الفصل الثالث أنظمة المعادلات الخطية

SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

إن من أهم أسباب تطور الرياضيات هو البحث عن طرق لتحليل وحل المسائل التطبيقية. إن بعض هذه المسائل يقودنا إلى أنظمة المعادلات الخطية وحلول هذه الأنظمة يزودنا بمعلومات قيمة . وتعتبر محاولات إيجاد طرق حل أنظمة المعادلات الخطية سبباً في ظهور وتطور أهم فروع الرياضيات ألا وهو الجبر الخطي.

في هذا الفصل سنتعرف على أنظمة المعادلات الخطية حيث نربطها بمفهوم المصفوفة والتي سنستخدمها لإيجاد حلول لهذه الأنظمة .

(١ ، ٣) طريقتا جاوس وجاوس – جوردان

Gauss and Gauss – Jordan Methods

لا شك في أن القارئ على دراية بأنظمة المعادلات الخطية البسيطة وبعض طرق حلها. ولكننا سنقدم هنا الصورة العامة لأنظمة المعادلات الخطية وطرق حلها .

لنفرض أن لدينا m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ولنفرض أن a_{ij} عدد حقيقي يرمز لمعامل x_j في المعادلة i . ولتكن $b_1, b_2, \ldots, b_m$ أعدادًا حقيقية. عندئذٍ يمكن كتابة نظام المعادلات الخطية على الصيغة :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (١)$$

نقول إن النوني المرتب $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ حل لهذا النظام إذا تحققت كل معادلة من معادلات النظام وذلك بعد التعويض عن كل x_i بـ s_i .

مثال (١ ، ٣)

من الواضح أن للنظام

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 4$$

حل وحيد وهو الثلاثي $(2, -1, 4)$. □

مثال (٢ ، ٣)

يسمى النظام

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

نظامًا مثلثيًا وله حل وحيد. لإيجاد هذا الحل نعوض $x_3 = 4$ في المعادلة الثانية لتحصل على $x_2 = -10$ ثم نعوض عن $x_3 = 4$ و $x_2 = -10$ في المعادلة الأولى لنجد أن $x_1 = 12$. وعندئذٍ فإن الحل الوحيد للنظام هو $(12, -10, 4)$. □

مثال (٣ ، ٣)

يمكن إعادة كتابة النظام

$$x_1 + 3x_3 = 5$$
$$x_2 + 2x_3 = 2$$

ليصبح على صورة نظام مثلثي :

$$x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5$$
$$x_2 + 2x_3 = 2$$

ولذا فإننا نستطيع حله بالتعويض كالتالي :

نفرض أن $x_3 = t$ حيث $t \in \mathbb{R}$. ولذا فإن $x_2 = 2 - 2t$. وبالتعويض عن $x_3 = t$ بالمعادلة الأولى نجد أيضًا أن $x_1 = 5 - 3t$. إذن $(5-3t, 2-2t, t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ حل للنظام. لاحظ أن لهذا النظام عدداً غير منته من الحلول . □

في كل من الأمثلة السابقة استطعنا أن نجد حلولاً للنظام إما بمجرد النظر أو بوضعه على شكل نظام مثلثي والتعويض التراجعي، ولكن للأسف ليست جميع الأنظمة بتلك السهولة، فمثلاً لا نستطيع إيجاد حل للنظام

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2$$
$$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1$$

بمجرد النظر إليه. ولذا فإنه من الضروري البحث عن نظام أبسط ويكون له الحل نفسه، وهذا هو بالفعل ما سنقوم به في هذا البند.

تعريف (١ ، ٣)

نقول إن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لهما مجموعة حل واحدة.

إن التعريف (١ ، ٣) يقدم لنا أول خطوات الطريق إذ يقترح علينا البحث عن نظام من المعادلات يكافئ النظام تحت الدراسة ولكنه أبسط منه ويكون من اليسير إيجاد حل له.

لاحظ أننا لو أجرينا العمليات الصفية الأولية التي قدمناها في البند (٢ ، ١) على نظام معادلات خطية فإننا نحصل في كل مرة على نظام مكافئ. في الحقيقة هذا هو بالضبط ما نحن بصدد القيام به إلا أننا سنقدم أولاً العلاقة الوثيقة بين أنظمة المعادلات الخطية والمعادلات المصفوفية حيث يتسنى لنا استخدام الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة التي قمنا بدراستها سابقًا لمساعدتنا على حل أنظمة المعادلات الخطية .

دعنا نعود إلى نظام المعادلات الخطية (١) الذي قدمناه في بداية هذا البند . لا حظ أننا نستطيع استبدال هذا النظام بمعادلة مصفوفية على الصيغة : $AX = B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{،} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات،B مصفوفة الثوابت، X مصفوفة المجاهيل.

لاحظ أن عدد صفوف A هو عدد معادلات النظام وعدد أعمدتها هو عدد مجاهيل النظام.

سنقوم الآن بتوسيع المصفوفة A وذلك بإضافة B كعمود جديد لنحصل على مصفوفة جديدة نرمز لها بالرمز $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة (augmented matrix) لنظام المعادلات.

نقدم الآن طريقتين لحل النظام (١) باستخدام المصفوفة الموسعة $[A|B]$ هما :

(١) طريقة جاوس (Gauss method) :

لحل النظام (١) باستخدام طريقة جاوس نقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية. ومن ثم نحصل على نظام جديد من المعادلات

يكافئ النظام الأصلي ولكنه أبسط منه (في الحقيقة النظام الجديد هو نظام مثلثي) ولذا فإنه يكون من السهل الحصول على حل للنظام.

(٢) طريقة جاوس – جوردان (Gauss – Jordan method) :

هذه الطريقة مماثلة لطريقة جاوس ولكننا في هذه الحالة نضع المصفوفة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة بدلاً من الصيغة الدرجية الصفية.

قبل أن نقدم أمثلة على طريقتي جاوس و جاوس – جوردان يجب أن نلفت الانتباه إلى أنه ليس بالضرورة وجود حل لأنظمة المعادلات وهذا ما يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٢ ، ٣)

يكون نظام معادلات خطية متسقًا أو متآلفاً (consistent) إذا كان له حل ويكون غير متسق إذا كان لا يوجد له حل.

مثال (٤ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

الحل

(أ) طريقة جاوس :

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي $[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$. الآن :

$$\xrightarrow{R_{12}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{-3R_{13}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array}\right]\xrightarrow{8R_{32}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right]$$

والمصفوفة الموسعة الأخيرة على الصيغة الدرجية الصفية. وبالتالي فإن النظام المعطى يكافئ النظام :

$$\begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3&=1 \\ x_2+2x_3&=\frac{3}{2} \\ -32x_3&=-14 \end{aligned}$$

بحل المعادلة الأخيرة نجد أن $x_3=\frac{7}{16}$. وبالتعويض عن قيمة x_3 في المعادلة الثانية نجد أن $x_2=\frac{5}{8}$. وأخيرًا بالتعويض عن قيمتي x_2 و x_3 في المعادلة الأولى نجد أن $x_1=\frac{11}{16}$. وعليه فإن الحل الوحيد للنظام هو $(\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16})$.

(ب) طريقة جاوس – جوردان :

نكمل من حيث انتهينا في الفقرة (أ) لنضع المصفوفة الموسعة على صيغة درجية صفية مختزلة. الآن :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right]\xrightarrow{3R_{21}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{32}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_{32}]{-11R_{31}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} \end{array}\right]$$

وهكذا فإن نظام المعادلات المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 = \frac{11}{16} \quad , \quad x_2 = \frac{5}{8} \quad , \quad x_3 = \frac{7}{16}.$$

ويكون الحل الوحيد للنظام هو $\left(\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}\right)$ وهذا يتفق مع ما وجدناه في الفقرة (أ). □

مثال (٥ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس ثم طريقة جاوس ـ جوردان لحل النظام :

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

الحل

(أ) طريقة جاوس :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_{14}]{-3R_{12}, -2R_{13}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_{24}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

لاحظ أن هذا النظام يحتوي على معادلتين وأربعة مجاهيل ولحله يلزم إعطاء مجهولين قيمتين اختياريتين وإيجاد المجهولين الآخرين بدلالتهما؛ لذلك بوضع $x_4 = t$ و $x_2 = s$ فإننا نجد أن : $x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t$ و $x_1 = 3s - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$.

وعليه فإن للنظام عدداً غير منته من الحلول ومجموعة الحل هي :

$$.S = \left\{ \left(3s - \tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{2}\ , s, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}t, t\right) : t\,,\ s \in \mathbf{R} \right\}$$

(ب) طريقة جاوس – جوردان :

نكمل من حيث انتهينا في الفقرة (أ) لنضع المصفوفة الموسعة على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة فنجد أن :

$$-2R_{21}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

هي الصيغة الدرجية المختزلة للمصفوفة الموسعة، ويكون نظام المعادلات المكافئ هو:

$$x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

لذلك بوضع $x_4 = t$ و $x_2 = s$ والتعويض نحصل على مجموعة الحل وهي :

$$S = \left\{ \left(3s - \tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{2}\ , s , \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}t , t\right) : t\, ,\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

وهو يتفق مع ما وجدناه في الفقرة (أ) . □

مثال (٦ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس ثم جاوس – جوردان لحل النظام :

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

الحل

(أ) طريقة جاوس :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$0 = 1$$

وهذا غير ممكن وبالتالي فإنه لا يوجد حل لهذا النظام.

(ب) طريقة جاوس ـ جوردان :

لاحظ أن المصفوفة الموسعة الأخيرة على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة ولذا فإننا نحصل على النتيجة التي وجدناها في الفقرة (أ) . □

من الأمثلة الثلاثة السابقة وجدنا أن نظام المعادلات قد يكون متسقًا أو غير متسق وإذا كان متسقًا فإما أن يكون له حل وحيد أو عدد غير منته من الحلول وهذا ليس من قبيل المصادفة ولكنه واقع تؤكده المبرهنة التالية :

مبرهنة (١ ، ٣)

إذا كان نظام المعادلات الخطية $AX = B$ متسقًا فإنه إما أن يكون له حل وحيد أو عدد غير منته من الحلول.

البرهان

لنفرض أن للنظام أكثر من حل ولنفرض أن X_1 و X_2 حلان مختلفان. سنبرهن أن $X_1 + k(X_1 - X_2)$ حل للنظام لكل $k \in \mathbb{R}$ وبالتالي فإن له عدداً غير منته من الحلول. الآن :

$$A(X_1 + k(X_1 - X_2)) = AX_1 + k(AX_1) - k(AX_2) = B + kB - kB = B$$

وعليه فإن $X_1 + k(X_1 - X_2)$ حل للنظام لكل $k \in \mathbb{R}$. ♦

ملحوظة

لاحظ أن الأمثلة الثلاثة السابقة كانت لأنظمة معادلات تتكون من عدد من المعادلات مساوٍ لعدد المجاهيل.

نقدم الآن أمثلة أخرى لأنظمة يختلف فيها عدد المعادلات عن عدد المجاهيل.

مثال (٧ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 5x_1 + x_2 &= 1 \\ 9x_1 + 7x_2 &= -5 \end{aligned}$$

الحل

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-9R_{13}]{-5R_{12}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{17}{3} \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{3}{13}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[36R_{13}]{-9R_{12}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-13R_{13}]{\frac{2}{3}R_{21}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 = \frac{6}{13} \quad ، \quad x_2 = -\frac{17}{13}.$$

ولذا فإن للنظام حلاً وحيداً هو $\left(\frac{6}{13}\ ,\ -\frac{17}{13}\right)$. □

مثال (٨ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس لحل النظام

$$3x_1 + 2x_2 = \ \ 4$$
$$9x_1 + 6x_2 = \ 12$$
$$-36x_1 - 24x_2 = -48$$

الحل

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 12 \\ -36 & -24 & -48 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 9 & 6 & 12 \\ -36 & -24 & -48 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-9R_{12},\,36R_{13}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو $x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{4}{3}$.

وبالتعويض عن $x_2 = t$ و إيجاد x_1 نجد أن مجموعة حل النظام هي :

$$S = \left\{ \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t\,,\, t \right) : t \in \mathbf{R} \right\}$$

ولهذا فإن للنظام عدداً غير منته من الحلول . □

مثال (٩ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس لايجاد حل النظام :

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

الحل

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-1R_{13}]{-1R_{12}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_{23}]{1R_{21}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 0$$

$$0 = 2$$

ولذا فإنه لا يوجد حل لهذا النظام . □

مثال(١٠ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

الحل

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}5 & -2 & 6 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{5}R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_{12}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{27}{5} & 1\end{array}\right]\xrightarrow{5R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0\\ 0 & 1 & 27 & 5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}R_{21}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 12 & 2\\ 0 & 1 & 27 & 5\end{array}\right]$$

النظام المكافىء للنظام المعطى هو :

$$x_2 + 27x_3 = 5$$
$$x_1 + 12x_3 = 2$$

بوضع $x_3 = t$ نجد أن مجموعة الحل هي :

$$S=\{(2-12t, 5-27t, t): t\in\mathbb{R}\}$$

ولذا فإن للنظام عدداً غير منته من الحلول . □

مثال (١١ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$

الحل

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 4\end{array}\right]\xrightarrow{-1R_{12}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$0 = 1$$

ولذا فإنه لا يوجد حل للنظام . □

ملحوظة

إذا كان عدد مجاهيل النظام أكبر من عدد معادلاته فإنه إما أن يكون للنظام عدد غير منته من الحلول كما في المثال (١٠ ، ٣) أو أن النظام غير متسق كما في المثال (١١ ، ٣) ولكن لا يمكن أن يكون للنظام حل وحيد حيث نستطيع أن نرى ذلك بالتمعن في طريقة جاوس.

مثال (١٢ ، ٣)

عين قيم β التي تجعل للنظام :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + \beta x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 + \beta x_3 + (3 - \beta)x_4 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \beta x_4 = 6$$

(أ) حلاً وحيدًا (ب) لا يوجد حل (ج) عدداً غير منته من الحلول

الحل

باستخدام طريقة جاوس لوضع المصفوفة الموسعة للنظام على الصيغة الدرجية الصفية نجد أن :

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & \beta & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & \beta & 3-\beta & 6\\ 2 & 2 & 2 & \beta & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{12},\ -1R_{13},\ -2R_{14}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta-1 & 2-\beta & 2\\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 & -2 \end{array}\right]\quad (*)$$

الآن إذا كانت $\beta \neq 1,2$ فإننا نستطيع وضع المصفوفة على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة حيث نجد أن :

$$\xrightarrow{\frac{1}{\beta-1}R_2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta-1 & 2-\beta & 2\\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{21}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta-1 & 2-\beta & 2\\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 & -2 \end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{\beta-2}R_4]{\frac{1}{\beta-1}R_3}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-\beta}{\beta-1} & \frac{2}{\beta-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\beta-2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{31}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1+\frac{\beta-2}{\beta-1} & \frac{2}{1-\beta}+4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-\beta}{\beta-1} & \frac{2}{\beta-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\beta-2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{2-\beta}{\beta-1}R_{43}]{-\left(1+\frac{\beta-2}{\beta-1}\right)R_{41}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4+\frac{2}{\beta-2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\beta-2} \end{array}\right]$$

وعندئذٍ فإن الحل الوحيد للنظام في هذه الحالة هو : $\left(4+\frac{2}{\beta-2}, 0, 0, \frac{-2}{\beta-2}\right)$.

الآن إذا كانت $\beta = 2$ فإن المصفوفة (*) تصبح

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

ولذا فإن النظام مستحيل الحل في هذه الحالة لأن إحدى المعادلات المقابلة هي $0 = -2$.

وأخيرًا إذا كانت $\beta = 1$ فإن المصفوفة (*) تصبح :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

وباستخدام العمليات الصفية نجد أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لها هي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

والنظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_4 = 2$$

وبوضع $x_3 = t$ و $x_2 = s$ فإن مجموعة الحل لهذا النظام هي :

$$S = \{(2-s-t, s, t, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

ويكون للنظام في هذه الحالة عدد غير منته من الحلول . □

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m\times n$. إن إحدى المسائل الهامة التي ستواجهنا لاحقاً هي إيجاد جميع المصفوفات B من الدرجة $m\times n$ بحيث يكون نظام المعادلات $AX = B$ متسقًا. في الحالة الخاصة والتي تكون فيها A مصفوفة مربعة فإن الإجابة على هذا السؤال سهلة وتزودنا به المبرهنة التالية. أما الحالة العامة فإنها تعتمد على طبيعة المصفوفة A ونستطيع استخدام طريقة جاوس لوضع الشروط اللازمة على B وسنقدم الشرط اللازم والكافي لهذه الحالة في الفصل الرابع.

مبرهنة (٢ ، ٣)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n. عندئذٍ العبارات التالية جميعها متكافئة :

(أ) A لها معكوس.

(ب) للنظام $AX = B$ حل وحيد لكل مصفوفة B من الدرجة $n\times 1$.

(ج) النظام $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $n\times 1$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : لنفرض أن A لها معكوس، بما أن $A(A^{-1}B) = B$ فإن $X = A^{-1}B$ حل للنظام $AX = B$. و لإثبات الوحدانية نفرض أن X_1 حل آخر للنظام. عندئذٍ $AX_1 = B$ ؛ ولذا فإن $A^{-1}(AX_1) = A^{-1}B$. أي أن $X_1 = A^{-1}B$. وبالتالي فإن للنظام حلاً وحيداً.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : واضح.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض الآن أن $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $n \times 1$.

عندئذٍ جميع الأنظمة التالية متسقة :

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \cdots , \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

لنفرض إذن أن $X_1, X_2, \ldots , X_n$ حلول لهذه الأنظمة على التوالي ولتكن D هي المصفوفة من الدرجة n التي تتكون أعمدتها من هذه الحلول. أي أن $D = [\, X_1 \mid X_2 \mid \ldots \mid X_n \,]$. عندئذٍ :

$$.\, AD = \left[AX_1 \middle| AX_2 \middle| \ldots \middle| AX_n \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I$$

ولذا فإن $A^{-1} = D$. ♦

مثال (١٣ ، ٣)

استخدم المبرهنة (٢ ، ٣) لحل النظام :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل

مصفوفة المعاملات هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام العمليات الصفية أو المصفوفة المرافقة نجد أن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن للنظام حلاً وحيداً وهذا الحل هو :

$$\square \,.\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}$$

من المبرهنات (٩ ، ١) ، (١١ ، ٢) و (٢ ، ٣) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٣ ، ٣)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) A لها معكوس.

(٢) الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n .

(٣) يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الأولية.

(٤) للنظام $AX = B$ حل وحيد لكل مصفوفة B من الدرجة $n \times 1$.

(٥) النظام $AX = B$ متسق لكل مصفوفة B من الدرجة $n \times 1$.

(٦) $\det A \neq 0$. ♦

مثال (١٤ ، ٣)

ما هي القيود التي يجب وضعها على b_1, b_2, b_3 لكي يكون النظام التالي متسقًا :

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1$$
$$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3$$

الحل

باستخدام طريقة جاوس لوضع المصفوفة الموسعة على الصيغة الدرجية الصفية نجد أن :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & b_2 \\ -3 & 3 & -3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_{13}]{-4R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & -3 & 12 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2 - 4b_1}{3} \\ 0 & -3 & 12 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2 - 4b_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

لذلك لكي يكون النظام المعطى متسقاً فإنه يجب أن يكون $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. أي أن $b_3 = b_1 - b_2$. وبالتالي فإن

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \frac{1}{3}(b_2 - 4b_1) \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} \quad . \quad \square$$

تمارين (١ ، ٣)

في التمارين من (١) إلى (١٥) عين جميع حلول أنظمة المعادلات الخطية مستخدمًا طريقة جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان .

(١)
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - 4y &= -1 \end{aligned}$$

(٣)
$$\begin{aligned} 3x + 7y - 3z &= 2 \\ 2x + 5y + z &= -4 \\ 2x + 6y + 10z &= 3 \end{aligned}$$

(٤)
$$\begin{aligned} 3x + 7y - 3z &= 2 \\ 2x + 5y + z &= -4 \\ 2x + 6y + 10z &= -20 \end{aligned}$$

(٥)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 5y - 2z &= 3 \\ x + 7y - 7z &= 5 \end{aligned}$$

(٦)
$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

(٧)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

(٨)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

(٩)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(١٠)
$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

(١١)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(١٢)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(١٣)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 5x + y &= 1 \\ 9x + 7y &= -5 \end{aligned}$$

(١٤)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(١٥)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

(١٦) عين قيم كلاً من a ، b و c بحيث يكون النظام التالي متسقًا :

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= a \\ 4x - 5y + 8z &= b \\ -3x + 3y - 3z &= c \end{aligned}$$

(١٧) عين قيم كلاً من a و b التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$\begin{aligned} x + by &= -1 \\ ax + 2y &= 5 \end{aligned}$$

(١٨) حل النظام التالي :

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y^2 &= 1 \\ 2x - xy + 3y^2 &= 13 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

(١٩) عين جميع قيم a التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ z &= 2 \\ (a^2 - 4)z &= a - 2 \end{aligned}$$

(٢٠) عين جميع قيم a و b التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد ، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$ax + bz = 2$$
$$ax + ay + 4z = 4$$
$$ay + 2z = b$$

(٢١) حل النظام التالي :

$$xy - 2\sqrt{y} + 3zy = 8$$
$$2xy - 3\sqrt{y} + 2zy = 7$$
$$-xy + \sqrt{y} + 2zy = 4$$

(٢٢) عين قيم كل من a ، b و c التي من اجلها يكون للنظام التالي الحل الوحيد : $(1, -1, 2)$

$$ax + by - 3z = -3$$
$$-2x - by + cz = -1$$
$$ax + 3y - cz = -3$$

(٢٣) عين قيم a التي تجعل النظام التالي متسقا، ثم حل النظام :

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$2x_1 - 4x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 = a$$

(٢٤) إذا كانت كل من a ، b ، c و d أعدادا حقيقية موجبة فأثبت أن النظام التالي غير متسق :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = c$$
$$-3x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = d$$

(٢٥) ليكن لدينا نظام المعادلات التالي :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -6\beta \\ \gamma x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2\beta \\ 2x_1 + x_2 + (\gamma+1)x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(أ) إذا كانت $\gamma \neq 0$ و $\gamma \neq 6$ فأثبت أن للنظام حلاً وحيداً .

(ب) إذا كانت $\gamma = 0$ فأثبت أنه يوجد قيمة وحيدة β بحيث يكون النظام متسقًا ثم عين حل النظام في هذه الحالة.

(ج) ناقش الحالة $\gamma = 6$.

(٢٦) أثبت أن النظام التالي :

$$x_1 - x_2 - x_4 - 5x_5 = \alpha$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = \beta$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 6x_5 = \gamma$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 - 5x_5 = \delta$$

متسق إذا فقط إذا كان $8\alpha - \beta - 11\gamma + 5\delta = 0$.

عين حل النظام عندما يكون $\alpha = \beta = -1 \;,\; \gamma = 3 \;,\; \delta = 8$.

(٢٧) ما هي القيود التي يجب وضعها على كلٍ من b_1 ، b_2 و b_3 لكي يكون كل من النظامين التاليين متسقًا :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad \text{(أ)}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned} \qquad \text{(ب)}$$

(٢ ، ٣) أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة

Homogeneous Systems of Linear Equations

ليكن لدينا نظـام المعادلات $AX = B$ حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$، X مصفوفة من الدرجة $n \times 1$، B مصفوفة من الدرجة $m \times 1$. إذا كانت $B = 0$ فإننا نحصل على النظام $AX = 0$ ونقول إنه نظـام متجانس (homogeneous system). أما إذا كانت $B \neq 0$ فإننا نقول أنه نظام غير متجانس (nonhomogeneous).

من الواضح أن النظام المتجانس متسق وذلك لأن $(0, 0, \dots, 0)$ حل لهذا النظام. يسمى هذا الحل بالحل التافه (trivial solution). ولذا فإنه إذا وجد حل غير تافه للنظام المتجانس فإنه باستخدام المبرهنة (١ ، ٣) نخلص إلى أنه يجب أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول وفي الحقيقة نستطيع أن نبرهن :

مبرهنة (٤ ، ٣)

إذا كان كل من X, Y حلاً للنظام المتجانس $AX = 0$ وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن :

(أ) $X + Y$ حل للنظام. (ب) kX حل للنظام.

البرهان

(أ) بما أن كلاً من X و Y حل للنظام فإن $AX = 0$. كما أن $AY = 0$ ، وعندئذٍ :

$$A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$$

ولذا فإن $X + Y$ حل له أيضاً.

(ب) لاحظ أن : $A(kX) = k(AX) = k \cdot 0 = 0$. ولذا فإن kX حل للنظام . ♦

تعريف (٣ ، ٣)

إذا كانت $u_1, u_2, \ldots , u_k$ مصفوفات من الدرجة $1 \times n$ (أو $n \times 1$) فإننا نقول إن المصفوفة U من الدرجة $1 \times n$ تركيب خطي (linear combination) للمصفوفات $u_1, u_2, \ldots , u_k$ إذا وجدت أعداد حقيقية $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ بحيث إن $U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$.

لاحظ أنه بالاستعانة بالمبرهنة (٤ ، ٣) نستطيع أن نخلص إلى أن أي تركيب خطي لحلول هذا النظام المتجانس $AX = 0$ هو حل لهذا النظام.

في كثير من المسائل التي ستواجهنا نكون بحاجة إلى عمل العكس، أي وضع حل للنظام كتركيب خطي لحلول أخرى (في العادة يكون لهذه الحلول ميزة معينة). سنوضح ذلك في المثال التالي مستعينين بطريقة جاوس (أو جاوس – جوردان) لحل النظام أولاً ثم كتابة هذا الحل كتركيب خطي لحلول معينة.

مثال (١٥ ، ٣)

استخدم طريقة جاوس ــ جوردان لحل النظام المتجانس التالي ثم ضع الحل على صورة تركيب خطي لحلول معينة.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

الحل

$$[A\,|\,0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_{13}]{1R_{12}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1R_{23}]{-1R_{21}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$

وبوضع $x_4 = t$ و $x_2 = s$ نجد أن مجموعة الحل هي :

$$S = \{(2s + t, s, -2t, t) : t, s \in \mathbf{R}\}$$

لذا فإن :

$$(2s + t, s, -2t, t) = (2s, s, 0, 0) + (t, 0, -2t, t)$$
$$= s(2, 1, 0, 0) + t(1, 0, -2, 1)$$

أي أننا نستطيع الحصول على مجموعة الحل (تسمى في هذه الحالة الحل العام للنظام) كتركيب خطي للحلين $(1, 0, -2, 1)$ و $(2, 1, 0, 0)$. □

في كثير من الأحيان عند محاولة إيجاد مجموعة الحل للنظام غير المتجانس $AX = B$ يكون من السهل إيجاد مجموعة الحل للنظام المتجانس المرادف $AX = 0$ وأحد حلول النظام غير المتجانس. إن هذا يكفي لإيجاد الحل العام للنظام $AX = 0$ كما هو موضح في المبرهنة التالية.

مبرهنة (٥ ، ٣)

ليكن X_0 حلاً للنظام $AX = B$. عندئذٍ أي حل للنظام $AX = B$ يجب أن يكون على الصيغة $X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

البرهان

نبرهن أولاً أن $X_0 + X_1$ حل للنظام $AX = B$. لاحظ أن :

$$A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = B + 0 = B$$

وبالتالي فإن $X_0 + X_1$ حل للنظام $AX = B$.

لنفرض الآن أن Y حل للنظام $AX = B$. سنبرهن أن $Y = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$ ، ولبرهان ذلك نضع $X_1 = Y - X_0$. الآن :

$$AX_1 = A(Y - X_0) = AY - AX_0 = B - B = 0 \ . \ \blacklozenge$$

مثال (١٦ ، ٣)

إذا علمت أن $X_0 = (1 , -1 , 0 , 0)$ حل للنظام

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 - x_4 &= -1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

فاستخدم المبرهنة (٥ ، ٣) لإيجاد جميع حلول النظام.

الحل

باستخدام طريقة جاوس – جوردان لحل النظام المتجانس المقابل نجد أن حلول النظام المتجانس هي $(-2t\ ,\ t\ ,\ -t\ ,\ t)$. وعندئذٍ فإن جميع حلول النظام غير المتجانس هي $(1,-1,0,0)+(-2t,t,-t,t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$. □

ننهي هذا البند بالنتيجة التالية للحالة الخاصة التي تكون فيها مصفوفة النظام مصفوفة مربعة والتي نحصل عليها مباشرة من النتيجة (٣ ، ٣).

نتيجة (٦ ، ٣)

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإنه يكون للنظام المتجانس $AX = 0$ الحل التافه فقط إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس. ♦

مثال (١٧ ، ٣)

أثبت أن للنظام المتجانس التالي حلاً واحداً فقط هو الحل التافه

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_3 = 0$$

الحل

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 22 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 1(2-1) + 2(0-1) = 1 \neq 0$$

ولذا فإن للمصفوفة A معكوسًا. وبالتالي فإن للنظام الحل التافه فقط. □

تمارين (٢ ، ٣)

في التمارين من (١) إلى (٤) عين قيمة a التي تجعل للنظام عدداً غير منته من الحلول ثم عين جميع الحلول.

(١)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ x + ay - 3z &= 0 \\ -x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ ay - z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

(٣)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + 3y + 6z &= 0 \\ 2x + 3y + az &= 0 \end{aligned}$$

(٤)
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

في التمارين من (٥) إلى (١٠) أكتب الحل العام كتركيب خطي لحلول معينة.

(٥)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(٦)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(٧)
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 = 0$$

(٨)
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_5 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0$$
$$-3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 11x_5 = 0$$

(٩)
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0$$

(١٠)
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$$
$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0$$
$$6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

(١١) أثبت أن للنظام التالي حلاً واحداً فقط هو الحل التافه

$$x + y = 0$$
$$x - y = 0$$
$$2x + 3y = 0$$

(٣ ، ٣) قاعدة كرامر
Cramer's Rule

في هذا البند نستخدم المبرهنة (١٤ ، ٢) لتقديم طريقة أخرى ، تعرف بقاعدة

كرامر، لحل نظام من المعادلات الخطية في الحالة التي يكون فيها عدد المعادلات مساويًا لعدد المجاهيل. تكمن أهمية هذه الطريقة ليس في تعيين الحل فقط ولكن في دراسة خواص الحل دون اللجوء إلى حل النظام فعليًا.

مبرهنة (٧ ، ٣)

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة n لها معكوس ، وليكن :

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

عندئذٍ الحل الوحيد لنظام المعادلات $AX = B$ هو :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \ , \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \ , \cdots , \ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

حيث A_i هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B بدلاً من العمود i .

البرهان

لما كان $AX = B$ وحيث أن للمصفوفة A معكوسًا فإننا نجد أن :

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)B$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1i} & C_{2i} & \cdots & C_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

وعندئذ :

$$x_i = \frac{1}{\det A}(b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni}) \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \cdots, n \;.$$

ولكن إذا حسبنا $\det A_i$ باستخدام العمود i فإننا نجد أن :

$$\det A_i = b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni}$$

وبالتالي فإن :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \cdots, n \;. \blacklozenge$$

مثال (١٨ ، ٣)

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

الحل

النظام يكافىء المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ 5\\ -2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

وبحساب محدد A نجد أن $\det A=-32$. كذلك نجد أن :

$$A_1=\begin{bmatrix}6 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 1 & -2\\ 3 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1 & -1 & 6 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 5\\ 3 & -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

وبحساب المحددات نجد أن :

$$\det A_1=-32\ ,\quad \det A_2=32\ ,\quad \det A_3=-64\ ,\quad \det A_4=64$$

وعليه فإن :

$$x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=1\ ,\qquad x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=-1$$

$$\square\ .\quad x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=2\ ,\qquad x_4=\frac{\det A_4}{\det A}=-2$$

تمارين (٣ ، ٣)

(١) استخدم قاعدة كرامر لحل كلٍ من النظامين :

(أ) $2x+3y=7$

$8x+y=-2$

(ب) $8x-6y=-4$

$3x+2y=6$

(٢) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$2x-6y+z=2$$
$$y+z=1$$
$$x-y-z=0$$

(٣) حل نظام المعادلات :

$$x-3y-z=-7$$
$$x-y-z=-2$$
$$x-6y-2z=-3$$

(أ) باستخدام قاعدة كرامر.

(ب) باستخدام طريقة جاوس.

(ج) باستخدام معكوس مصفوفة المعاملات.

(٤) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$x_1+x_2+x_3=a$$
$$x_1+(1+a)x_2+x_3=2a$$
$$x_1+x_2+(1+a)x_3=0$$

(٥) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من y و z للنظام :

$$6x-y+3z=-3$$
$$9x+5y-2z=7$$
$$5x+y-8z=-2$$

(٦) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة x التي تحقق النظام :

$$5x + y - z = 4$$

$$9x + y - z = 1$$

$$x - y + 5z = 2$$

(٧) استخدم كلاً من قاعدة كرامر وطريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$4x - y + 3z = 1$$

$$6x + 2y - z = 0$$

$$3x + 3y + 2z = -1$$

(٨) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة x_3 التي تحقق النظام :

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 32$$

$$2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4$$

(٩) استخدم كلاً من قاعدة كرامر وطريقة جاوس لحل النظام :

$$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$-3x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

(١٠) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من x_1 و y_1 بدلالة x و y للنظام :

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta$$

$$y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

(١١) هل تستطيع استخدام قاعدة كرامر لحل النظام :

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$x + y - 2z = 3$$

ولماذا ؟ هل يوجد حل للنظام ؟

(١٢) عين قيم a التي تجعل للنظام حلاً وحيداً ثم استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

(أ) $3ax - 2y = 4$, $-6x + ay = 1$

(ب) $6ax + 4y = 5$, $9x + 2ay = -2$