الباب 3

المقذوفات
Projectiles

في هذا الباب ندرس حركة ما يسمى بالمقذوفات، مثل حركة كرة السلة وهي مندفعة في الهواء إلى السلة لتحقق هدفاً، ومثل حركة قذيفة انطلقت من فوهة مدفع باتجاه أحد الأهداف، وغيرها من المقذوفات. في الواقع فإنه إذا أهملنا مقاومة الهواء للمقذوف فإن مساره لابد أن يرسم منحنى قطع مكافيء كما سنرى.

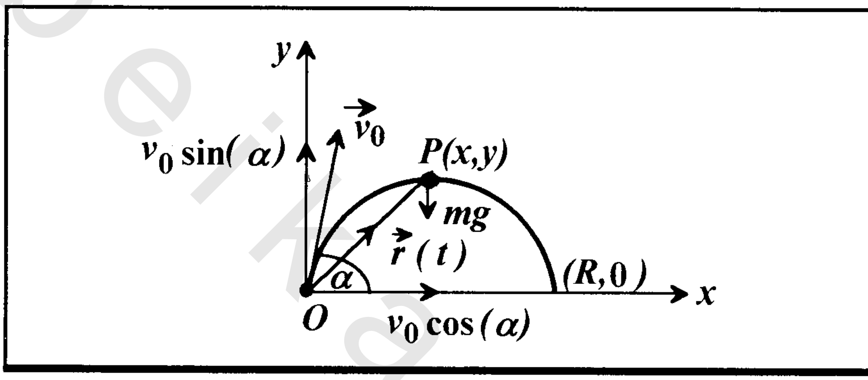
هذا، وسوف ندرس في هذا الباب حركة المقذوفات في حالة وجود قوة وحيدة تؤثر على الحركة ألا وهي قوة وزن المقذوف، بفرض انعدام كل القوى الأخرى التي تؤثر على الحركة بما فيها مقاومة الهواء. نتعامل مع حركة المقذوفات في حالة أن القذف يتم من على مستوى أفقي، وفي حالة أن يتم القذف من على مستوى مائل. نوجد كذلك معادلات أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف، وأقصى سرعة، وأقصى مدى وغيرها من العلاقات الرياضية التي تصف حركة المقذوفات.

3.1 حركة المقذوفات على مستوى أفقي

لنفرض أن قذيفة كتلتها m قد أطلقت من فوهة مدفع بزاوية قذف ابتدائية *(Angle of Elevation)* مقدارها α_0 وبسرعة قذف ابتدائية *(Initial Speed)* v_0. لنختر نظام الإحداثيات الكارتيزية بحيث تكون فوهة المدفع (نقطة القذف) نقطة الأصل $O(0,0)$، ولنفرض أن القذيفة قد وصلت إلى النقطة $P(x,y)$ بعد زمن قدره t ، وبحيث

يكون $\vec{r}(t)$ هو متجه موضعها. نفرض ـ أيضاً ـ أن مقاومه الهـواء في هذه الحالة منعدمة، وأن القـوة الوحيـدة المؤثـرة علـى القذيفـة هـي قـوة الجاذبية الأرضية. انظر شكل (3.1).

شكل
3.1



الآن، نحاول الحصـول علـى شـكل معادلـة الحركـة (المعادلـة (1.18)) للمقـذوف الـذي تمثلـه النقطـة $P(x,y)$، وذلـك عنـد اللحظـة t في المستوى الكارتيزي ـ xy. حيث $\vec{F}$ هـي القـوى المؤثـرة علـى حركـة المقذوف، m هي كتلة المقذوف (القذيفة)، بينما $\vec{a}$ هو متجه العجلة. وحيث أن الحركة تتم في المستوى ـ xy، ولا توجد أية قـوى تؤثـر علـى القذيفة غير قوة وزن القذيفـة mg وتؤثـر رأسياً لأسفل أي في الاتجاه السالب لمحور y (بفرض عدم وجود مقاومة للهواء)، إذن فإن

$$\vec{F} = (0)\hat{i} - (mg)\hat{j}$$

وبالتالي فإن

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg$$

وبما أن متجه العجلة هو

$$\vec{a} = \left(x^{\bullet\bullet}\right)\hat{i} + \left(y^{\bullet\bullet}\right)\hat{j}$$

إذن عجلة القذيفة في اتجاه محور - x هي $a_x = x^{\bullet\bullet}$، وفي اتجاه محور - y هي $a_y = y^{\bullet\bullet}$. إذن معادلات حركة القذيفة هي

$$m\,a_x = F_x \;\Rightarrow\; m\,x^{\bullet\bullet} = 0\;; \tag{3.1}$$

$$m\,a_y = F_y \;\Rightarrow\; m\,y^{\bullet\bullet} = -mg \tag{3.2}$$

وهكذا فكل ما لدينا الآن هما معادلتا الحركة (3.2) ,(3.1) وعلينا استخراج كل المعادلات، والعلاقات التي تصف حركة القذيفة من هاتين المعادلتين آخذين في الاعتبار الشروط الابتدائية عند بدء حركة المقذوف. بقسمة المعادلة رقم (3.1) على m، نجد أن

$$x^{\bullet\bullet} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dx^{\bullet}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; dx^{\bullet} = 0 \tag{3.3}$$

بالتكامل نحصل على

$$\int dx^{\bullet} = C_1 \;\Rightarrow\; x^{\bullet} = C_1 \tag{3.4}$$

ويمكن معرفة ثابت التكامل C_1 من الشروط الابتدائية للحركة أي عندما $t = 0$. بما أن سرعة القذف الابتدائية هي v_0، إذن، وبتحليلها إلى مركبتين متعامدتين في اتجاه المحورين x, y نجد أن سرعة القذف الابتدائية (في بدء الحركة، أي عندما كانت $t = 0$) وفي اتجاه المحورين x, y هما على الترتيب

$$x^{\cdot} = v_0 \cos(\alpha) \quad , \quad y^{\cdot} = v_0 \sin(\alpha); \quad t = 0 \tag{3.5}$$

بالتعويض من (3.5) في (3.4) نجد أن ثابت التكامل يأخذ الصورة

$$v_0 \cos(\alpha) = C_1 \tag{3.6}$$

وبالتعويض في (3.4) نحصل على مركبة السرعة في اتجاه محور ـ x في الصورة

$$x^{\cdot} = v_0 \cos(\alpha) \tag{3.7}$$

بما أن $x^{\cdot} = \dfrac{dx}{dt}$، إذن، بفصل المتغيرات، والتكامل للمعادلة (3.7) نجد أن

$$\int dx = v_0 \cos(\alpha) \int dt + C_3 \tag{3.8}$$

أو

$$x = \left(v_0 \cos(\alpha)\right) t + C_3 \tag{3.9}$$

ولكن عند بدء الحركة، أي عندما كان $t = 0$، فإن القذيفة كانت في نقطة الأصل، أي أن $x = 0$. إذن فإن

$$t = 0 \;\;,\;\; x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; C_3 = 0 \tag{3.10}$$

عندئذٍ نجد ـ بالتعويض من (3.10) في (3.9) ـ أن مركبة متجه موضع القذيفة عند اللحظة t في اتجاه محور ـ x هي

$$\boxed{x = \left(v_0 \cos(\alpha)\right) t} \tag{3.11}$$

أيضاً، بقسمة المعادلة (3.2) على m، والتعويض عن $y^{\cdot\cdot} = \dfrac{dy^{\cdot}}{dt}$، وفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\int dy^{\cdot} = -g\int dt + C_2 \tag{3.12}$$

أو

$$y^{\cdot} = -gt + C_2 \tag{3.13}$$

ويمكن معرفة الثابت C_2 من الشروط الابتدائية للحركة، إذ نجد ـ في بدء الحركة ـ أن

$$t = 0,\; y^{\cdot} = v_0 \sin(\alpha) \;\;\Rightarrow\;\; v_0 \sin(\alpha) = -g \times 0 + C_2$$

إذن

$$C_2 = v_0 \sin(\alpha)$$

وبالتعويض في (3.13) نجد أن

$$y^{\cdot} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \tag{3.14}$$

وبالتعويض عن $y^{\cdot} = \dfrac{dy}{dt}$ في (3.14)، وفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\int dy = -g\int t\, dt + v_0 \sin(\alpha)\int dt + C_4$$

أو

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin(\alpha))t + C_4 \tag{3.15}$$

ولكن، من الشروط الابتدائية لدينا أيضاً

$$t = 0 \;\;,\;\; y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; C_4 = 0$$

إذن

$$y = -\frac{1}{2}g\, t^2 + (v_0 \sin(\alpha))\, t \tag{3.16}$$

وهكذا نجد أنه يمكن بواسطة المعادلتين (3.16) ,(3.11) أن نحدد إحداثيات القذيفة كدوال في الزمن.

3.2 معادلة المسار الكارتيزية للقذيفة
Cartesian Equation of Trajectory

للحصول على ما يسمى معادلة المسار الكارتيزية يتم حذف بارامتر الزمن t من المعادلتين (3.16) ,(3.11). من المعادلة رقم (3.16) نجد أن

$$y+\frac{1}{2}g\,t^{2}=\left(v_{0}\sin(\alpha)\right)t \tag{3.17}$$

بقسمة (3.17) على (3.11) نحصل على

$$\frac{y+\frac{1}{2}g\,t^{2}}{x}=\frac{\left(v_{0}\sin(\alpha)\right)t}{\left(v_{0}\cos(\alpha)\right)t}=\tan(\alpha)$$

أو

$$y=-\frac{1}{2}g\,t^{2}+x\tan(\alpha) \tag{3.18}$$

لكن، من المعادلة (3.11) لدينا

$$t=\frac{x}{v_{0}\cos(\alpha)} \tag{3.19}$$

إذن، وبالتعويض من (3.19) في (3.18) نجد أن معادلة مسار القذيفة في الإحداثيات الكارتيزية هي

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0}\cos(\alpha)}\right)^{2}+x\tan(\alpha) \tag{3.20}$$

أو

$$\boxed{y=\frac{-gx^{2}}{2v_{0}^{2}\cos^{2}(\alpha)}+x\tan(\alpha)} \tag{3.21}$$

في الواقع فإن معادلة المسار (3.21) ما هي إلا معادلة قطع مكافىء

(Parabola) كما سنرى. بضرب المعادلة (3.21) في المعامل $\frac{-2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}$ يمكن وضعها في الصورة

$$\frac{-2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}y = x^2 - \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{g}x$$

أو

$$\frac{-2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}y = x^2 - \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}x \qquad (3.22)$$

وبإكمال المربع في الطرف الأيمن، إذن

$$-\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}y = \left(x - \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right)^2$$

أو

$$-\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}\left[y - \frac{v_0^2\sin^2(2\alpha)}{8g\cos^2(\alpha)}\right] = \left(x - \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 \qquad (3.23)$$

أو

$$-\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}\left[y - \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}\right] = \left(x - \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 \qquad (3.24)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ *(Parabola)* مفتوح لأسفل

(Down-ward Opening Parabola) محوره يوازي محور ـ y ورأسه هي النقطة (h,k)، حيث

$$(h,k)=\left(\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g},\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}\right) \tag{3.25}$$

في الحقيقة فإنه من معادلة المسار وبسبب تماثل القطع المكافيء حول محوره (انظر شكل (3.1)) نجد أن الإحداثي السيني لرأس القطع يمثل نصف المدى، الذي يمكن أن تصل إليه القذيفة على المستوى الأفقي، بينما الإحداثي الصادي يمثل أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه القذيفة. ويمكن التأكد من ذلك بطريقة تحليلية كما سنرى فيما بعد.

3.3 زمن الطيران الكلي للقذيفة
Total Time of the Flight of the Projectile

للحصول على زمن الطيران أو زمن التحليق الكلي في الهواء نضع $y=0$ في المعادلة (3.16)، إذن

$$0=-\frac{1}{2}g\,t^2+\left(v_0\sin(\alpha)\right)t$$

بحل هذه المعادلة نحصل على الجذرين

$$t=0,\quad t=\frac{2v_0\sin(\alpha)}{g} \tag{3.26}$$

وبالطبع فإن $t = 0$ يمثل الزمن في بدء حركة القذيفة عند نقطة الأصل $O(0,0)$، بينما يمثل $t = \dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$ الزمن الكلي الذي استغرقته القذيفة في الطيران حتى وصلت إلى النقطة $(R,0)$، ولذا لنرمز لهذا الزمن الكلي للطيران بالرمز T، أي أن

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \tag{3.27}$$

3.4 مدى القذيفة على المستوى الأفقي
Range of the Projectile

للحصول على المدى الذي وصلت إليه القذيفة على المستوى الأفقي نضع $x = R,\quad t = T$ في المعادلة (3.11). في الواقع فإن T هو الزمن الذي استغرقته القذيفة حتى وصلت إلى النقطة $(R,0)$، وعندها يكون R هو المدى. إذن

$$R = \left(v_0 \cos(\alpha)\right)T = v_0 \cos(\alpha)\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} \tag{3.28}$$

أو

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \tag{3.29}$$

من هذه المعادلة نجد أن المدى يتوقف ويعتمد فقط على زاوية القذف α، وذلك لأن سرعة القذف الابتدائية v_0 ثابتة، كما أن عجلة الجاذبية الأرضية g أيضاً ثابتة.

الأمر الذي يعني أنه للحصول على أقصى مدى *(Maximum Range)* يمكن أن تصل إليه القذيفة ينبغي أن يكون المقدار $\sin(2\alpha)$ أكبر ما يمكن وهذا لن يتأتى إلا إذا كان

$$\sin(2\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

وعندئذٍ فإن أكبر مدى هو

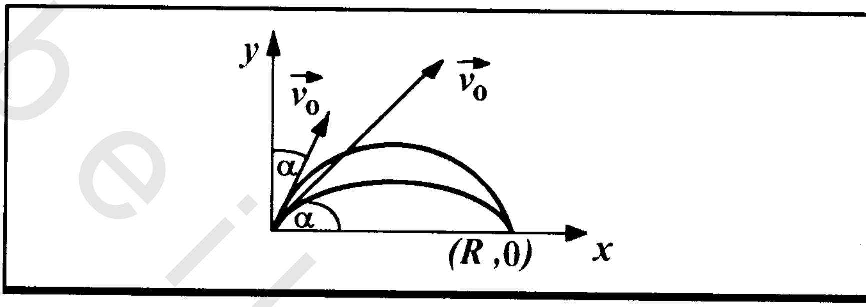
$$R_{\max} = \frac{{v_0}^2}{g} \tag{3.30}$$

كما نلاحظ من المعادلة (3.29)، وبالنظر إلى شكل (3.2)، أنه إذا قذفت قذيفة ما في اتجاهين متساويي الميل الأفقي والرأسي، أي إذا قذفت القذيفة بإحدى زاويتي القذف: $\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha$، وبسرعة قذف واحدة فإن المدى على المستوى الأفقي لايتغير، وذلك لأن

$$R = \frac{{v_0}^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin(\pi - 2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{{v_0}^2}{g}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \qquad (3.31)$$

شكل 3.2



الآن نحاول الحصول على أقصى أرتفاع أو أعلى نقطة على مسار القذيفة.

3.5 أقصى ارتفاع (Maximum Altitude) تصل إليه القذيفة

عندما يساوي الزمن t نصف زمن الطيران الكلي T فإن القذيفة تصل إلى أقصى ارتفاع لها (عند النقطة التي تمثل رأس القطع). إذن، بالتعويض في المعادلة رقم (3.16) عن

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

نحصل على أقصى ارتفاع تصل إلية القذيفة أثناء رحلتها في الهواء من نقطة القذف وحتى تصل إلى النقطة$(R,0)$. لنرمز لأقصى ارتفاع

بالرمز $y_{\max}$، إذن فإن

$$y_{\max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \tag{3.32}$$

وبالتالي فإن أقصى ارتفاع هو

$$\boxed{y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}} \tag{3.33}$$

3.6 دليل مسار القذيفة
Directrix of Trajectory

دليل مسار القذيفة هو دليل القطع المكافئ الذي يمثل مسار القذيفة. وللحصول على معادلة دليل مسار القذيفة نقارن المعادلة رقم (3.24) مع الصورة القياسية للقطع المكافىء الذي محوره يوازي محور ـ y ، ورأسه النقطة (h, k)، أي نقارن المعادلة (3.24) مع المعادلة

$$4a(y - k) = (x - h)^2$$

فنجد أن

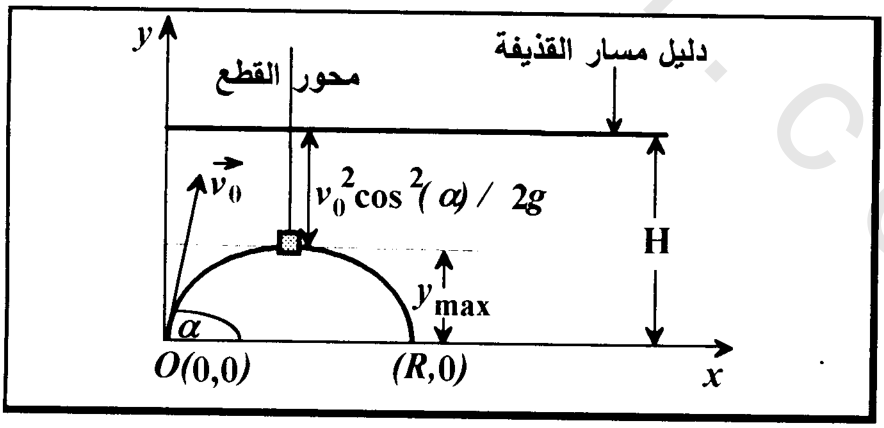
$$4a = -2\frac{[v_0 \cos(\alpha)]^2}{g} \Rightarrow a = -\frac{[v_0 \cos(\alpha)]^2}{2g}$$

وحيث أن معادلة الدليل لهذا القطع هي: $y = -a + k$، إذن، وباستخدام العلاقة (3.25) يمكن أن نحصل على معادلة دليل مسار القذيفة في الصورة

$$\boxed{y = \frac{[v_0 \cos(\alpha)]^2}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}} \tag{3.34}$$

فإذا رمزنا لبُعد الدليل عن الخط الأفقي المار بنقطة القذف بالرمز H، انظر شكل (3.3)، فيمكن عندئذٍ أن نحصل على

$$H = \frac{v_0^2}{2g}, \quad v_0^2 = 2gH \tag{3.35}$$



شكل 3.3

ملاحظات

(1) معادلة الدليل لاتتوقف على الزاوية α، ولكن على سرعة القذف الابتدائية v_0، الأمر الذي يعني أنه إذا قذفت قذائف مختلفة في اتجاهات مختلفة وبسرعة قذف ابتدائية واحدة فإنها تتتبع مسارات مختلفة ولكن يكون لها نفس الدليل.

(2) إذا قذفت القذيفة رأسياً لأعلى، بمعنى أنه إذا كانت زاوية القذف زاوية قائمة ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)، في هذه الحالة نجد أن $\sin(\alpha) = 1$، وعندئذٍ فإن أقصى ارتفاع، $y_{max} = \frac{{v_0}^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$، تصل إليه القذيفة يصبح في الصورة: $H = \frac{{v_0}^2}{2g} = y_{max}$.

3.7 سرعة القذيفة عند أية نقطة على المسار

للحصول على متجه سرعة القذيفة عند أية نقطة على مسار الحركة، نفرض أن $P(x, y)$ هي أية نقطة على المسار. إذن متجهات الموضع، والسرعة، والعجلة للنقطة $P(x, y)$ هي على الترتيب

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad \vec{v} = x^{\bullet}\hat{i} + y^{\bullet}\hat{j}, \quad \vec{a} = x^{\bullet\bullet}\hat{i} + y^{\bullet\bullet}\hat{j}$$

بالتعويض من المعادلتين (3.16) ,(3.11) نجد أن متجه موضع القذيفة هو

$$\vec{r} = \left[(v_0 \cos(\alpha))\, t\right]\hat{i} + \left[-\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin(\alpha))\, t\right]\hat{j} \qquad (3.36)$$

وبتفاضل هذا المتجه بالنسبة إلى الزمن، أو باستخدام المعادلتين (3.7)، (3.14) نحصل على متجه السرعة للمقذوف عند النقطة $P(x, y)$ في الصورة

$$\vec{v} = (v_0 \cos(\alpha))\hat{i} + (v_0 \sin(\alpha) - g\, t)\hat{j} \qquad (3.37)$$

ولأن متجه السرعة هذا يعتبر دالة في الزمن فلكي نعرِّفه عند النقطة $P(x, y)$ بالتحديد نفرض أن $t = t_P$ عند النقطة $P(x, y)$، إذن

$$\vec{v}_P(t_P) = v_0 \cos(\alpha)\hat{i} + (v_0 \sin(\alpha) - g\, t_P)\hat{j} \qquad (3.38)$$

وبالتالي فإن

$$v_P^2 = {v_0}^2 \cos^2(\alpha) + {v_0}^2 \sin^2(\alpha) - 2 v_0\, g\, t_P \sin(\alpha)$$

$$+ g^2 t_P^2 = {v_0}^2 - 2g\left((v_0 \sin(\alpha)) t_P - \frac{1}{2} g\, t_P^2\right) \qquad (3.39)$$

وعند $t = t_P$ نجد من (3.16) أن

$$y_P = \left(v_0 \sin(\alpha)\right)t_P - \frac{1}{2} g\, t_P^2 \qquad (3.40)$$

وبالتعوض من المعادلات (3.40) ,(3.35) في المعادلة (3.39) نحصل على

$$v_P^2 = 2gH - 2g\, y_P = 2g\left(H - y_P\right) \qquad (3.41)$$

وإذا وضعنا

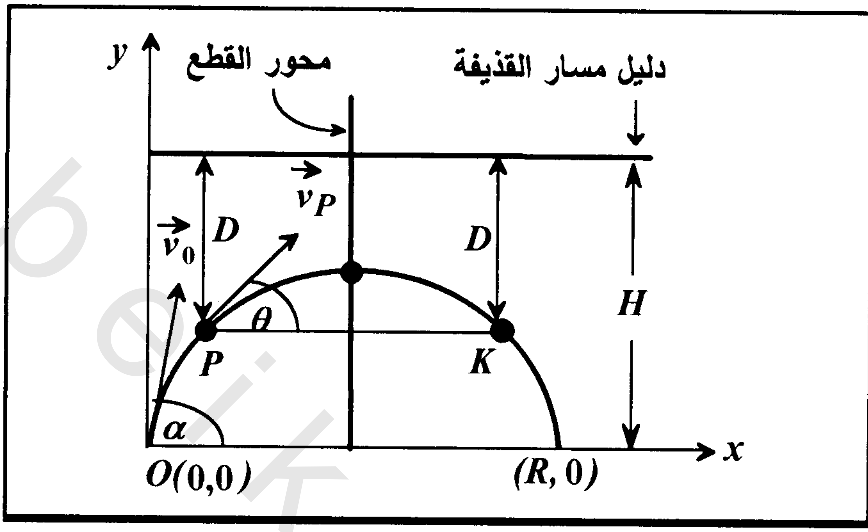
$$H - y_P = D \qquad (3.42)$$

حيث D هو بعد النقطة $P(x, y)$ عن الدليل فإن $v_P^2 = 2gD$. إذن سرعة القذيفة عند النقطة $P(x, y)$ هي

$$v_P = \sqrt{2gD} \qquad (3.43)$$

حيث D هو بعد النقطة $P(x, y)$ عن الدليل. ماذا يعني هذا الكلام؟ يعني أنه لو تركت نقطة مادية أخرى لتسقط رأسياً لأسفل من سكون من نقطة على الدليل فإنها تصل إلى الموضع $P(x, y)$ على القطع المكافئ بنفس السرعة v_P (سرعة القذيفة عند $P(x, y)$). وحيث أن $v = \sqrt{2gD}$ فهذا يعني ـ أيضًا ـ أن سرعة القذيفة يمكن أن تعطى بدلالة بعدها الرأسي عن المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. على ذلك فإن سرعة القذيفة عند أي موضعين على خط أفقي واحد لها نفس المقدار. فمثلاً النقطتان $P(x, y), K(x, y)$ تبعدان نفس المسافة D من الدليل، ولهذا فإن $v_P = v_q$. انظر شكل (3.4).

شكل 3.4



بالنسبة إلى اتجاه السرعة فإنه من المعروف أن اتجاه السرعة هو ـ دائماً ـ في اتجاه المماس. فإذا كان متجه السرعة يميل على الأفقي بزاوية θ فإن ظل زاوية ميلها على الأفقي يعطى بالعلاقة

$$\tan(\theta) = \frac{y^\bullet}{x^\bullet} = \frac{v_0 \sin(\alpha) - gt}{v_0 \cos(\alpha)} \tag{3.44}$$

وجدنا من (3.7) أن المركبة الأفقية لسرعة القذيفة عند أي موضع تكون ثابتة، وذلك لأن السرعة الابتدائية v_0 ثابتة، كما أن زاوية القذف α ـ أيضاً ـ ثابتة، بمعنى أن

$$x^\bullet = v_0 \cos(\alpha) = \text{constant} \tag{3.45}$$

وعليه فإن المركبة الأفقية لسرعة القذيفة عند أية نقطة $P(x,y)$ هي - أيضاً - ثابتة وتساوي الثابت المعطى في المعادلة (3.45)، أي أن

$$x^{\bullet} = v_P \cos(\theta) = v_0 \cos(\alpha) \tag{3.46}$$

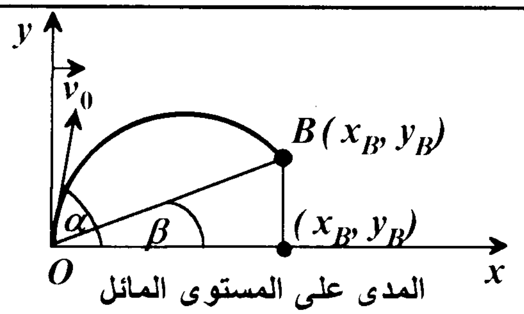
حيث θ هي الزاوية التي يصنعها المماس لمسار القذيفة عند النقطة $P(x,y)$. استناداً لهذه المعلومة يمكن الآن الحصول على الزاوية θ بدلالة الزاوية α كما يلي

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{v_0 \cos(\alpha)}{v_P}\right)} \tag{3.47}$$

3.8 المدى على مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية β

لنفرض أن المستوى الذي يتم من علية القذف ليس أفقياً ولكنه مائل يميل على الأفقي بزاوية β. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن إذا كان OB هو خط أكبر ميل للمستوى المائل، والذي تتم من فوقه عملية القذف، فما هو المدى على هذا المستوى المائل ؟ انظر شكل (3.5). أيضاً كيف يمكن الحصول علي أكبر مدى؟ وما هي - بصفة عامة - خصائص القذف على المستوى المائل، وفيما تختلف عن القذف من على المستوى الأفقي؟

شكل 3.5



بالتأكيد فإن المدى على المستوى المائل هو المسافة OB. وللحصول على هذا المدى OB، دعنا نبدأ كما يلي. من الرسم في شكل (3.5) نجد أن

$$\cos(\beta) = \frac{x_B}{OB} \Rightarrow OB = \frac{x_B}{\cos(\beta)} \tag{3.48}$$

أيضاً فإن معادلة المسار (3.21) عند النقطة (x_B, y_B) تأخذ الصورة الرياضية

$$y_B = (x_B)\tan(\alpha) - \frac{g(x_B)^2}{2v_0{}^2\cos^2(\alpha)} \tag{3.49}$$

من شكل (3.5) نجد أن

$$y_B = x_B \tan(\beta) \tag{3.50}$$

بحل المعادلتين (3.49) ,(3.50) (عن طريق التعويض من (3.50) في المعادلة (3.49)) نحصل على إحداثيات النقطة $B(x_B, y_B)$، حيث

نجد أن

$$x_B \tan(\beta) = x_B \tan(\alpha) - \frac{g(x_B)^2}{2{v_0}^2 \cos^2(\alpha)} \tag{3.51}$$

وبالقسمة على $x_B \neq 0$ نحصل على

$$\frac{g x_B}{2{v_0}^2 \cos^2(\alpha)} = \tan(\alpha) - \tan(\beta) \tag{3.52}$$

وهكذا نجد أن

$$x_B = \frac{2{v_0}^2 \cos^2(\alpha)}{g}\left[\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right] \tag{3.53}$$

بالتعويض من (3.53) في (3.48) يمكن أن نحصل على المدى على المستوى المائل في الصورة الرياضية

$$OB = \frac{2{v_0}^2 \cos^2(\alpha)}{g \cos(\beta)}\left(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right)$$

$$= \frac{2{v_0}^2 \cos^2(\alpha)}{g \cos(\beta)}\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right) \tag{3.54}$$

أو

$$OB = \frac{{v_0}^2}{g}\left[\frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} - \frac{2\cos^2(\alpha)\sin(\beta)}{\cos^2(\beta)}\right]$$

$$= \frac{{v_0}^2}{g} \sec^2(\beta)\left[\sin(2\alpha)\cos(\beta) - 2\cos^2(\alpha)\sin(\beta)\right] \qquad (3.55)$$

أو

$$OB = \frac{{v_0}^2}{g} \sec^2(\beta) \times$$

$$\times\left[\sin(2\alpha)\cos(\beta) - \left(\cos(2\alpha)+1\right)\sin(\beta)\right] \qquad (3.56)$$

وهكذا نحصل على المدى على المستوى المائل، والذي نرمز له بالرمز $\tilde{R}$ حيث يأخذ الصورة الرياضية

$$\tilde{R} = \frac{{v_0}^2}{g} \sec^2(\beta)\left(\sin(2\alpha - \beta) - \sin(\beta)\right) \qquad (3.57)$$

لاحظ أننا قد استخدمنا العلاقات المثلثية الآتية

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha)+1\right);$$

$$\sin(2\alpha - \beta) = \sin(2\alpha)\cos(\beta) - \cos(2\alpha)\sin(\beta)$$

في عمليات الحصول على المعادلة (3.57). هذا، وللحصول ـ الآن ـ على أكبر مدى على المستوى المائل نضع

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

وعندها فإن أقصى مدى يعطى من

$$\tilde{R}_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sec^2(\beta)\left(1-\sin(\beta)\right) = \frac{v_0^2}{g}\frac{\left(1-\sin(\beta)\right)}{\left(1-\sin^2(\beta)\right)} \qquad (3.58)$$

أو

$$\tilde{R}_{\max} = \frac{v_0^2}{g\left(1+\sin(\beta)\right)} = \frac{2H}{1+\sin(\beta)} \qquad (3.59)$$

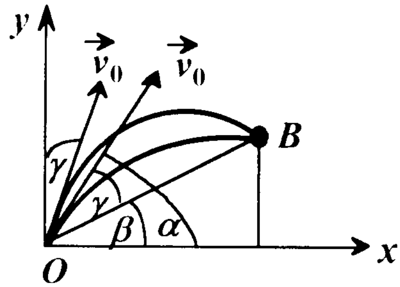
حيث H هو بعد الدليل لمسار القذيفة عن المستوى الأفقي المار بنقطة القذف (انظر معادلة رقم (3.35)).

3.9 خواص المدى على مستوى مائل

في هذا الفصل سنجيب عن سؤالين على قدر كبير من الأهمية بالنسبة للقذف على المستوى المائل. لنفرض أن المستوى الذي يتم من علية القذف يميل على الأفقي بزاوية β.

والسؤال الأول الذي يطرح نفسه الآن هو: هل إذا قذفت قذيفة معينة بنفس السرعة الابتدائية v_0 في اتجاهين يصنعان نفس الزاوية γ مثلاً مع خط أكبر ميل OB، والرأسي (محور - y) فإن المدى على هذا المستوى المائل يتغير؟ انظر شكل (3.5).

شكل 3.6



للإجابة عن هذا السؤال نوجد المدى على المستوى المائل في الحالتين. الحالة الأولى اتجاه القذف يصنع الزاوية γ مع خط أكبر ميل للمستوى المائل، والحالة الثانية اتجاه القذف يصنع الزاوية γ مثلاً مع محور y. لنفرض أن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة الابتدائية في الحالة الأولى مع الأفقي هي الزاوية α. إذن فإن المدى على المستوى المائل في الحالة الأولى يعطى من (3.57) في الصورة الرياضية

$$\tilde{R} = \frac{{v_0}^2}{g} \sec^2(\beta)\left(\sin(2\alpha - \beta) - \sin(\beta)\right)$$

في الحالة الثانية نجد أن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة الابتدائية مع الأفقي هي الزاوية $\frac{\pi}{2} - \gamma$، وبما أن $\alpha = \gamma + \beta$، إذن فإن

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)$$

وعندئذٍ فإن المدى على المستوى المائل في الحالة الثانية نحصل عليه باستبدال الزاوية $\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)$ بالزاوية α في (3.57) فنحصل على

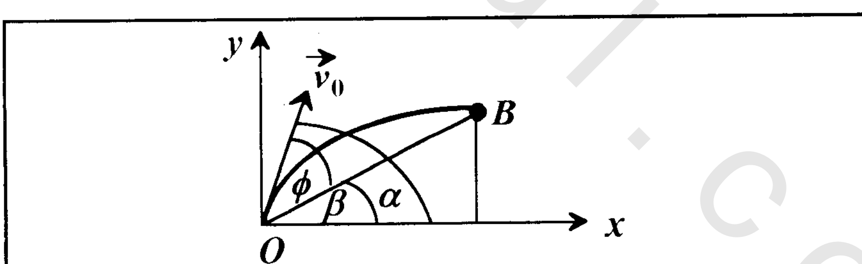
$$\tilde{R}=\frac{{v_0}^2}{g}\sec^2(\beta)\left(\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)-\beta\right)-\sin(\beta)\right)$$

$$=\frac{{v_0}^2}{g}\sec^2(\beta)\left(\sin(\pi-2\alpha+\beta)-\sin(\beta)\right)$$

أو

$$\tilde{R}=\frac{{v_0}^2}{g}\sec^2(\beta)\left(\sin(2\alpha-\beta)-\sin(\beta)\right) \tag{3.60}$$

وهي نفس نتيجة الحالة الأول. الآن نجيب عن السؤال الثاني وهو: ما هي قيمة الزاوية التي يجب أن يصنعها اتجاه السرعة الابتدائية مع خط أكبر ميل لكي نحصل على أكبر مدى على المستوى المائل؟ للإجابة نفرض أن اتجاه السرعة الابتدائية يصنع زاوية ϕ مع خط أكبر ميل. انظر شكل (3.7).



شكل 3.7

وللحصول على قيمة الزاوية ϕ التي تعطي أكبر مدى على المستوى المائل، نجد ـ أولاً ـ أننا نحصل على أكبر مدى على المستوى المائل عندما

$$\sin(2\alpha-\beta)=1 \;\Rightarrow\; 2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$$

وبما أن

$$\alpha=\phi+\beta$$

إذن فإن

$$\phi=\alpha-\beta=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$$

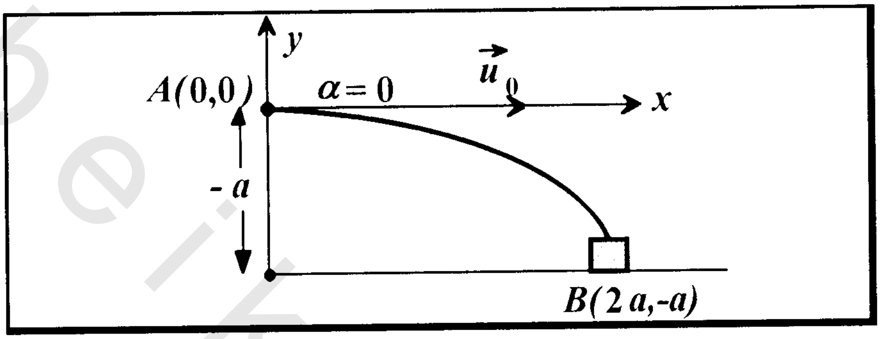
أيضاً، وبما أن الزاوية بين خط أكبر ميل والرأسي هي الزاوية $\frac{\pi}{2}-\beta$، إذن فإن الزاوية ϕ يجب أن تنصف هذه الزاوية حتى نحصل على أكبر مدى، إذ أن

$$\phi=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

مثال 3.1 أطلقت قذيفة أفقياً من على قمة جبل ارتفاعه a بسرعة u_0 فأصابت هدفاً على الأرض يبعد مسافة $2a$ عن الخط الرأسي المار بنقطة القذف. أوجد زاوية القذف التي إذا أطلقت (من نقطة تلاقي الجبل بالأرض) بها نفس القذيفة بنفس سرعة القذف u_0، فإنها تصيب نفس الهدف.

الحل حل هذه المسألة يتكون من حالتين، الحالة الأولى اعتبار نقطة القذف هي النقطة $A(0,0)$، والحالة الثانية هي اعتبار نقطة القذف النقطة $O(0,0)$.

الحالة الأولى: نطبق معادلة المسار عند النقطة $B(2a,-a)$ باعتبار أن نقطة القذف هي النقطة $A(0,0)$. انظر شكل (3.8).



شكل 3.8

بما أن زاوية القذف هي $\alpha = 0$ لأن القذيفة قد أطلقت أفقياً، إذن فإن معادلة المسار تأخذ الصورة الرياضية

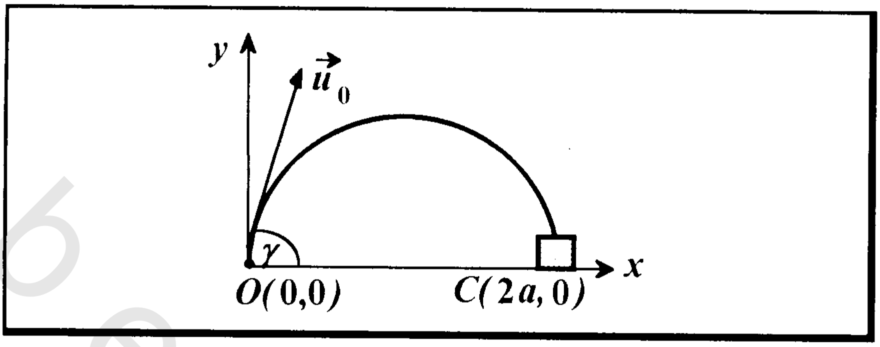
$$-a = 2a\tan(0) - \frac{g(2a)^2}{2u_0^{\,2}\cos^2(0)}$$

ومنها نحصل على

$$u_0^{\,2} = 2ga$$

الحالة الثانية: نطبق معادلة المسار عند النقطة $B(2a,0)$ باعتبار أن نقطة القذف هى نقطة تلاقي الجبل بالأرض أي النقطة $O(0,0)$، وأن زاوية القذف (المطلوب معرفتها) هي الزاوية γ، وسرعة القذف هي نفسها u_0. انظر شكل (3.9).

شكل 3.9



إذن فإن معادلة المسار (بعد التعويض عن $u_0{}^2 = 2ga$) تأخذ الصـورة الرياضية

$$0 = 2a\tan(\gamma) - \frac{g(2a)^2}{2\times 2ga\cdot\cos^2(\gamma)}$$

ومنها نجد أن

$$2\tan(\gamma) - \sec^2(\gamma) = 0$$

أو

$$2\tan(\gamma) - \left(1+\tan^2(\gamma)\right) = 0$$

أو

$$\tan^2(\gamma) - 2\tan(\gamma) + 1 = 0$$

وهكذا، نجد أن

$$\left(\tan(\gamma) - 1\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \tan(\gamma) = 1$$

حيث نحصل على

$$\gamma = \frac{\pi}{4}$$

✍.

مثال 3.2 أوجد مقدار، واتجاه سرعة القذف لقذيفة مداها علـى المسـتوى الأفقـي الذي يمر بنقطة القذف يساوي أقصى ارتفاع لها عن هـذا المسـتوى، ثـم أوجد زاوية القذف الأخرى التي تعطي نفس المدى على نفس المسـتوى. أوجد كذلك زاوية القذف التي تعطـي أكـبر مـدى علـى مسـتوى مـائل زاوية ميله على الأفقي هي β، حيث $\tan(\beta) = \frac{3}{4}$.

الحل نفرض أن أقصى ارتفاع هو h، وبالتالي فإن المدى على المستوى الأفقي هو h أيضاً. إذن، من (3.29) نجد أن

$$h\,g = v_0{}^2 \sin(2\alpha) \tag{i}$$

أيضاً، بما أن أقصى ارتفاع عن المستوى الأفقي يسـاوي h، إذن، مـن العلاقة (3.33) نجد أن

$$2h\,g = v_0{}^2 \sin^2(\alpha) \tag{ii}$$

بقسمة (i) على (ii)، نحصل على

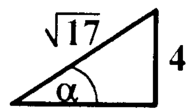
$$\frac{\sin(2\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{2}$$

أو

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan(\alpha) = 4$$

أي أن اتجاه القذف يصنع زاوية مقدارها α مع الخط الأفقي المار بنقطة القذف، أو أن زاوية القذف هي الزاوية α حيث $\alpha = \tan^{-1}(4)$. انظر شكل (3.10).

شكل 3.10



$\tan(\alpha) = 1$

من هذا المثلث نجد أن $\sin(\alpha) = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$. وبالتعويض في معادلة (ii) يمكن أن نحصل على السرعة الابتدائية أو سرعة القذف، حيث نجد أن

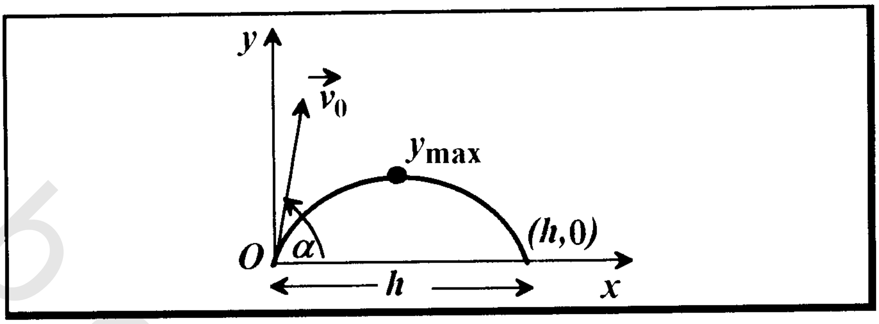
$$v_0{}^2 = \frac{2h\,g}{\sin^2(\alpha)} = \frac{2h \times 32}{\frac{16}{17}} = 68h$$

أو

$$v_0 = 2\sqrt{17h}\ \ ft / \sec$$

وللحصول على زاوية القذف الأخرى التي تعطي نفس المدى على المستوى الأفقي نطبق معادلة المسار (3.21) عند النقطة $(h,0)$، انظر شكل (3.11).

شكل 3.11



إذن

$$0 = h\tan(\alpha) - \frac{(h)^2 \times 32}{2\left(2\sqrt{17h}\right)^2 \cos^2(\alpha)}$$

وبما أن

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \sec^2(\alpha) = \tan^2(\alpha) + 1$$

إذن فإن

$$\tan^2(\alpha) - \frac{17}{4}\tan(\alpha) + 1 = 0$$

أو

$$\left(\tan(\alpha) - 4\right)\left(\tan(\alpha) - \frac{1}{4}\right) = 0$$

وبالتالي فإن

$$\alpha = \tan^{-1}(4), \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

إذن، زاوية القذف الأخرى هي الزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$. ولإيجاد زاوية

القذف التي تعطي أكبر مدى على المستوى المائل. لدينـا مـن (3.57) أن المدى على المستوى المائل هو

$$\tilde{R} = \frac{{v_0}^2}{g}\sec^2(\beta)\left(\sin(2\alpha-\beta)-\sin(\beta)\right)$$

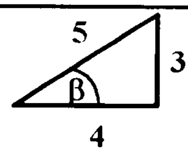
وللحصول على أكبر مدى نضع

$$\sin(2\alpha-\beta)=1 \Rightarrow 2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \ 2\alpha=\frac{\pi}{2}+\beta$$

إذن

$$\sin(2\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos(\beta)$$

وبما أنه من معطيات المسألة لدينا $\tan(\beta)=\frac{3}{4}$، إذن نكون المثلث كما في شكل (3.12).



شكل 3.12

فنجد أن $\cos(\beta)=\frac{4}{5}$، عندئذٍ فإن

$$\sin(2\alpha)=\cos(\beta)=\frac{4}{5}$$

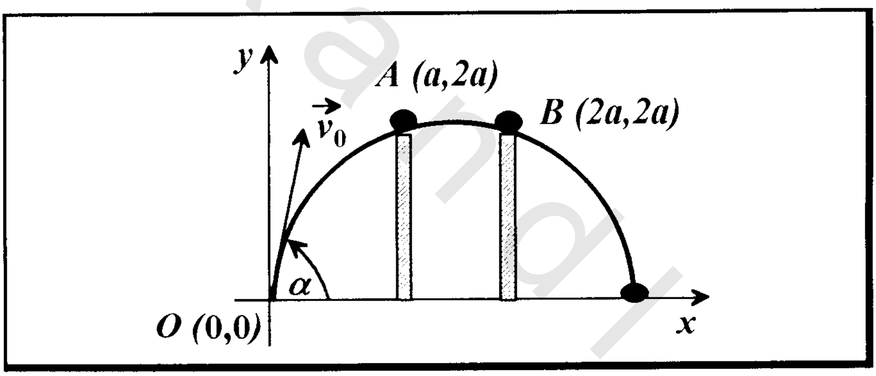
وهكذا نجد أن $\alpha=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

✍.

مثال 3.3 قذفت كرة بحيث تمر فوق حائطين لتمسهما، الحائط الأول ارتفاعه يساوي ارتفاع الحائط الثاني يساوي $2a$، ويقع على بعد أفقي a من نقطة القذف، بينما يقع الحائط الثاني
على بعد أفقي a من الحائط الأول. اثبت ـ تحليلياً ـ أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $3a$.

الحل لنعتبرنقطة القذف نقطة الأصل، وأن الكرة تمر بالنقطتين $A(a,2a),\ B(2a,2a)$. انظر شكل (3.13).

شكل 3.13



بما أن الكرة تمر بالنقطة $(a,2a)$، إذن، بالتعويض في معادلة المسار (3.21) نحصل على

$$2a = a\tan(\alpha) - \frac{ga^2}{2v_0{}^2\cos^2(\alpha)}$$

أو

$$\frac{a\tan(\alpha)-2a}{a^2}=\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)} \qquad \text{(i)}$$

أيضاً بما أن الكرة تمر بالنقطة $(2a,2a)$ إذن، بالتعويض في معادلة المسار (3.21) نحصل على

$$2a=2a\tan(\alpha)-\frac{4ga^2}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}$$

أو

$$\frac{2a\tan(\alpha)-2a}{4a^2}=\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)} \qquad \text{(ii)}$$

من (i), (ii) نجد أن

$$\frac{a\tan(\alpha)-2a}{a^2}=\frac{2a\tan(\alpha)-2a}{4a^2}$$

ومنها

$$\tan(\alpha)=3 \qquad \text{(iii)}$$

إذن، زاوية القذف الابتدائية هي α، حيث $\alpha=\tan^{-1}(3)$. بما أن المدى على المستوى الأفقي يساوي

$$R=\frac{{v_0}^2\sin(2\alpha)}{g}=\frac{2{v_0}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

إذن، بضرب البسط والمقام في $\cos(\alpha)$ نجد أن

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}{g\cos(\alpha)} = \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}\tan(\alpha) \qquad \text{(iv)}$$

ومن المعادلة رقم (i) نجد أن

$$\frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} = \frac{a^2}{a\tan(\alpha) - 2a} \qquad \text{(v)}$$

بالتعويض من (v) .(iii) في (iv) نحصل على

$$R = \frac{3a^2}{a\tan(\alpha) - 2a} = \frac{3a}{3-2} = 3a$$

✍.

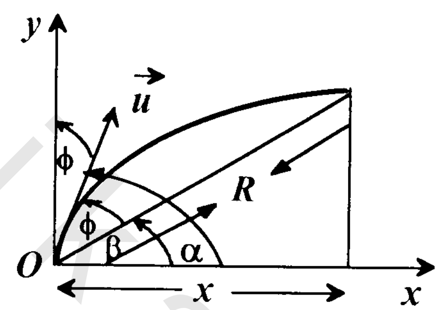
مثال 3.4 إذا كان أكبر مدى لمقذوف على مستوى مائل مقاساً من نقطة القذف يساوي G من الأقدام، وكان زمن الطيران المناظر هذه المسافة هو T، فاثبت أن $G = \frac{1}{2}gT^2$.

الحل لنفرض أن هذا المقذوف قد قذف بسرعة ابتدائية v_0، وزاوية قذف ابتدائية مع الأفقي تساوي α، ولنفرض أن زاوية ميل المستوى المائل على الأفقي هي β.

من فصل (3.8) نجد أن أكبر مدى على المستوى المائل يتحقق عندما

ينصف اتجاه السرعة الابتدائية الزاوية المحصورة بين خط أكبر ميل والرأسي، نفرض أن اتجاه السرعة الابتدائية يصنع مع خط أكبر ميل ومع الرأسي الزاوية ϕ. انظر شكل (3.14).

شكل 3.14



من المعادلة (3.11) نجد أن المسافة الأفقية x التي يقطعها المقذوف بالسرعة الابتدائية v_0، وزاوية قذف مع الأفقي تساوي α في الزمن T هي

$$x = \left(v_0 \cos(\alpha)\right)T \qquad \text{(i)}$$

ولكن، من شكل (3.14) نجد أيضاً أن

$$x = G\cos(\beta) \qquad \text{(ii)}$$

ومن المعادلتين (i), (ii) نجد أن

$$G\cos(\beta) = v_0 \cos(\alpha)T \qquad \text{(iii)}$$

بالتربيع نحصل على

$$G^2 \cos^2(\beta) = v_0^2 \cos^2(\alpha) T^2 \qquad \text{(iv)}$$

ولكن أكبر مدى على المستوى المائل يعطى من (3.59) في الصورة الرياضية

$$G = \frac{v_0^2}{g\left(1 + \sin(\beta)\right)} \qquad \text{(v)}$$

بضرب طرفي المعادلة في (v) في $\cos^2(\beta)$ مع ملاحظة أن

$$\cos^2(\beta) = 1 - \sin^2(\beta) = \left(1 - \sin(\beta)\right)\left(1 + \sin(\beta)\right)$$

نحصل على

$$G \cos^2(\beta) = \frac{v_0^2}{g\left(1 + \sin(\beta)\right)}\left(1 - \sin^2(\beta)\right)$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \sin(\beta)\right) \qquad \text{(vi)}$$

وبما أنه من شكل (3.14) لدينا

$$\sin(\beta) = \cos(2\gamma) \qquad \text{(vii)}$$

إذن، بالتعويض من (vii) في (vi) مع ملاحظة أن

$$\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\gamma)\right)=\sin^2(\gamma)$$

نجد أن

$$G\cos^2(\beta)=\frac{v_0^2}{g}\left(1-\cos(2\gamma)\right)=\frac{2v_0^2}{g}\sin^2(\gamma) \qquad \text{(viii)}$$

وبما أن

$$\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin(\gamma) \qquad \text{(ix)}$$

بالتعويض من (ix) في (viii) نحصل على

$$G\cos^2(\beta)=\frac{2v_0^2}{g}\cos^2(\alpha) \qquad \text{(x)}$$

بضرب طرفي (x) في G نحصل على

$$G^2\cos^2(\beta)=G\frac{2v_0^2}{g}\cos^2(\alpha) \qquad \text{(xi)}$$

من المعادلتين (x) ,(iv) نجد أن

$$G\frac{2v_0^2}{g}\cos^2(\alpha)=v_0^2\cos^2(\alpha)T^2 \qquad \text{(xii)}$$

حيث نحصل منها على

$$G=\frac{1}{2}gT^2$$

✍.

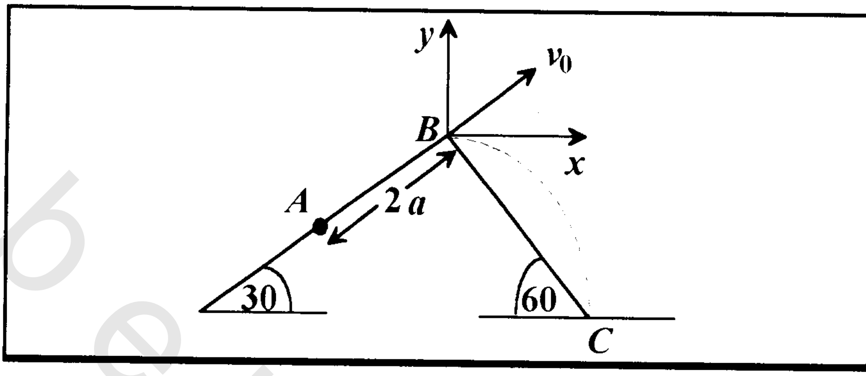
3.10 مسائل

(1) ُأطلق مقذوف أفقياً بسرعة $100\ ft\ /\ \sec$. أوجد موضعه وسرعته بعد مضي خمس ثوان. أوجد ـ أيضاً ـ معادلة المسار.

(2) ُأطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية u لتضرب مستوياً يميل على الأفقي بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وفي اتجاه عمودي عليه. عيّن المدى على المستوى المائل واتجاه القذف الابتدائي.

(3) تطير طائرة بسرعة ثابتة u على ارتفاع ثابت h. إذا ُأطلقت قذيفة من مدفع بسرعة ابتدائية v_0 وذلك عندما كان المستقيم الواصل من الطائرة إلى المدفع يصنع زاوية α مع الأفقي. اثبت أن القذيفة تصيب الطائرة إذا تحقق الشرط: $2u\left(v_0 \cos(\alpha) - u\right)\tan^2(\alpha) = gh$.

(4) يبدأ جسيم الحركة من نقطة A على مستوى مائل أملس AB كما في شكل (3.15) بسرعة $v = \sqrt{3ga}$، وذلك مسافة $AB = 2a$، ثم يواصل حركته بعد ذلك كقذيفة حرة فيصطدم بمستوى مائل BC في النقطة C. أوجد المدى على المستوى المائل وسرعة وصول الجسيم عند النقطة C، كذلك أوجد الزمن المنقضي في الحركة كقذيفة حرة (الزمن من B إلى C).



شكل 3.15

(5) قذفت كرة لتمر فوق حائطين: الأول ارتفاعه 25 قدماً، وعلى بعد أفقي 10 أقدام من نقطة القذف، والحائط الثاني ارتفاعه 10 أقدام وعلى بعد 20 قدماً من نقطة القذف. أوجد اتجاه سرعة القذف الابتدائية، والمدى على المستوى الأفقي.

(6) اثبت أن أقل سرعة يقذف بها جسيم من ارتفاع h لكي يسقط على مستوى أفقي عند نقطة تبعد مسافة أفقية a من نقطة القذف هي

$$\sqrt{g\left(\sqrt{h^2-a^2}-h\right)}$$

(7) اثبت أن أكبر مدى على أي مستوى مائل يساوي $H\sec(\gamma)$، حيث H هو بعد الدليل لمسار القذيفة عن المستوى الأفقي المار بنقطة القذف، كما أن γ هي زاوية ميل السرعة الابتدائية للقذيفة على المستوى المائل.

(8) قذفت كرة من نقطة على الأرض تبعد مسافة أفقية a عن حائط رأسي ارتفاعه b بسرعة مركبتها الأفقية $\sqrt{2ga}$، بحيث تمر بأعلى الحائط. اثبت أن الكرة تصل إلى الأرض في الجهة الأخرى من الحائط على بعد $4b$ منه.

(9) قذف جسيمان A,B من نفس النقطة وفي نفس اللحظة ليتحركا في نفس المستوى الرأسي وبنفس السرعة الابتدائية ولكن في اتجاهين متعامدين. اثبت أنه أثناء الحركة يتحرك الخط الواصل بينهما موازياً لنفسه، وأن المسافة بينهما تزداد بمعدل ثابت. اثبت ـ أيضاً ـ أنه إذا وصل الجسيم A إلى الأرض أولاً يكون الجسيم B قد قطع مسافة أفقية تساوي أربع مرات أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم A.

(10) أطلقت قذيفة في اتجاه يصنع 50° مع الأفقي من نقطة A على منحدر إلى أسفل يميل بزاوية 20° مع الأفقي فاصطدمت به عند نقطة B حيث البعد الأفقي بين نقطتي A, B يساوي 10 أقدام. عيّن سرعة القذف، ومقدار، واتجاه سرعة القذيفة عند نقطة B، والزمن اللازم للوصول إليها.

(11) أطلق مقذوف بسرعة ابتدائية u ، وزاوية قذف ابتدائية α ليصيب هدفاً أرضياً في المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه

لكي يصيب هذا المقذوف هدفاً جوياً على ارتفاع h فوق الهدف الأرضي فإن سرعة الإطلاق الابتدائية يجب أن تكون

$$v = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - \frac{gh}{2\sin^2(\alpha)}}}$$

(12) أوجد شرط إصابة مقذوف انطلق من نقطة الأصل وسرعته الابتدائية v_0 لهدف عند النقطة (a, b).

****