الفصل الثاني المحددات

DETERMINANTS

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن بالإمكان أن نقرن المصفوفةA بعدد يطلق عليه محدد المصفوفة. أي أن المحدد دالة مجالها مجموعة المصفوفات المربعة ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعتبر دالة المحدد من الدوال الهامة جداً حيث نستطيع توظيفها في تزويدنا بمعلومات هامة عن المصفوفة، مثل وجود المعكوس وطريقة حسابه. كذلك نستطيع استخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية كما سنرى في الفصل الثالث.

(١ ، ٢) تعريف المحدد

Definition of Determinant

هناك أكثر من طريقة لتعريف محدد مصفوفة سنختار التعريف الإستقرائي (inductive)، أي أننا سنعرف محدد مصفوفة من الدرجة 1 و 2 أولاً ثم نعرف محدد مصفوفة من الدرجةn باستخدام محددات المصفوفات من الدرجة أقل من n .

قبل تقديم هذا التعريف يلزمنا الترميز التالي :

ترميز

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن A_{ij} ترمز للمصفوفة الجزئية من الدرجة $n-1$ التي نحصل عليها من المصفوفة A بحذف الصف i والعمود j .

على سبيل المثال إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ فإن :

$$A_{12}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

تعريف (١ ، ٢)

لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . يعرف محدد المصفوفة A ويرمز له $\det A$ (أو $|A|$) استقرائيًا كالتالي :

(١) إذا كان $n=1$ فإن $\det A=a_{11}$.

(٢) إذا كان $n=2$ فإن $\det A=a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}$.

(٣) إذا كان $n>2$ فإن

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}\det A_{1n}\\ &=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det A_{1j}\end{aligned}$$

مثال (١ ، ٢)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{aligned}\det A &= 1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ &=(0-4)-3(0-12)-2\,(-1-6)\end{aligned}$$

ولذا فإن $\det A=46$. □

مثال (٢ ، ٢)

إذا كانت A هي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

فإنه باستخدام التعريف (١ ، ٢) نجد أن :

$$\det A = 2\det A_{11} - \det A_{12} - 3\det A_{13} - \det A_{14}.$$

ولكن $A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ،

$A_{13} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A_{14} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ولذا فإن :

$$A_{11} = -2\,(0+1) - 0\,(2+0) + 2\,(1-0) = 0.$$

$$A_{12} = -3\,(0+1) - 0\,(4+1) + 2\,(2-0) = 1.$$

$$A_{13} = -3\,(2+0) + 2\,(4+1) + 2\,(0-1) = 2.$$

$$A_{14} = -3\,(1-0) + 2\,(2-0) + 0\,(0-1) = 1.$$

إذن ، $\det A = 2\,(0) - 1 - 3\,(2) - 1 = -8$. □

من المثال (٢،٢) نلاحظ أنه كلما ازدادت درجة المصفوفة فإن حساب محددها يصبح أمرًا مزعجًا فعلى سبيل المثال إذا كانت A من الدرجة 4 فإن محددها

يحتوي على 24 حداً وإذا كانت من الدرجة 6 فإن محددها يحتوي على 720 حداً وإذا كانت من الدرجة 10 فإن محددها يحتوي على أكثر من ثلاثة ملايين ونصف المليون من الحدود. إذن لابد من البحث عن وسيلة أخرى لإيجاد المحدد دون اللجوء إلى التعريف وهذا ما سنوفره للقارئ في البنود القادمة.

لاحظ أننا قمنا بتعريف المحدد استقرائيًا مستخدمين الصف الأول من المصفوفة ولكن كان بإمكاننا استخدام أي صف آخر وحتى أي عمود آخر وهذا ما توضحه المبرهنة التالية.

تعريف (٢ ، ٢)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . يسمى المحدد $\det A_{ij}$ مصغر (minor) العنصر a_{ij} ، أما العدد $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ فإنه يسمى المعامل المرافق (cofactor) للعنصر a_{ij} .

مثال (٣ ، ٢)

إذا كانت
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن
$$C_{42} = (-1)^{4+2} \det A_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -10 \ . \ \square$$

ملحوظة

لاحظ أنه من تعريف $\det A$ نجد أن هذا المحدد هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول بمعاملاتها المرافقة. أي أن

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}.$$

في الحقيقة نستطيع ايجاد المحدد باستخدام أي صف آخر أو أي عمود في المصفوفة.
دعنا نبين ذلك للمصفوفة من الدرجة الثالثة.

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فإن :

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

وبإعادة ترتيب هذه الحدود نخلص إلى أن :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\
&= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\
&= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\
&= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\
&= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}
\end{aligned}$$

في الحقيقة إن ما قمنا بعمله للمصفوفة من الدرجة3 يبقى صحيحًا للمصفوفة من الدرجة n لأي $n \geq 3$. وهذا ما تنص عليه المبرهنة التالية التي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (١ ، ٢)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n . عندئذٍ :

(أ) $\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ لكل $1 \leq i \leq n$.

(ب) $\det A = a_{1j}\,C_{1j} + a_{2j}\,C_{2j} + \ldots + a_{nj}\,C_{nj}$ لكل $1 \le j \le n$. ♦

مثال (٤ ، ٢)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ فإننا نختار العمود الثاني لحساب $\det A$

وذلك لأنه يحتوي على أصفار كثيرة. وعندئذٍ يكون لدينا :

$$\det A = a_{12}\,C_{12} + a_{22}\,C_{22} + a_{32}\,C_{32} + a_{42}\,C_{42}$$

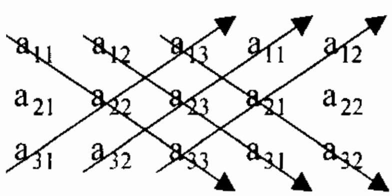
$$= a_{12}\,C_{12} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,[1(8+0) - 0\,(6-0) + 1(-3-16)]$$

إذن ، $\det A = -55$. □

نختم هذا البند بتقديم طريقة سريعة تصلح فقط لحساب محدد مصفوفة من الدرجة 3 . فإذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3 فإننا نستخدم الشكل التالي للحصول على حدود المحدد $\det A$



نستطيع الآن أن نجد محدد A كما يلي :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array}$$

ولذا فإن : $\det A = 8 + 0 + (-3) - 16 - 0 - 0 = -11$

تمارين (١ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٨) أحسب محدد المصفوفة.

(١) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} 3a & a \\ 3b & b \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (٨) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & -12 & 7 & -3 \\ 2 & -8 & 8 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(٩) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$.

(١٠) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(١١) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = 0$.

(١٢) عين قيم λ بحيث يكون $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -6 \\ 1 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$.

(١٣) عين $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$.

(١٤) لتكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$.

أثبت أن $AB = BA$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$.

(١٥) إذا كانت $A = 0$ فأثبت أن $\det A = 0$. هل العكس صحيح ؟

(١٦) إذا كانت $A = B$ فأثبت أن $\det A = \det B$. هل العكس صحيح ؟

(١٧) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فما هي العلاقة بين $\det A$ و $\det(5A)$.

(١٨) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x^2{}_1 \\ 1 & x_2 & x^2{}_2 \\ 1 & x_3 & x^2{}_3 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

$\det A = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$.

(٢ ، ٢) خواص المحددات

Properties of Determinants

في هذا البند نقدم الخواص الأساسية للمحددات ونرى كيفية استخدام ه الخواص لإيجاد محدد مصفوفة دون اللجوء إلى التعريف، كذلك نقدم علاقة هامة ج بين قيمة محدد مصفوفة ووجود معكوس لها.

مبرهنة (٢ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحتوي على صف (أو عمود) صفري فإن $\det A = 0$.

البرهان

عند حساب $\det A$ باستخدام الصف (أو العمود) الذي جميع عناصره أصفا فإننا نجد بسهولة أن $\det A = 0$. ♦

مبرهنة (٣ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وتحتوي على صفين (أو عمودين) متساويين فإن $\det A = 0$.

البرهان

نثبت المبرهنة عندما تحتوي المصفوفة على صفين متساويين ونترك حالة تساوي العمودين لأنها تشبه الحالة الأولى. وسنقدم البرهان بالإستقراء الرياضي على n .

إذا كان $n = 2$ فإن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$. ومن ثم فإن :

$$\det A = a_{11}\, a_{12} - a_{11}\, a_{12} = 0$$

نفرض الآن صحة العبارة عندما $n = k \geq 2$ ونريد إثباتها عندما $n = k + 1 \geq 3$.

لنفرض أن الصفين المتساويين هما الصف ℓ والصف j . ثم نختار i بحيث يكون $\ell \neq i$ و $i \neq j$ ، بإستخدام الصف i لحساب المحدد نحصل على :

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

لاحظ أن كل مصفوفة من المصفوفات A_{ij} تحتوي على صفين متساويين ودرجة كل منها هي k. ولذا باستخدام فرضية الإستقراء نجد أن $\det A_{ij} = 0$.

وبالتالي فإن $\det A = 0$ ، مما يثبت خطوة الإستقراء وينهي البرهان. ♦

مبرهنة (٤ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية (أو سفلية) من الدرجة n فإن $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n .

عندما $n = 2$ يكون لدينا $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$. ولذا فإن :

$$\det A = a_{11}a_{22} - 0a_{12} = a_{11}a_{22}\,.$$

ومن ثم فإن العبارة صحيحة عندما يكون $n = 2$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة للمصفوفات من الدرجة k .

لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية علوية من الدرجة $k+1$. عندئذٍ $\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} = a_{11} \det A_{11}$.

حيث $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية علوية من الدرجة k .

وبالتالي نجد بإستخدام فرضية الاستقراء أن :

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{(k+1)(k+1)}\,. \quad \blacklozenge$$

نتيجة (٥ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

البرهان

إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن A مصفوفة مثلثية وبالتالي فإننا نحصل على النتيجة بتطبيق المبرهنة (٤ ، ٢). ♦

نتيجة (٦ ، ٢)

إذا كانت I هي المصفوفة المحايدة فإن $\det I = 1$.

البرهان

المصفوفة المحايدة I هي مصفوفة قطرية فيها

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1 .$$

ولذا فإن : $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} = 1$. ♦

مبرهنة (٧ ، ٢)

إذا كانت
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
وكانت

$$\left(B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & ca_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & ca_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & ca_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ أو } \right) \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{ij} & \dots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث c عدد ثابت فإن $\det B = c \det A$.

(وبعبارة أخرى، إذا ضربنا أحد صفوف (أعمدة) المصفوفة بعدد فإن محدد المصفوفة الناتجة يضرب بذلك العدد).

البرهان

إذا حسبنا $\det B$ باستخدام العمود i نجد أن :

$$\det B = (-1)^{i+1} ca_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{i+2} ca_{i2} \det B_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} ca_{in} \det B_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} ca_{ij} \det B_{ij} = c \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

وذلك لأن $A_{ij} = B_{ij}$ لكل j . إذن ، $\det B = c \det A$. ◆

مثال (٥ ، ٢)

احسب $\det A$ حيث $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 24 & 12 & 36 \end{bmatrix}$.

الحل

$$\det A = 3\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 24 & 12 & 36 \end{bmatrix} = (3)(4)\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 24 & 12 & 36 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(4)(12)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 144(5-2+0) = (144)(3)$$

إذن ، $\det A = 432$. □

مثال (٦ ، ٢)

احسب $\det A$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -7 & 8 \\ -4 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$.

الحل

$$\det A = (-2)\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -7 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = (-2)(0) = 0 \text{ . } \square$$

يمكن تعميم المثال (٦ ، ٢) كالتالي :

نتيجة (٨ ، ٢)

إذا كان أحد الصفوف (الأعمدة) في المصفوفة A مضاعفا لصف آخر (أو عمود آخر) فإن $\det A = 0$.

البرهان

نستخدم المبرهنتين (٣ ،٢) و (٧ ،٢) لنحصل على المطلوب . ♦

مبرهنة (٩ ، ٢)

إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بتبديل صفين (أو عمودين) فإن $\det B = -\det A$. (وبعبارة أخرى، تتغير إشارة محدد المصفوفة إذا بدلنا بين أي صفين (أو عمودين) فيها).

البرهان

لنفرض أننا حصلنا على المصفوفة B من المصفوفة A بتبديل صفين من صفوف A .

إذا كان $n = 2$ فإن : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$. إذن :

$$\det B = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\det A$$

إذا كان $n > 2$ فإننا نستخدم الصف i لحساب $\det B$ (على افتراض أن الصف i ليس أحد الصفين المبدلين) لنحصل على :

$$\det B = (-1)^{i+1} a_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det B_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det B_{in}$$

لاحظ أن B_{ij} هي المصفوفة التي نحصل عليها من A_{ij} بتبديل صفين.

إذا كان $n = 3$ فإن B_{ij} من الدرجة 2 وباستخدام الحالة $n = 2$ نجد أن

$\det B = -\det A$. أما إذا كان $n > 3$ فإننا نكرر الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحالة $n = 2$. إن برهان حالة تبديل عمودين يشبه حالة تبديل صفين . ♦

المبرهنة الآتية ذات أهمية كبرى عند حساب محدد مصفوفة ، إذا إنها تبين أن محدد مصفوفة A لا يتغير عند ضرب أحد الصفوف (الأعمدة) بعدد ثم إضافته إلى صف (عمود) آخر الأمر الذي يسهل إلى حد كبير حساب محدد المصفوفة .

مبرهنة (١٠ ، ٢)

إذا حصلنا على المصفوفة B من المصفوفة A بضرب أحد الصفوف (أو الأعمدة) بعدد ثم إضافة الناتج إلى صف (أو عمود) آخر فإن $\det A = \det B$.

البرهان

سنبرهن حالة الصفوف ونترك حالة الأعمدة كتمرين للقارئ .

لنفرض أن الصف i في المصفوفة B هو :

$$(b_{i1}, \ldots, b_{in}) = (ca_{k1} + a_{i1}, \ldots, ca_{kn} + a_{in})$$

حيث c عدد ثابت. إذا حسبنا $\det B$ باستخدام الصف i فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned}
\det B &= (-1)^{i+1}(ca_{k1} + a_{i1})\det B_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n}(ca_{kn} + a_{in})\det B_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(ca_{kj} + a_{ij})\det B_{ij} \\
&= c\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\det B_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det B_{ij} \\
&= c\det D + \det A
\end{aligned}$$

حيث D هي المصفوفة التي نحصل عليها من A باستبدال الصف i بالصف k .
أي أن المصفوفة D تحتوي على صفين متساويين هما i و k . إذن ، $\det D = 0$.
وبالتالي فإن : $\det B = \det A$. ♦

ملحوظة

بالاستعانة بالمبرهنتين (٩ ، ٢) و (١٠ ، ٢) والعمليات الصفية الأولية نستطيع وضع محدد مصفوفة على صورة محدد مصفوفة مثلثية ولذا يسهل علينا حساب المحدد دون اللجوء إلى التعريف. نوضح ذلك في المثال التالي :

مثال (٧ ، ٢)

احسب $\det A$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل

(بضرب الصف الأول بـ (2−) وإضافته إلى الصف الثاني وضرب الصف الأول بـ (2) وإضافته إلى الصف الرابع) نحصل على :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

إذن ، $\det A = -(1)(-1)(1)(11) = 11$. □

مثال (٨ ، ٢)

احسب $\det A$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل

بضرب الصف الأول بالعدد 2 وإضافة الناتج للصف الثاني ثم ضرب الصف الثالث بالعدد -2 وإضافة الناتج للصف الرابع نحصل على.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

الآن بضرب الصف الرابع بالعدد -1 وإضافة الناتج إلى الصف الخامس نحصل على :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

إذن ، $\det A = (1)(-1)(1)(1)(2) = -2$. □

ننتقل الآن إلى دراسة العلاقة بين محدد مصفوفة ووجود معكوس لها حيث المبرهنة التالية تقدم لنا الشرط اللازم والكافي لذلك .

مبرهنة (١١ ، ٢)

يكون للمصفوفة المربعة A معكوس ، إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$.

البرهان

لنفرض أن $A \sim B$ حيث B هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A .
باستخدام المبرهنات (٧ ، ٢) ، (٩ ، ٢) و (١٠ ، ٢) نجد أن : $\det B = c \det A$
حيث $c \in \mathbb{R}$. ولذا فإن $\det B \neq 0$ إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$.
الآن إما أن تكون المصفوفة $B = I$ أو أنها تحتوي على صف صفري. ومن ثم نخلص إلى أن $\det A \neq 0$ إذا وفقط إذا كانت $B = I$. أي أن $\det A \neq 0$ إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A معكوس . ♦

في البند القادم سوف نقدم طريقة لإيجاد معكوس مصفوفة في حالة وجوده. أما الآن فإننا نتابع دراسة خواص المحددات.

مبرهنة (١٢ ، ٢)

(١) إذا كانت E مصفوفة أولية فإن $\det E^T = \det E$.

(٢) إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت E مصفوفة أولية فإن :

$$\det(EA) = (\det E)(\det A)$$

(٣) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $\det A^T = \det A$.

(٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n فإن :

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

البرهان

(١) إذا حصلنا على E من المصفوفة المحايدة بضرب صف بعدد غير صفري أو بتبديل صفين فإن $E^T = E$ ولذا فإن $\det E^T = \det E$. أما إذا حصلنا على E من I بضرب الصف i بالعدد الثابت c وإضافة الناتج إلى الصف j فإننا نحصل على E^T بضرب j بالعدد الثابت c وإضافة الناتج إلى الصف i .
الآن بحساب $\det E$ باستخدام الصف i وحساب $\det E^T$ باستخدام الصف j نجد أن $\det E = \det E^T$.

(٢) بما أن E مصفوفة أولية فإن $\det E = c \det I = c$ حيث $c \in \mathbf{R}$. وعندئذ :

$$\det(EA) = \det(cA) = c \det A = (\det E)(\det A)$$

(٣) إذا لم يكن للمصفوفة A معكوس فإن A^T كذلك (لماذا ؟)

لذا نجد أن : $\det A = 0 = \det A^T$

أما إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن لمنقولها A^T معكوساً .

الآن باستخدام المبرهنة (٩ ، ١) نستطيع إيجاد مصفوفات أولية $E_1, E_2, \dots, E_k$ حيث $A = E_1 E_2 \dots E_k$. ولذا فإن ، $A^T = E_k^T \dots E_2^T E_1^T$. إذن ،

$$\det A = \det(E_1 E_2 \dots E_K) = (\det E_1)(\det E_2)\dots(\det E_k)$$

$$= (\det E_1^T)(\det E_2^T)\dots(\det E_k^T) = (\det E_k^T)\dots(\det E_2^T)(\det E_1^T)$$

$$= \det(E_k^T \dots E_2^T E_1^T) = \det A^T$$

(٤) لنفرض أولاً عدم وجود معكوس للمصفوفة A لذا فإن $\det A = 0$.

كذلك ، $A = E_1 E_2 \dots E_k M$ حيث M هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A (لاحظ أن M تحتوي على صف صفري). إذن ،

$$AB = E_1 E_2 \dots E_k MB .$$

ولذا فإن ،

$$\det(AB) = (\det E_1) \dots (\det E_k) \det(MB)$$

وبما أن MB مصفوفة تحتوي على صف جميع عناصره أصفارًا فإن $\det(MB) = 0$. إذن ، $\det(AB) = 0$. ولذا فإن ،

$$(\det A)(\det B) = 0 \det B = 0 = \det(AB)$$

نفرض الآن أن للمصفوفة A معكوسًا. عندئذٍ ، باستخدام المبرهنة (٩ ، ١) نستطيع إيجاد مصفوفات أولية. $E_1, E_2, \dots, E_k$ حيث $A = E_1 E_2 \dots E_k$.

ولذا فإن :

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \dots E_k B)$$

$$= (\det E_1)(\det E_2)\dots(\det E_k)(\det B)$$

$$= (\det A)(\det B)$$

ويكون $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ في هذه الحالة أيضًا . ♦

تمارين (٢ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (١٠) احسب قيمة المحدد لكل من المصفوفات مستخدماً خواص المحددات

(١)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(٣)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(٤)
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(٥)
$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(٦)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(٧)
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(٨)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(٩)
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(١٠)
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(١١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = 0$.

(١٢) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & a \\ 0 & a & a & b \\ b & a & a & 0 \\ a & 0 & b & a \end{bmatrix}$ فأثبت أن $\det A = b^2\left(4a^2 - b^2\right)$.

(١٣) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & c & a \\ c & b & b \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = (a+b+c)(a-c)(a+b)$.

(١٤) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = (a^4 - 1)^3$.

(١٥) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فأثبت صحة ما يلي :

(أ) إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

(ب) $\det(A^m) = [\det(A)]^m$ لكل عدد صحيح موجب m .

(ج) $\det(cA) = c^n \det(A)$ حيث c عدد ثابت.

(١٦) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث أن $A^T A = I$ فأثبت أن $\det A = \pm 1$.

(١٧) إذا كان للمصفوفة S معكوس وكان $A = S^{-1}BS$ فأثبت أن $\det A = \det B$.

(١٨) أثبت أن $\det(AB) = \det(BA)$.

(١٩) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 4 بحيث أن $\det A = 3$ فاحسب $\det(5A^2 A^T)$

(٢٠) إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفيًا من الدرجة n فأثبت أن n يجب أن يكون عددًا زوجيًا.

(٢١) إذا كانت كل من المصفوفتين A و B من الدرجة n بحيث أن $\det(A) = 3$ و $\det(B) = -2$ فاحسب $\det(ABA^T B^{-3} A^2 B^T)$.

(٢٢) إذا كان $\det A = 0$ فاحسب $\det(A^3 + 5A^2 + 6A)$.

(٢٣) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث إن $A^3 = I$ فاحسب قيمة $\det A$.

(٢٤) هل صحيح أن $\det(A + B) = \det A + \det B$ ؟

(٢٥) إذا كان $\det(A^2) = 7$ فأثبت أن للمصفوفة A معكوسًا.

(٣ ، ٢) المصفوفة المرافقة

The Adjoint Matrix

لقد سبق وأن قدمنا طريقة لحساب معكوس مصفوفة (إن وجد) باستخدام العمليات الصفية الأولية. في هذا البند، وكما وعدنا، نقدم طريقة أخرى لإيجاد معكوس المصفوفة بالاستعانة بالمحددات.

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإننا كما وضحنا في المبرهنة (١ ، ٢)، نستطيع إيجاد محدد A بضرب عناصر أي صف (أو أي عمود) بمعاملاتها المرافقة ثم جمع الناتج.

إذا قمنا الآن بضرب عناصر صف (أو عمود) بالمعاملات المرافقة لصف (أو عمود) آخر ثم جمعنا الناتج فإن هذا الناتج يكون دائمًا مساويًا للصفر. وهذا هو مضمون المبرهنة التالية :

مبرهنة (١٣ ، ٢)

لتكن A مصفوفة من الدرجة n . عندئذٍ

(١) $a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \ldots + a_{in}C_{kn} = 0$ عندما $i \neq k$.

(٢) $a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \ldots + a_{nj}C_{nk} = 0$ عندما $j \neq k$.

البرهان

سنبرهن الفقرة (١) لأننا نستطيع الحصول على الفقرة (٢) من الفقرة (١) والمبرهنة (١٢ ، ٢).

لنفرض أن B هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A باستبدال الصف k بالصف i . عندئذٍ، تحتوي B على صفين متساويين ولذا فإن $\det B = 0$.
الآن نستخدم الصف k لحساب $\det B$ فنجد أن :

$$\det B = a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \ldots + a_{in}C_{kn}$$

وذلك لأن عناصر الصف k في المصفوفة B هي $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$.

لذلك فإن : $a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \ldots + a_{in}C_{kn} = 0$. ♦

مثال (٩ ، ٢)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن :

$$a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} = (1)(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(4) + (1)(0) + 2(-2) = 0$$

تعريف (٣ ، ٢)

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة n ولتكن $C = [C_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات المرافقة للعناصر a_{ij} . تسمى المصفوفة C^T المصفوفة المرافقة للمصفوفة A (the adjoint of A) ويرمز لها بالرمز adjA .

مثال (١٠ ، ٢)

إذا كانت A هي المصفوفة الواردة في المثال (٩ ، ٢) فإن :

$$C_{11} = -5 \quad , \quad C_{12} = -1 \quad , \quad C_{13} = 3$$
$$C_{21} = 4 \quad , \quad C_{22} = 0 \quad , \quad C_{23} = -2$$
$$C_{31} = -1 \quad , \quad C_{32} = 1 \quad , \quad C_{33} = 1$$

ولذا فإن :

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \quad \square$$

المبرهنة التالية تزودنا بالخاصية الهامة جدًا التي تحققها المصفوفة adjA .

مبرهنة (١٤ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن

$$A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = (\det A)I .$$

البرهان

$$A(\mathrm{adj}A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{n2} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

وباستخدام المبرهنة (١٣ ، ٢) نجد أن :

$$A(\mathrm{adj}A)=\begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \det A \end{bmatrix}=(\det A)I$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $(\mathrm{adj}A)A=(\det A)I$. ولذلك فإن :

$A(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}A)A=(\det A)I$. ♦

في الحالة التي يكون للمصفوفة A معكوس نحصل على :

نتيجة (١٥ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n ولها معكوس فإن $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A)$.

البرهان

بما أن للمصفوفة A معكوسًا فإن $\det A \neq 0$. وباستخدام المبرهنة (١٤، ٢)

، نجد أن :

$$. A\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A\right)=\frac{1}{\det A}A\operatorname{adj}A=\frac{1}{\det A}(\det A)I=I$$

إذن ، $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{adj}A)\ . \ \blacklozenge$$

وها نحن قد وفينا بوعدنا حيث النتيجة (١٥ ، ٢)، تزودنا بطريقة أخرى لإيجاد معكوس مصفوفة(في حالة وجوده).

مثال (١١ ، ٢)

لتكن A هي المصفوفة الواردة في المثال (٩ ، ٢). عندئذٍ نستطيع أن نحسب محدد A لنجد أن $\det A = 2 \neq 0$. ولذا فإن للمصفوفة A معكوسًا. ولقد وجدنا adjA في المثال (١٠ ، ٢) . إذن ،

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{adj}A)=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & 2 & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\ . \ \square$$

تمارين (٣ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٦)، احسب كلاً من A(adjA) ، (adjA)A و detA ثم احسب معكوس المصفوفة (إن وجد).

(١) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & 3\\ 4 & 7 & 5\end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (٦) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(٤ ، ٢) تمارين عامة

Review Exercises

(١) أثبت أن للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معكوسًا لكل قيم θ ثم أحسب A^{-1}.

(٢) إذا كان $\det A = 1$ وكانت جميع عناصر A أعدادًا صحيحة فأثبت أن جميع عناصر A^{-1} أعداد صحيحة أيضًا.

(٣) إذا كان للمصفوفة A معكوس فأثبت أن للمصفوفة $\text{adj}A$ معكوساً كذلك وأن $(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj}(A^{-1})$.

(٤) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n ولها معكوس فأثبت أن $\det[\text{adj}A] = [\det A]^{n-1}$.

(٥) أثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0 .$$

(٦) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكان للمصفوفة B معكوس فأثبت أن $(B^{-1}AB)^m = B^{-1}A^mB$ لكل عدد صحيح موجب m .

(٧) لتكن A هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولتكن $B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots$.

(أ) أحسب B .　　(ب) أثبت أن $A = B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots$.

(٨) لنفرض أن كلاً من A و B مصفوفة من الدرجة n حيث A متماثلة و B متماثلة تخالفيًا. بيّن أيا من المصفوفات التالية متماثلة وأيها متماثلة تخالفيًا :

$$AB + BA \,,\, AB - BA \,,\, A^2 \,,\, B^2 \,,\, A^m B^k A^m .$$

(٩) لتكن كل من X و Y مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ ولتكن $A = X\,Y^T - Y\,X^T$.

(أ) أثبت أن A متماثلة تخالفيًا.　　(ب) أثبت أن $X^T Y = Y^T X$.

(ج) إذا كانت $X^T X = Y^T Y = [1]$ وكان $X^T Y = Y^T X = [k]$ فأثبت أن : $A^3 = (k^2 - 1)A$.

(١٠) عين قيم x التي تجعل للمصفوفة A معكوسًا حيث

$$A=\begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

(١١) ليكن لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix} b+8c & 2c-2b & 4b-4c\\ 4c-4a & c+8b & 2a-2c\\ 2b-2a & 4a-4b & a+8b\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

احسب كلاً من :

(أ) B^{-1} (ب) $B^{-1}AB$ (ج) $\det A$

(١٢) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & x & b & c\\ a^2 & x^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & x^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(x-a)(x-b)(x-c)(a-c)(c-a).$$

(١٣) حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a\\ a & x & a & a\\ a & a & x & a\\ a & a & a & x\end{vmatrix}=0.$$

(١٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n فأثبت أن :

$$\begin{vmatrix} A & B\\ B & A\end{vmatrix}=\det(A+B)\ \det(A-B).$$

(١٥) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $\det(AB^T)=-2$ وكان ،

$(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ فعين A ثم احسب $\det(B)$.

(١٦) لتكن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

احسب المصفوفة $A^2 - 4A + 4I$ واستخدم ذلك لإيجاد A^{-1} (إن أمكن).

(١٧) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فأثبت أن : $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A$.

(١٨) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n حيث

$\det(B) = -\det(A) = -2$ فاحسب $\det(A^2 B^{-1} A^T B^3)$.

(١٩) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3 وكان $\det(A) = 2$ فاحسب كلاً من :

$\det(A^T A^{-1})$, $\det(2A)^{-1}$ و $\det(2A^{-1})$.

(٢٠) إذا كان $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$ وكان للمصفوفة A معكوس فعين A^{-1} بدلالة A .

(٢١) إذا كان للمصفوفة A معكوس ولم يكن للمصفوفة B معكوس فبين فيما إذا كان للمصفوفة $C = \begin{bmatrix} |A| & |B| \\ -1 & |A^{-1}| \end{bmatrix}$ معكوس. وإذا كان كذلك فعين C^{-1} .

(٢٢) إذا كانت A,B,C ثلاث مصفوفات ولم يكن للمصفوفة A معكوس فاحسب :

$\det(AB + A^2C)$.