئي من $\mathbf{M}_{22}$

وأن $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$.

(١١) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ حيث $\dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)=5$ و $\dim(\mathbf{W}_1)=3$ فأثبت أن :

(أ) $2\le\dim(\mathbf{W}_2)\le 5$ (ب) $0\le\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)\le 3$.

(١٢) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ حيث $\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)=2$ و $\dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)=8$ فأثبت أن $2\le\dim(\mathbf{W}_1)\le 8$.

(١٣) إذا كان كل من $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ حيث $\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)=2$ ، $\dim(\mathbf{W}_1)=4$ و $\dim(\mathbf{V})=12$ فأثبت أن :

(أ) $2\le\dim(\mathbf{W}_2)\le 10$ (ب) $4\le\dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)\le 12$.

(١٤) جد ثلاث فضاءات جزئية $\mathbf{W}_1$ ، $\mathbf{W}_2$ و $\mathbf{W}_3$ من $\mathbb{R}^3$ حيث

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2+\mathbf{W}_3)\ne{}&\dim(\mathbf{W}_1)+\dim(\mathbf{W}_2)+\dim(\mathbf{W}_3)\\&-\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)-\dim(\mathbf{W}_2\cap\mathbf{W}_3)\\&-\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_3)+\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2\cap\mathbf{W}_3)\end{aligned}$$

(١٥) إذا كان $\mathbf{V}=\mathbf{W}_1\oplus\mathbf{W}_2$ وكان $\mathbf{U}$ أي فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ فأثبت أن :

$2\dim(\mathbf{U})-\dim(\mathbf{V})\le\dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{U})+\dim(\mathbf{W}_2\cap\mathbf{U})\le\dim\mathbf{U}$.