الباب 2

حركة الجسيم في المستوى
Plane Motion of a Particle

موضوع هذا الباب يختص بدراسة علاقة حركة الجسيم في المستوى بالمكان والزمان، أي من وجهة النظر الكيناماتيكية.

وهذه الدراسة تهدف إلى الحصول على العلاقات الرياضية التي تصف مسار الحركة، وتبين كيفية تغير مكان (موضع) الجسيم المتحرك مع الزمن، بدون الخوض في نوعية القوى المسببة لهذه الحركة، ولا في كيفية إحداثها لها.

بكلمات أخرى سنحاول في هذا الباب الحصول على شكل ما يسمى متجه الموضع *(Position Vector)*، وهو ذلك المتجه المسئول عن تحديد مكان الجسيم المتحرك، كما نحصل أيضاً على أشكال متجهات الإزاحة *(Displacement Vector)*، والسرعة *(Velocity Vector)* والعجلة *(Acceleration Vector)*.

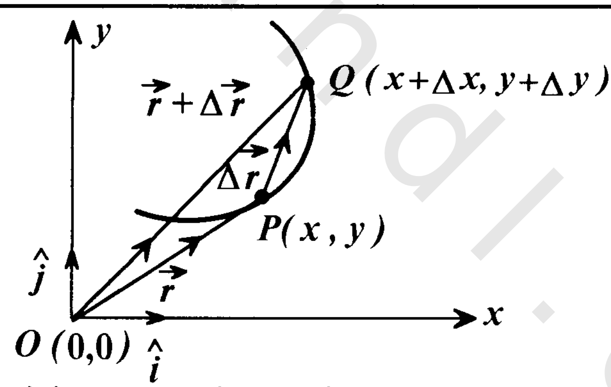
هذا، وستتم هذه الدراسة في ثلاثة أنواع من الإحداثيات هي على الترتيب: الإحداثيات الكارتيزية، القطبية، والذاتية.

2.1 كيناماتيكا الجسيم في الإحداثيات الكارتيزية

في هذا الفصل ندرس حركة جسيم مادي في الفضاء ثنائي الأبعاد R^2 (المستوى)، وذلك في الإحداثيات الكارتيزية (x, y). فنحاول الحصول على شكل متجه الموضع $\vec{r}$ للجسيم، ومن ثم نحصل منه ـ

بإجراء عملية التفاضل ـ على متجه السرعة $\vec{v}$ ، ومتجه العجلة $\vec{a}$.
هذا، وللحصول على متجه الموضع لجسيم كتلته m، ويتحرك في الإحداثيات الكارتيزية (x, y)، نفرض أنه عند اللحظة التي كان عندها الزمن هو t، كان الجسيم موضوعاً في النقطة $P(x, y)$ في المستوى ـ xy. ولنفرض أن هذا الجسيم قد تحرك أو انتقل (أُزيح) تحت تأثير قوة ما فوصل بعد فترة زمنية مقدارها Δt إلى الموضع $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. بمعنى أن الجسيم قد وصل إلى الموضع Q عندما كان الزمن $t + \Delta t$. انظر شكل (2.1).

شكل 2.1



متجهات الموضع والإزاحة في الإحداثيات الكارتيزية في R^2

ُيعرف "متجه موضع" الجسيم المتحرك عند النقطة $P(x, y)$ ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ على أنه المتجه $\overrightarrow{OP}$ كما هو موضح في شكل (2.1). وبالتالي فإن

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{2.1}$$

طول هذا المتجه أو مقداره هو

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.2}$$

أما "متجه الإزاحة" فيعرَّف على أنه المتجه $\vec{PQ}$ ويرمز لـه بـالرمز $\Delta \vec{r}$، حيث نجد من شكل (2.1) أن

$$\Delta \vec{r} = \vec{PQ} = \big((x + \Delta x) - x\big)\hat{i} + \big((y + \Delta y) - y\big)\hat{j}$$

أو

$$\Delta \vec{r} = \Delta x\, \hat{i} + \Delta y\, \hat{j} \tag{2.3}$$

ويكون مقدار متجه الإزاحة هو

$$\Delta r = |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} \tag{2.4}$$

وللحصول على متجه السرعة للجسيم المتحـرك نرمـز لجزء المنحنـى أو المسـافة الـتي تحركها الجسـيم مـن النقطـة P إلى النقطـة Q علـى مسـار حركتـه بـالرمز ΔS، كمـا نرمـز ــ أيضـاً ــ للسـرعة المتوسـطة *(Average Speed)* الـتي تحـرك بهـا الجسـيم المسـافة المنحنيـة ΔS في الفترة الزمنية Δt بالرمز v_{av}. فنجد أن مقدار السرعة المتوسطة هو

$$v_{av.} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{2.5}$$

لكننا نلاحظ من الشكل (2.1) أنه كلما صغرت الفترة الزمنية Δt، كلما صغرت المسافة المنحنية ΔS وكلما صغر أيضاً المقدار الإزاحي Δr بحيث يمكن ـ رياضياً ـ القول أنه في حالة صغر الفترة الزمنية Δt فإن

$$\Delta S \approx \Delta r \; ; \quad \Delta t \to 0 \tag{2.6}$$

في الحقيقة إن وصف حركة الجسيم يكون دقيقاً كلما كان هذا الوصف في اللحيظة أو في أصغر فترة زمنية ممكنة، أي عندما $\Delta t \to 0$. هذا، وللحصول على وصف دقيق لحركة الجسيم بحيث لاتعتمد هذه الحركة على طول الفترة الزمنية Δt، ُنعرِّف ما يسمى "السرعة اللحظية" *(Instant Speed)* والتي نرمز لها بالرمز v، فيكون مقدارها هو

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{2.7}$$

على هذا، فإنه يمكن تعريف متجه السرعة اللحظية أو اختصاراً متجه السرعة في الصورة

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{2.8}$$

باستخدام مفهوم المشتقة الأولى ـ باعتبارها تساوي معدل تغير متغير ما بالنسبة إلى متغير آخر ـ نجد أن متجه السرعة في العلاقة (2.8) يمكن أن يتحول إلى الصورة

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\vec{r}\right)^{\cdot} \tag{2.9}$$

أيضاً بالتعويض في (2.9) عن $\Delta \vec{r}$ كما جاءت في المعادلة (2.3) نحصل على متجه السرعة في الصورة

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \tag{2.10}$$

أو

$$\vec{v} = \left(\vec{r}\right)^{\cdot} = x^{\cdot}\,\hat{i} + y^{\cdot}\,\hat{j} \tag{2.11}$$

حيث $x^{\cdot}$ هي مركبة السرعة في اتجاه محور ـ x، كما أن $y^{\cdot}$ هي المركبة في اتجاه محورـ y. أما $\hat{i}, \hat{j}$ فهما متجها الوحدة في اتجـاه المحاور x, y. ويكون مقدار السرعة عندئذٍ هو

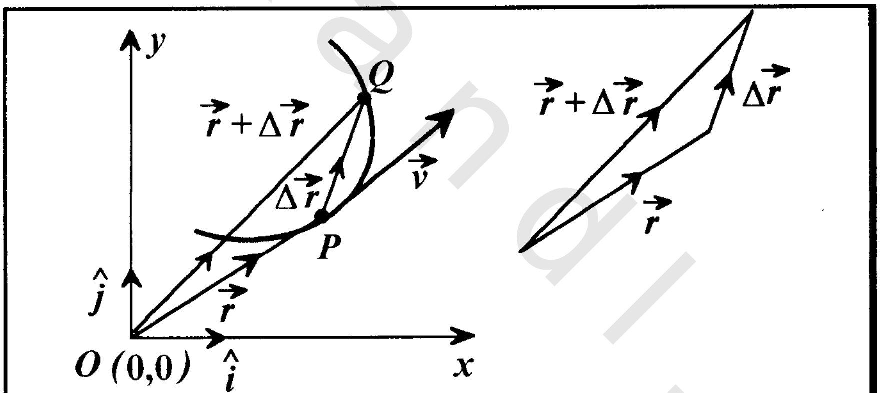
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(x^{\cdot}\right)^2 + \left(y^{\cdot}\right)^2} \tag{2.12}$$

وللحصول على اتجاه السرعة، نفرض أن اتجاه السرعة يصنع الزاوية α مع الاتجاه الموجب لمحور ـ x. إذن، نجد من العلاقة (2.10) أن ظل هذه الزاوية هو

$$\tan(\alpha) = y^{\cdot}/x^{\cdot} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} \tag{2.13}$$

الأمر الذي يعني أن اتجاه السرعة هو نفسه اتجاه المماس لمسار الجسيم عند النقطة $P(x,y)$، وفي اتجاه زيادة $\Delta \vec{r}$. انظر شكل (2.2).

شكل 2.2



متجه السرعة في الإحداثيات الكارتيزية في R^2

فإذا رمزنا ـ الآن ـ لمتجه الوحدة في اتجاه المماس بالرمز $\hat{t}$، فإن متجه السرعة يمكن عندئذٍ أن يأخذ الصورة

$$\vec{v} = v\hat{t} \quad ; \quad \left|\vec{v}\right| = v \tag{2.14}$$

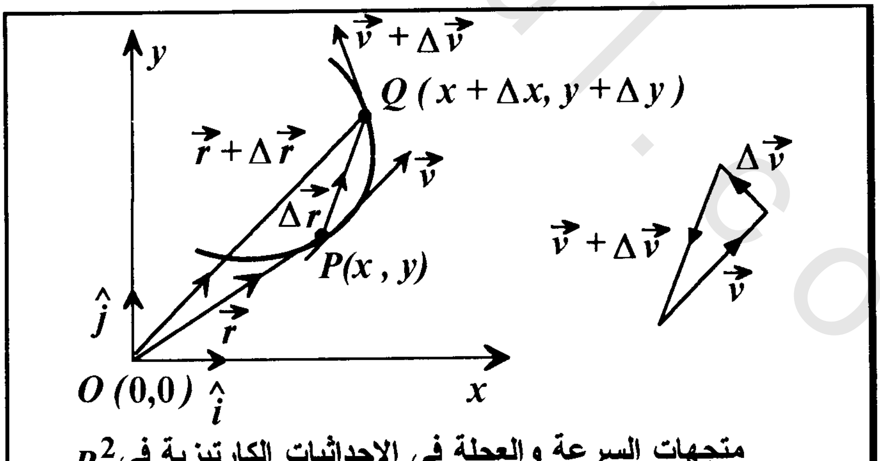
حيث $\hat{t}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المماس في اتجاه الحركة ويمكن الحصول عليه ـ أيضاً ـ من العلاقة

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{x^{\bullet}\hat{i} + y^{\bullet}\hat{j}}{\sqrt{\left(x^{\bullet}\right)^2 + \left(y^{\bullet}\right)^2}} \tag{2.15}$$

أخيراً نحاول الحصول على متجه العجلة $\vec{a}$ لحركة الجسيم في المستوى أو في R^2 في الإحداثيات الكارتيزية، ثم نوجد مقدارها، واتجاهها.

نفرض أن $\vec{v}$ هو متجه السرعة للجسيم عند النقطة P والزمن t، وأن المتجه $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ هو متجه سرعة الجسيم عند النقطة Q والزمن $t + \Delta t$. انظر شكل (2.3).

شكل 2.3



متجهات السرعة والعجلة في الإحداثيات الكارتيزية في R^2

ُيعرف متجه العجلة المتوسطة في الفترة الزمنيـة Δt، ويرمـز لـه بـالرمز $\vec{a}_{av}$ من العلاقة

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2.16}$$

وعندما تؤول Δt إلى الصفر $(\Delta t \to 0)$ فإن متجه العجلـة اللحظيـة أو اختصاراً متجه العجلة يصبح

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\vec{v}\right)^{\cdot} = \left(\vec{r}\right)^{\cdot\cdot} \tag{2.17}$$

أو

$$\vec{a} = x^{\cdot\cdot}\,\hat{i} + y^{\cdot\cdot}\,\hat{j} \tag{2.18}$$

ويكون مقدار العجلة هو

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(x^{\cdot\cdot}\right)^2 + \left(y^{\cdot\cdot}\right)^2} \tag{2.19}$$

واتجاهها يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور ـ x زاوية β، حيث نجد أن ظل هذه الزاوية هو

$$\tan(\beta) = \frac{y^{\cdot\cdot}}{x^{\cdot\cdot}} \tag{2.20}$$

هذا، وللحصول على تحديد دقيق لإتجاه العجلة يتم تحليل العجلة a إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين هما: اتجاه متجه الوحدة المماسي $\hat{t}$، واتجاه متجه الوحدة العمودي للداخل على متجه الوحدة $\hat{t}$، والذي سوف نرمز له بالرمز $\hat{n}$. عندئذٍ يمكن الحصول على المركبة الأولى للعجلة، والتي في اتجاه متجه الوحدة المماسي $\hat{t}$، وتسمى "المركبة المماسية" *(Tangential Component)* ويرمز لها بالرمز (a_t). المركبة الثانية، والتي في اتجاه المتجه العمودي للداخل على متجه الوحدة $\hat{t}$ تسمى "المركبة العمودية" *(Normal Component)*، ويرمز لها بالرمز (a_n).

في هذه الحالة فإن متجه العجلة يأخذ الصورة

$$\boxed{\vec{a} = (a_t)\,\hat{t} + (a_n)\,\hat{n} \;\; ; \;\; a_t = \frac{dv}{dt}} \tag{2.21}$$

حيث نجد أن

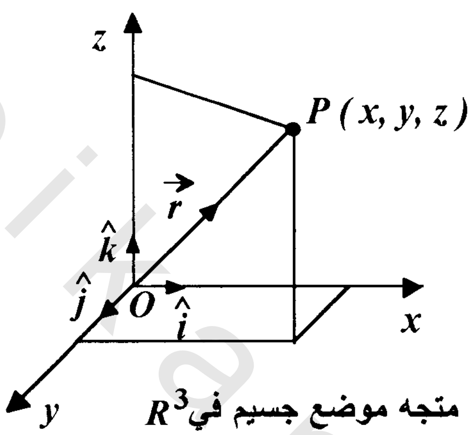
$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \tag{2.22}$$

تعميم

بتعميم نتائج الفصل السابق يمكن الحصول على شكل متجه الإزاحة $\vec{r}$، ومتجه السرعة $\vec{v}$، ومتجه العجلة $\vec{a}$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد ـــ xyz.

بالقياس بحالة المستوى يمكن أن نمثل متجه موضع جسيم أو نقطة مادية $P(x, y, z)$ تتحرك في الفراغ الثلاثي في الإحداثيات الكارتيزية. انظر شكل (2.4).

شكل 2.4



تمثيل متجه موضع جسيم في R^3

واضح من الرسم أن متجه موضع الجسيم أو النقطة المادية المتحركة $P(x, y, z)$ في اللحظة t يمكن أن يمثل في الصورة

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{2.23}$$

حيث

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ويأخذ متجه السرعة عندئذٍ الصورة

$$\vec{v} = x^{\bullet}\,\hat{i} + y^{\bullet}\,\hat{j} + z^{\bullet}\,\hat{k} \tag{2.24}$$

حيث

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(x^{\bullet})^2 + (y^{\bullet})^2 + (z^{\bullet})^2}$$

وحيث

$$x^{\bullet} = \frac{dx}{dt}, \quad y^{\bullet} = \frac{dy}{dt}, \quad z^{\bullet} = \frac{dz}{dt}$$

أما متجه العجلة فيأخذ الصورة

$$\vec{a} = x^{\bullet\bullet}\,\hat{i} + y^{\bullet\bullet}\,\hat{j} + z^{\bullet\bullet}\,\hat{k} \tag{2.25}$$

حيث

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(x^{\bullet\bullet})^2 + (y^{\bullet\bullet})^2 + (z^{\bullet\bullet})^2}$$

وحيث

$$x^{\bullet\bullet} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y^{\bullet\bullet} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z^{\bullet\bullet} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

مثال 2.1 يتحرك جسيم في المستوى الكارتيزي بحيث أن إحداثياته في أية لحظة تعطى من

$$x = 3\cos(t), \; y = 4\sin(t)$$

أوجد عند أية لحظة: معادلة المسار الكارتيزية، وأقل مقدار للعجلة والسرعة عندئذٍ.

الحل معادلة مسار النقطة المادية يمكن الحصول عليها بحذف بارامتر الزمن t من المعادلتين البارامترتين المعطيتين، حيث نجد منهما أن

$$\cos(t)=\frac{x}{3},\ \ \sin(t)=\frac{y}{4}$$

بالتربيع والجمع، نحصل على

$$\cos^2(t)+\sin^2(t)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$$

وبما أنه من قواعد حساب المثلثات لدينا $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$، إذن فإن معادلة المسار هي

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

وهذه معادلة قطع ناقص *(Ellipse)* مركزه نقطة الأصل (0,0)، وطول المحور الكبير *(Major axis)*، والذي يقع على محور ـ y هو 8، وطول المحور الصغير، والذي يقع على محور ـ x هو 6. وللحصول على العجلة نوجد ـ أولاً ـ متجه موضع النقطة المادية. حيث نجد أنه

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}=\left(3\cos(t)\right)\hat{i}+\left(4\sin(t)\right)\hat{j}$$

وبالتالي فإن متجه السرعة يصبح

$$\vec{v} = x^{\bullet}\,\hat{i} + y^{\bullet}\,\hat{j} = \left(-3\sin(t)\right)\hat{i} + \left(4\cos(t)\right)\hat{j}$$

ويكون مقدار السرعة عند أية لحظة هو

$$v = \sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$$

وبتفاضل متجه السرعة $\vec{v}$ - بالنسبة إلى الزمن t - نحصل على متجه العجلة في الصورة

$$\vec{a} = x^{\bullet\bullet}\,\hat{i} + y^{\bullet\bullet}\,\hat{j} = \left(-3\cos(t)\right)\hat{i} + \left(-4\sin(t)\right)\hat{j}$$

وبالتالي فإن العجلة هي

$$a = \sqrt{9\cos^2(t) + 16\sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{9\left(1-\sin^2(t)\right) + 16\sin^2(t)} = \sqrt{9 + 7\sin^2(t)}$$

واضح - الآن - أن أقل مقدار للعجلة يحدث عندما $\sin^2(t) = 0$ أي عندما $\sin(t) = 0$، وبذلك يكون أقل مقدار للعجلة عندما $t = \{0, \pi, 2\pi, \cdots\}$، وفي هذه الحالة فإن مقدار العجلة يصبح $a_{t=0} = 3$. كما أن مقدار السرعة عندئذٍ يكون

$$v_{t=0} = \sqrt{9\sin^2(0) + 16\cos^2(0)} = 4$$

✍ .

مثال 2.2 الإحداثيات الكارتيزية لحركة نقطة مادية تتحرك في المستوى - $x\,y$ هي $x = 3t^2,\ y = 2t$ حيث t هو الزمن. عيَّن متجهات الموضع والسرعة والعجلة، متجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار النقطة المادية، مركبتي عجلة النقطة المادية في اتجاهي المماس والعمودي عليه، متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل.

الحل (1) متجه موضع النقطة المادية هو

$$\vec{r} = 3t^2\,\hat{i} + 2t\,\hat{j} \tag{i}$$

وبتفاضل متجه موضع النقطة المادية، $\vec{r}$ - بالنسبة للزمن - نحصل على متجه السرعة

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (6t)\hat{i} + (2)\hat{j} \tag{ii}$$

ويكون مقدار السرعة هو

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^2 + 1} \tag{iii}$$

وبتفاضل متجه السرعة $\vec{v}$ المعطى في (ii) - بالنسبة للزمن - نحصل على متجه العجلة في الصورة

$$\vec{a} = 6\hat{i} \tag{iv}$$

إذن مقدار العجلة هو

$$a = \sqrt{36} = 6 \tag{v}$$

(2) بما أن متجه الوحدة في اتجاه المماس هو نفسه متجه الوحدة في اتجاه السرعة، وبفرض أن متجه الوحدة في اتجاه المماس هو المتجه $\hat{t}$، وبما أن $\vec{v} = v\hat{t}$ ، إذن فإن

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3t}{\sqrt{9t^2+1}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{9t^2+1}}\hat{j} \tag{vi}$$

(3) بما أن متجه العجلة $\vec{a}$ يمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين، ووضعه في الصورة

$$\vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_n\,\hat{n} \tag{vii}$$

إذن فإن مركبة العجلة في اتجاه المماس يمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة (iii) فنجد أنها

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{9t^2+1}\right) = \frac{18t}{\sqrt{9t^2+1}} \tag{viii}$$

للحصول على مركبة العجلة في اتجاه العمودي للداخل a_n، نجد من (vii) أن

$$a_n^{\,2} = a^2 - a_t^{\,2} \qquad \text{(ix)}$$

وبالتعويض من (v), (viii) في (ix) نجد أن مركبة العجلة a_n في اتجاه العمودي للداخل يمكن الحصول عليها من المعادلة

$$a_n^{\,2} = (6)^2 - \left(\frac{18t}{\sqrt{9t^2+1}}\right)^2 = \frac{36}{9t^2+1}$$

أي أن

$$a_n = \sqrt{\frac{36}{9t^2+1}} = \frac{6}{\sqrt{9t^2+1}} \qquad \text{(x)}$$

(4) للحصول على متجه الوحدة العمودي للداخل على مسار النقطة المادية $\hat{n}$ يتم التعويض عن الكميات $\vec{a}\,,\ \hat{t},\ a_t,\ a_n$ من المعادلات (iv), (vi), (viii), (x) على الترتيب في طرفي المعادلة (vii) فنحصل على

$$6\hat{i} = \frac{18t}{\sqrt{9t^2+1}}\left(\frac{3t}{\sqrt{9t^2+1}}\,\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{9t^2+1}}\,\hat{j}\right) + \frac{6}{\sqrt{9t^2+1}}\ \hat{n}$$

حيث نجد من هذه العلاقة الأخيرة ـ بعد الاختصارات ـ أن متجه الوحدة العمودي هو المتجه

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{9t^2+1}}\,\hat{i} - \frac{3t}{\sqrt{9t^2+1}}\,\hat{j}$$

✍.

2.2 كينماتيكا جسيم في الإحداثيات القطبية

في هذا الفصل ندرس حركة جسيم أو نقطة مادية في الإحداثيات القطبية. نتعرف على أشكال متجهات الموضع والسرعة والعجلة. غير أنه من الضروري هنا ـ أولاً ـ تعريف متجهات الوحدة في الإحداثيات القطبية والتي يرمز لها عادة بالرموز $\hat{u},\ \hat{\theta}$، وذلك على غرار متجهات الوحدة $\hat{i}\,,\hat{j}$ في الإحداثيات الكارتيزية، أيضاً نتعرف على السرعة الزاوية والعجلة الزاوية، وكذلك على المركبتين القطرية والعمودية لمتجهات السرعة والعجلة القطبية.

انتبه!

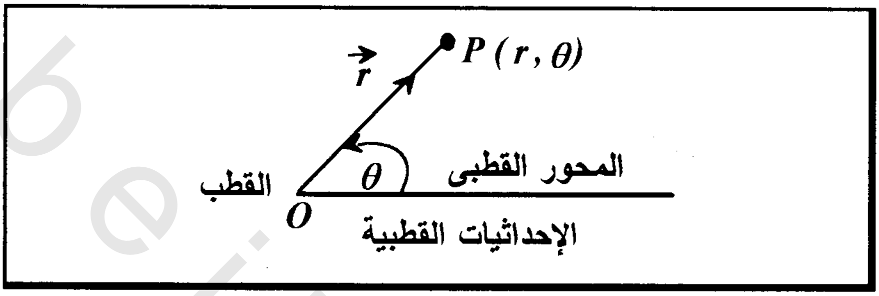
إلى حقيقة أن متجهات الوحدة $\hat{i}\,,\ \hat{j}$ في الإحداثيات الكارتيزية هي متجهات ثابتة في المقدار والاتجاه، أما متجها الوحدة $\hat{u},\ \hat{\theta}$ في الإحداثيات القطبية فهما ثابتان في المقدار ومتغيران في الاتجاه.

2.1 تعريف الإحداثيات القطبية ـ *Polar Coordinates*

تعرَّف الإحداثيات القطبية لأية نقطة مادية أو جسيم مادي P يتحرك في المستوى ـ xy على أنها الإحداثيان (r,θ)، حيث θ هي الزاوية التي يصنعها متجه الموضع $\overrightarrow{OP}$ مع الخط الأفقي الذي يسمى "المحور القطبي" *(Polar Axis)*، والذي يمر بالنقطة الثابتة O، والتي تسمى

"القطب"، أما r فهو مقدار متجه الموضع $\overrightarrow{OP}$. انظر شكل (2.5).

شكل 2.5



✍.

تعريف 2.2 متجهات الوحدة $\hat{u},\ \hat{\theta}$ في الإحداثيات القطبية

ُيعرَّف متجه الوحدة $\hat{u}$ في الإحداثيات القطبية بأنه متجه طوله الوحدة واتجاهه يصنع زاوية مقدارها θ مع المحور القطبي، أما متجه الوحدة $\hat{\theta}$ فهو متجه طوله الوحدة ويصنع زاوية مقدارها $\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ مع المحور القطبي.

✍.

نظرية 2.3 تمثيل متجهات الوحدة القطبية في المستوى ـ xy

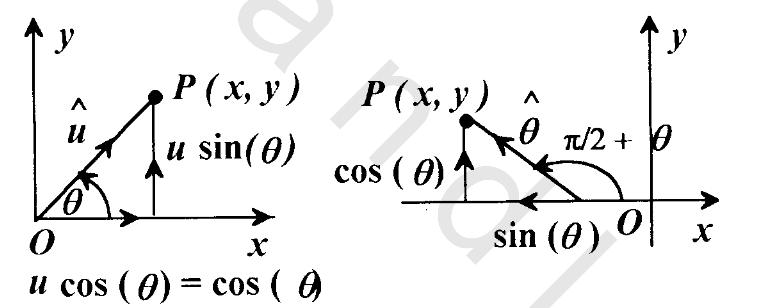
لنفرض أن $\hat{u},\ \hat{\theta}$ هما متجها الوحدة القطبيان، أي في الإحداثيات القطبية، إذن فإنه يمكن تمثيلهما في المستوى ـ xy في الصورة الآتية

$$\begin{cases} \hat{u} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \end{cases} \tag{2.26}$$

الإثبات

نفرض أن $\hat{u}, \hat{\theta}$ هما متجها الوحدة القطبيان. إذن حسب التعريف (2.2) يمكن تمثيلهما في المستوى - xy بغرض الحصول على علاقة بين متجهات الوحدة الكارتيزية $\hat{i}, \hat{j}$ ومتجهات الوحدة القطبية $\hat{u}, \hat{\theta}$. انظر شكل (2.6).

شكل 2.6



متجهات الوحدة $\hat{\theta}$ ، $\hat{u}$ فى الإحداثيات القطبية

حيث نلاحظ من هذا الشكل، أنه بتحليل متجه الوحدة القطبي $\hat{u}$ في اتجاه محور ـ x واتجاه محور ـ y، أو ـ بالأحرى ـ في اتجاه $\hat{i}, \hat{j}$ فإن مركبتيه تصبحان على الترتيب

$$|\hat{u}|\cos(\theta), \ |\hat{u}|\sin(\theta)$$

وبما أن المتجه $\hat{u}$ هو متجه وحدة، أي أن مقداره هو الوحـدة، بمعنـى أن $|\hat{u}| = 1$، إذن فإن هاتين المركبتين تصبحان في الصورة

$$\cos(\theta), \quad \sin(\theta)$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\hat{u} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}} \tag{2.27}$$

بالنسبة للمتجه $\hat{\theta}$ نجـد أن مركبتيـه في عكـس اتجاه محـور x وفي اتجـاه محور ـ y، أو ـ بالأحرى ـ في اتجاه $-\hat{i}\,,\ \hat{j}$ هما على الترتيب

$$|\hat{u}|\sin(\theta), \quad |\hat{u}|\cos(\theta)$$

أو

$$\sin(\theta), \quad \cos(\theta)$$

وذلك لأن $|\hat{u}| = 1$. وبالتالي فإن

$$\boxed{\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}} \tag{2.28}$$

.

انتبه!

إلى المعـادلات رقـم (2.26) حيـث يتضـح أن كـلاً مـن متجهـي الوحـدة $\hat{u}, \hat{\theta}$ يعتبر دالة في الزاوية θ. ولأن الزاوية θ تتغير مع الزمن، إذن فـإن الزاوية θ تعتبر دالـة في الزمـن t، وبالتـالي فـإن المتجهـين $\hat{u}, \hat{\theta}$ يكونـان متغيرين من حيث الاتجاه فقط مع أنهما ثابتان في الطول أو المقدار.

نظرية 2.4 المشتقة الأولى لمتجهات الوحدة القطبية

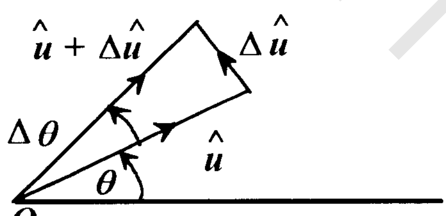
إذا كان المتجهان $\hat{\theta}$,$\hat{u}$ هما متجها الوحدة القطبيان، فإن المشتقات الأولى لهما على الترتيب هي

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{u} \qquad (2.29)$$

البرهان

للحصول على المشتقة الأولى لمتجهات الوحدة القطبية نحاول دراسة كيفية (معدلات) تغيرهما مع الزمن. نفرض أن الزاوية θ تغيرت فأصبحت $\theta + \Delta\theta$ نتيجة لتغير الزمن من t إلى $t + \Delta t$. على ذلك فإن المتجه $\hat{u}$ يتغير أيضاً ليصبح $\hat{u} + \Delta\hat{u}$. انظر شكل (2.7).

شكل 2.7



كيفية تغير متجه الوحدة $\hat{u}$

وبما أنه في حالة صغر الفترة الزمنية Δt فإن متجه الإزاحة $\Delta\hat{u}$ يكون صغيراً جداً، وبالتالي يكون عمودياً ـ بالتقريب ـ على $\hat{u}$. في هذه الحالة

فإن اتجاه $\Delta\hat{u}$ يكون هو نفسه اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$. أما بالنسبة إلى مقداره فنجد من شكل (2.7) أنه في حالة صغر الفترة الزمنية Δt أن

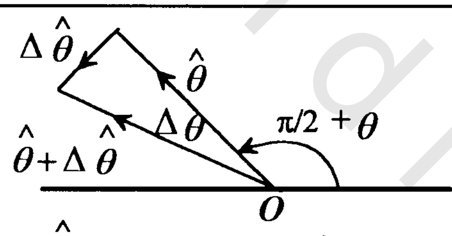
$$|\Delta \hat{u}| \approx \Delta \theta \tag{2.30}$$

وهكذا نجد أن

$$\boxed{\Delta\hat{u} \approx (\Delta\theta)\hat{\theta}} \tag{2.31}$$

أيضاً، إذا تغير الزمن من t إلى $t + \Delta t$، فإن الزاوية θ تتغير لتصبح $\theta + \Delta\theta$، وعلى هذا فالمتجه $\hat{\theta}$ يتغير إلى $\hat{\theta} + \Delta\hat{\theta}$. وفي حالة صغر الفترة الزمنية Δt، فإن المتجه $\Delta\hat{\theta}$ يكون عمودياً على المتجه $\hat{\theta}$ وفي عكس اتجاه المتجه $\hat{u}$. أما مقداره فيساوي $\Delta\theta$. انظر شكل (2.8).

شكل 2.8



كيفية تغير متجه الوحدة $\hat{\theta}$

حيث نجد من هذا الشكل أن

$$\boxed{\Delta\hat{\theta} = (\Delta\theta)(-\hat{u}) = -\Delta\theta\,\hat{u}} \tag{2.32}$$

الآن، يمكن إيجاد المشتقه الأولى لمتجهات الوحدة القطبية $\hat{u}, \hat{\theta}$ بالنسبة للزمن t باستخدام (2.31), (2.32) لنجد أن

$$\frac{d\hat{u}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\theta}=\theta\cdot\hat{\theta} \tag{2.33}$$

كما أن

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{\theta}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta}{\Delta t}\hat{u}=-\theta\cdot\hat{u} \tag{2.34}$$

✍.

تعريف السرعة الزاوية 2.5

تعرف "السرعة الزاوية" *(Angular Velocity)*، ويرمـز لها بـالرمز $\theta^{\bullet}$ بأنها معدل تغير الزاوية θ بالنسبة للزمن t، أي أن

$$\theta^{\bullet}=\frac{d\theta}{dt} \tag{2.35}$$

✍.

فإذا كان معدل تغير الزاوية θ بالنسبه للزمن t ثابتـاً ويسـاوي ω مثـلاً ففـي هـذه الحالـة قـول أن السـرعة الزاويـة منتظمـة أو أن $\theta^{\bullet}=\omega$، وبالتالي فإن

$$\theta^{\bullet}=\omega \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{dt}=\omega \tag{2.36}$$

وهذه الأخيرة معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى من نوع فصـل المتغـيرات *(Seperable Equation)*. بفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\int d\theta = \omega \int dt + c$$

أو

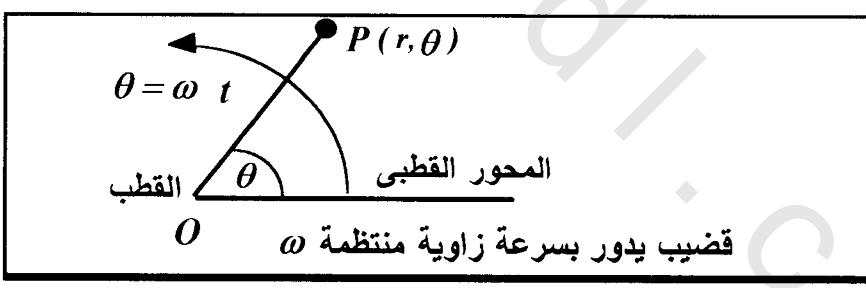
$$\theta = \omega t + c \tag{2.37}$$

وبما أنه عندما كان الزمن t صفراً كانت الزاوية θ صفراً أيضاً، إذن فإن الثابت c يكون صفراً أيضاً، أي أن $c = 0$، إذن فإن

$$\theta = \omega t \tag{2.38}$$

الآن، إذا دار المستقيم OP الزاوية θ في زمن قدره t. انظر شكل (2.9). فعندئذٍ يمكن التعبير عن السرعة الزاوية في الصورة

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{2.39}$$



شكل 2.9

تعريف العجلة الزاوية في الإحداثيات القطبية 2.6

تُعرَّف العجلة الزاوية للنقطة المادية $P(r, \theta)$، ويرمز لها بالرمز $\ddot{\theta}$، بأنها معدل تغير السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ بالنسبة للزمن، أي أن

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{d}{dt}\left(\theta^{\bullet}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.40)$$

ملاحظة

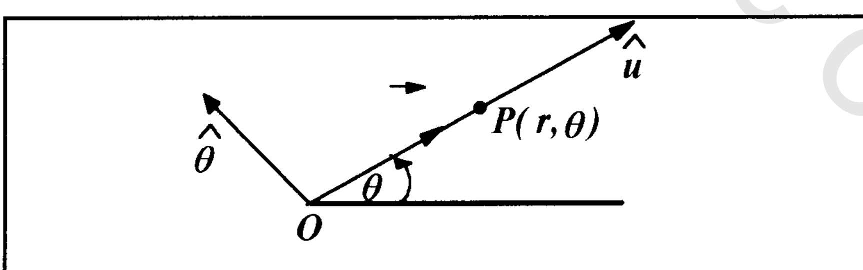
إذا تحركت النقطة المادية $P(r,\theta)$ بسرعة زاوية منتظمة ω فإن العجلة الزاوية في هذه الحالة تساوي صفراً بمعنى أن $\theta^{\bullet\bullet} = 0$.

2.3 متجهات الموضع والسرعة والعجلة القطبية

نفرض أن $P(r,\theta)$ نقطة مادية تتحرك في المستوى بحيث أن إحداثياتها القطبية هي (r,θ). إذن، فإن متجه الموضع لهذه النقطة المادية في الإحداثيات القطبية يمكن تمثيله في الصورة

$$\boxed{\vec{r} = r\,\hat{u}} \qquad (2.41)$$

حيث $r = \left|\vec{r}\right|$ هو مقدار متجه الموضع $\vec{r}$ أما $\hat{u}$ فهو متجه الوحدة في اتجاه يصنع زاوية مقدارها θ مع المحور القطبي. انظر شكل (2.10).



شكل 2.10

أيضاً، فإن متجه السرعة $\vec{v}$ في الإحداثيات القطبية يعرَّف على أنه المشتقة الأولى لمتجه الموضع $\vec{r}$ ، إذن، وباستخدام (2.41) فإن

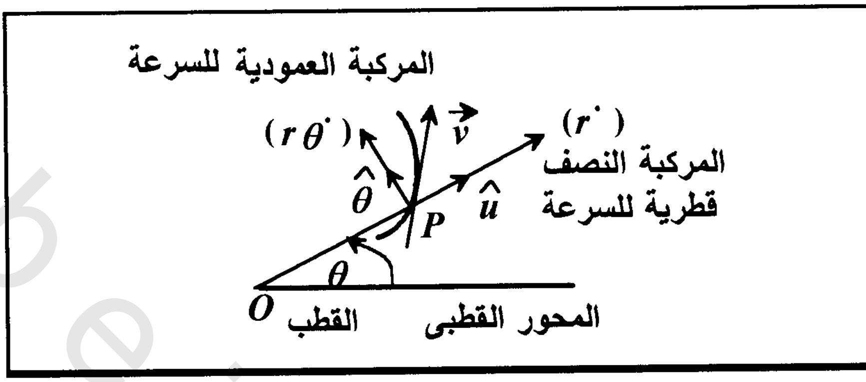
$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{r}\right)^{\cdot} = \left(r\,\hat{u}\right)^{\cdot} = r^{\cdot}\hat{u} + r\left(\hat{u}\right)^{\cdot}} \qquad (2.42)$$

وحيث أنه من المعادلة (2.33) نجد أن $\left(\hat{u}\right)^{\cdot} = \theta^{\cdot}\hat{\theta}$. إذن، بالتعويض في (2.42) فإن متجه السرعة في الإحداثيات القطبية يمكن أن يعطى بدلالة متجهات الوحدة القطبية والسرعة الزاوية ويأخذ الصورة

$$\boxed{\vec{v} = \left(r^{\cdot}\right)\hat{u} + \left(r\,\theta^{\cdot}\right)\hat{\theta}} \qquad (2.43)$$

وهكذا نجد أن لمتجه السرعة في الإحداثيات القطبية أيضاً مركبتين: المركبة الأولى $\left(r^{\cdot}\right)$ في اتجاه متجه الوحدة $\hat{u}$ وتسمى **"المركبة النصف قطرية"** *(Radical Component)*، والمركبة الثانية هي $\left(r\,\theta^{\cdot}\right)$ في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ وتسمى **"المركبة العمودية"** *(Normal Component)*. انظر شكل (2.11).

شكل 2.11



وبالمثل يمكن الحصول على العجلــة المتجهــة $\vec{a}$ في الإحداثيـات القطبيـة وذلك بتفاضل $\vec{v}$ بالنسبه للزمن، إذن

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(r^{\cdot}\right)\hat{u} + \left(r\,\theta^{\cdot}\right)\hat{\theta}\right]$$

$$= r^{\cdot\cdot}\hat{u} + r^{\cdot}(\hat{u})^{\cdot} + \left(r\theta^{\cdot}\right)^{\cdot}\hat{\theta} + \left(r\theta^{\cdot}\right)\left(\hat{\theta}\right)^{\cdot}$$

أو

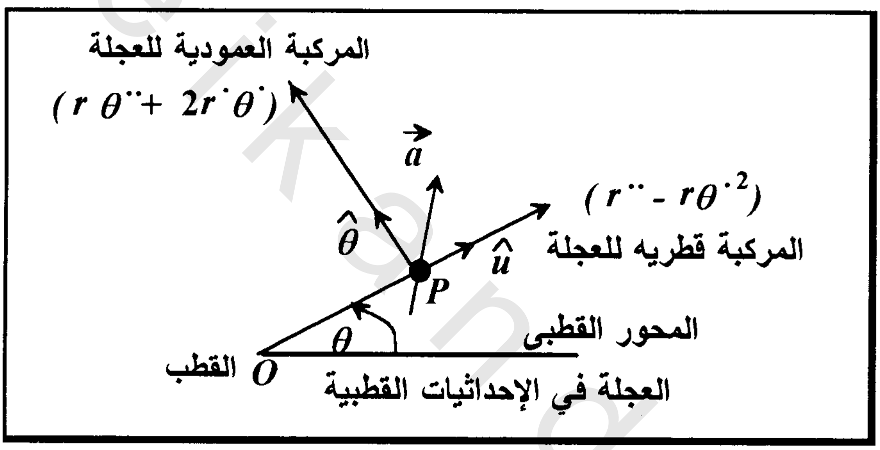
$$\vec{a} = r^{\cdot\cdot}\hat{u} + r^{\cdot}(\hat{u})^{\cdot} + r^{\cdot}\theta^{\cdot}\,\hat{\theta} + r\theta^{\cdot\cdot}\hat{\theta} + r\theta^{\cdot}\left(\hat{\theta}\right)^{\cdot} \qquad (2.44)$$

وبالتعويض مــن (2.29) عـن $(\hat{u})^{\cdot} = \theta^{\cdot}\hat{\theta},\ \left(\hat{\theta}\right)^{\cdot} = -\theta^{\cdot}\hat{u}$ وذلـك في (2.44) نحصل على

$$\vec{a} = \left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2}\right)\hat{u} + \left(r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot}\right)\hat{\theta} \qquad (2.45)$$

حيث تسمى المركبة $\left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2}\right)$ والتي في اتجاه متجه الوحدة $\hat{u}$ "المركبة القطرية للعجلة المتجهة" في الإحداثيات القطرية، بينما تسمى المركبة $\left(r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot}\right)$ والتي في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ "المركبة العمودية". انظر شكل (2.12).

شكل 2.12



ملاحظات

(1) يمكن كتابة المركبة العمودية للعجلة في الإحداثيات القطبية في الصورة

$$r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\theta^{\cdot}\right) \tag{2.46}$$

(2) إذا كانت ω هي السرعة الزاوية المنتظمة للنقطة المادية المتحركة P حول القطب O، فإن المركبة العمودية للسرعة هي

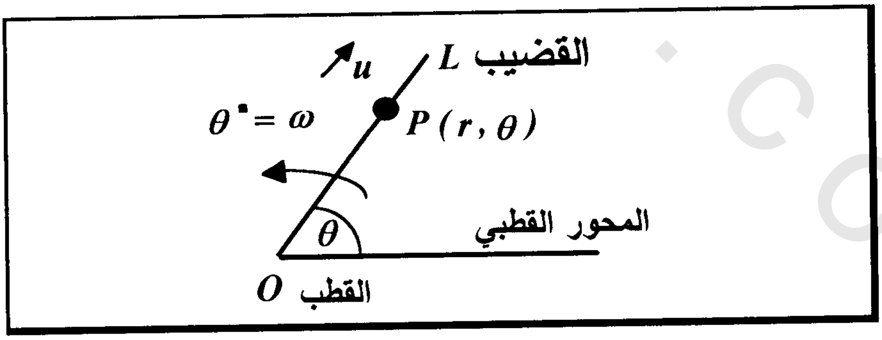
$$r\theta^{\bullet} = |\overrightarrow{OP}|\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{r\theta^{\bullet}}{|\overrightarrow{OP}|} \tag{2.47}$$

أي أن السرعة الزاوية للنقطة P حول O تساوي المركبة العمودية لسرعة النقطة P مقسومة على الطول $|\overrightarrow{OP}|$.

مثال 2.3 أوجد متجه العجلة القطبية لنقطة مادية تتحرك على قضيب بسرعة منتظمة u، ويدور القضيب حول محور عمودي عليه بسرعة زاوية منتظمة ω. ثم أوجد معادلة المسار.

الحل نفرض أن القضيب L قد دار بزاوية θ في زمن قدره t، وأن النقطة P قد تحركت مسافة $|\overrightarrow{OP}|$ في نفس الزمن t، وأنها بدأت الحركة من عند O. انظر شكل (2.13)

شكل 2.13



إذن هناك حركتان للنقطة المادية، الحركة الأولى حركة انتقالية بسرعة

منتظمة u على القضيب L، أما الحركة الثانية فهي حركة دورانية تنتج عن دوران القضيب L نفسه حول القطب O بسرعة زاوية منتظمة ω. إذن متجه العجلة في الإحداثيات القطبية المطلوب هو

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2} \right)\hat{u} + \left(r\theta^{\bullet\bullet} + 2r^{\bullet}\theta^{\bullet} \right)\hat{\theta} \qquad \text{(i)}$$

وبالتالي نجد أن المطلوب هو البحث عن الكميات، $r,\ r^{\bullet},\ r^{\bullet\bullet},\ \theta^{\bullet},\ \theta^{\bullet\bullet}$، والتعويض بها في (i). بما أن القضيب يدور بسرعة زاوية منتظمة ω، إذن

$$\theta^{\bullet} = \omega \;\Rightarrow\; \theta^{\bullet\bullet} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

وحيث أن النقطة المادية تتحرك على القضيب بسرعة منتظمة u إذن، وباعتبار أن $r = \left|\vec{OP}\right|$، فإن

$$\left|\vec{OP}\right| = r = u\,t \;\Rightarrow\; r^{\bullet} = \frac{dr}{dt} = u \;\Rightarrow\; r^{\bullet\bullet} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

بالتعويض من المعادلتين (ii)، (iii) في المعادلة (i) نحصل على

$$\vec{a} = \left(0 - r\omega^{2}\right)\hat{u} + \left(r \times 0 + 2u\omega\right)\hat{\theta}$$

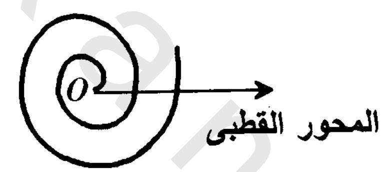
أو

$$\vec{a} = \left(-r\omega^2\right)\hat{u} + (2v\omega)\hat{\theta}$$

وبما أن

$$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t$$

إذن فإن معادلة المسار يمكن الحصول عليها بعد حذف t من المعادلتين: $r = ut\ ,\ \theta = \omega t$ فنجد أنها تمثل الحلزون، الذي معادلته $r = \frac{u}{\omega}\ \theta$ المبين بشكل (2.14).



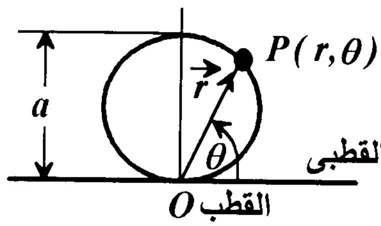
شكل 2.14

.

مثال 2.4 تتحرك نقطة مادية في المستوى القطبي بسرعة تتناسب مع $\text{cosec}^2(\theta)$ بحيث ترسم الدائرة $r = a\sin(\theta)$. اثبت أن عجلتها تكون دائماً متجهة نحو قطب الإحداثيات.

الحل المطلوب هو إثبات أن عجلة النقطة المادية $P(r, \theta)$ تتجه دائماً نحو قطب الإحداثيات O. انظر شكل (2.15).

شكل 2.15



دائرة معادلتها القطبية هى $r = a \sin(\theta)$

إذن لنبحث أولاً عن شكل العجلة، التي تتحرك بها هذه النقطة المادية. فإذا كانت المركبة العمودية للعجلة تساوي الصفر، فهذا يعني أن العجلة لها مركبة نصف قطرية فقط. ولأن مسار الحركة يرسم دائرة، إذن فإن العجلة ـ فعلاً ـ تتجه نحو قطب الإحداثيات. من (2.46) نجد أن المركبة العمودية للعجلة المتجهة هي

$$r\theta^{\bullet\bullet} + 2r\theta^{\bullet} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\theta^{\bullet}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2(\theta)\cdot\theta^{\bullet}\right) \qquad \text{(i)}$$

وللحصول على السرعة الزاوية $\theta^{\bullet}$ نستخدم معطيات المثال. بما أن السرعة تتناسب مع $\operatorname{cosec}^2(\theta)$، إذن علينا إيجاد مقدار السرعة أولاً. بما أن $r = a\sin(\theta)$، إذن

$$(r)^{\bullet} = \frac{dr}{dt} = a\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} = a\theta^{\bullet}\cos(\theta)$$

وبالتالي فإن مقدار السرعة هو

$$v = \sqrt{\left(r^{\bullet}\right)^{2} + \left(r\theta^{\bullet}\right)^{2}}$$

$$= \sqrt{\left(a\theta^{\bullet}\cos(\theta)\right)^{2} + \left(a\sin(\theta)\theta^{\bullet}\right)^{2}} = a\theta^{\bullet}$$

الآن، فإن مقدار السرعة $a\theta^{\bullet}$ يتناسب مع $\operatorname{cosec}^2(\theta)$، إذن فإن $a\theta^{\bullet} \propto \operatorname{cosec}^2(\theta)$ ، وبالتالي نجد أن

$$a\theta^{\bullet} = k\operatorname{cosec}^2(\theta) \;\Rightarrow\; \theta^{\bullet} = \frac{k}{a}\operatorname{cosec}^2(\theta) \qquad \text{(ii)}$$

حيث k هو ثابت التناسب. بالتعويض عن $\theta^{\bullet}$ من (ii) في (i) نجد أن المركبة العمودية للعجلة هي

$$r\theta^{\bullet\bullet} + 2r\theta^{\bullet} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2(\theta)\cdot\frac{k}{a}\operatorname{cosec}^2(\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(a\,k) = 0$$

الأمر الذي يعني أن اتجاه العجلة هو اتجاه المركبة النصف قطرية فقط، أي أن العجلة تتجه نحو قطب الإحداثيات.

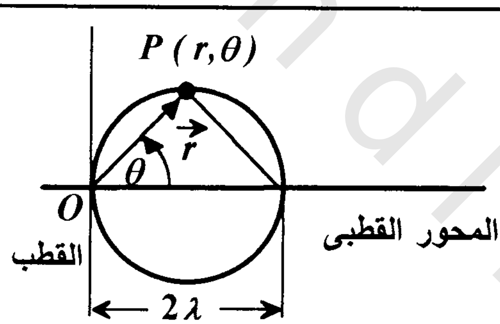
✍.

مثال 2.5 يتحرك جسيم في المستوى القطبي بحيث أن إحداثياته في أية لحظة هي $(r,\theta)=\left(2\lambda\cos(t),t\right)$ حيث λ ثابت موجب.

أوجد معادلة مسار الجسيم، وسرعة وعجلة الجسيم عند أية لحظة، ومتجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار الجسيم في اتجاه الحركة، ومتجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم.

الحل معادلة المسار نحصل عليها بحذف البارامتر t من إحداثيات الجسيم القطبية فنحصل على $r=2\lambda\cos(\theta)$. وهي تمثل المعادلة القطبية لدائرة نصف قطرها λ حيث r مقاسة من نقطة على محيط الدائرة. انظر شكل (2.16).

شكل 2.16



دائرة معادلتها القطبية هي
$r=2\lambda\cos(\theta)$

وبما أن

$$r=2\lambda\cos(t)\ ,\ \ \theta=t$$

إذن فإن

$$r^{\cdot} = -2\lambda \sin(t), \quad r^{\cdot\cdot} = -2\lambda \cos(t);$$

$$\theta^{\cdot} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(t) = 1 \;, \quad \theta^{\cdot\cdot} = 0$$

وبالتالي فإن

$$\vec{v} = \left(r^{\cdot}\right)\hat{u} + \left(r\theta^{\cdot}\right)\hat{\theta}$$

$$= \left(-2\lambda \sin(t)\right)\hat{u} + \left(2\lambda \cos(t)\right)\hat{\theta}$$

ويكون مقدار السرعة هو

$$v = \sqrt{\left(r^{\cdot}\right)^2 + \left(r\theta^{\cdot}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4\lambda^2 \sin^2(t) + 4\lambda^2 \cos^2(t)} = 2\lambda$$

أيضاً فإن العجلة هي

$$\vec{a} = \left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2}\right)\hat{u} + \left(r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot}\right)\hat{\theta}$$

$$= \left(-4\lambda \cos(t)\right)\hat{u} + \left(-4\lambda \sin(t)\right)\hat{\theta}$$

إذن مقدار العجلة هو

$$a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{16\lambda^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 4\lambda$$

أما متجه الوحدة في اتجاه المماس فهو

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\left(-2\lambda\sin(t)\right)\,\hat{u} + \left(2\lambda\cos(t)\right)\,\hat{\theta}}{2\lambda}$$

أو

$$\hat{t} = -\sin(t)\,\hat{u} + \cos(t)\,\hat{\theta}$$

وللحصول على متجه الوحدة العمودي للداخل على مسار الجسيم، لدينا

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

وبالتعويض في

$$\vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_n\,\hat{n}$$

نحصل على

$$\vec{a} = (0)\hat{t} + (a_n)\hat{n} = (a_n)\hat{n}$$

وبالتالي فإن مقدار العجلة هو

$$a = \left|\vec{a}\right| = \left|a_n\hat{n}\right| = a_n$$

وبما أن $a = 4\lambda$، إذن فإن $a_n = 4\lambda$ أيضاً، ويكون متجه الوحدة العمودي للداخل على مسار الجسيم هو المتجه الذي يأخذ الصورة

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}}{4\lambda} = \frac{-4\lambda\cos(t)\hat{u} - 4\lambda\sin(t)\hat{\theta}}{4\lambda}$$
$$= -\cos(t)\hat{u} - \sin(t)\hat{\theta}$$

✍.

2.4 حركة جسيم على محيط دائرة ـ Circular Motion

إذا تحركت نقطة مادية $P(\rho, \theta)$ على محيط دائرة نصف قطرها ρ يكون العمودي على نصف القطر المتجه هو المماس للدائرة. ويكون مقدار متجه الموضع للنقطة P في هذه الحالة ثابتاً. فإذا اعتبرنا أن القطب هو مركز الدائرة فإن

$$r = \rho \tag{2.48}$$

حيث ρ هو نصف قطر الدائرة التي تتحرك عليها النقطة المادية. إذن، بتفاضل (2.48) نحصل على

$$r^{\bullet} = 0 \ , \ r^{\bullet\bullet} = 0 \tag{2.49}$$

وبالتعويض في (2.43) نجد أن متجه سرعة نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ (نرمز له بالرمز $\vec{v_c}$) هو

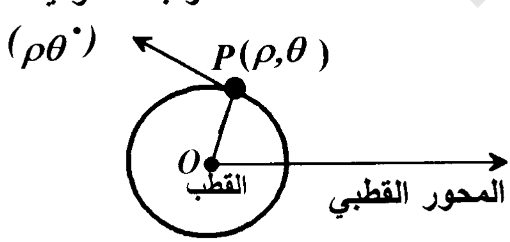
$$\vec{v_c} = (0)\ \hat{u} + \left(\rho\theta^{\cdot}\right)\ \hat{\theta} = \left(\rho\theta^{\cdot}\right)\ \hat{\theta} \qquad (2.50)$$

الأمر الذي يعني أن متجه السرعة لنقطة مادية تتحرك على محيط دائرة له مركبة واحدة فقط هي المركبة العمودية (في اتجاه متجه الوحدة القطبي $\hat{\theta}$)، أي عمودية على نصف قطر الدائرة وفي اتجاه المماس لمسار الحركة (الدائرة). أما المركبة النصف قطرية فتساوي الصفر. إذن فمقدار السرعة هو

$$v_c = \sqrt{\left(\rho\,\theta^{\cdot}\right)^2} = \rho\,\theta^{\cdot} \qquad (2.51)$$

وتصبح مركبتا السرعة لنقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها العدد ρ هما $\left(0, \rho\,\theta^{\cdot}\right)$. انظر شكل (2.17).

شكل 2.17



متجه سرعة جسيم يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ

الآن، نحاول الحصول على متجه عجلة نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ. في هذه الحالة يتم التعويض من (2.49) ,(2.48) في المعادلة (2.45) فنجد أن متجه العجلة على محيط دائرة نصف قطرها ρ، والذي نرمز له بالرمز $\vec{a_c}$ هو

$$\vec{a_c} = \left(-\rho\,\dot{\theta}^{2}\right)\hat{u} + \left(\rho\,\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \tag{2.52}$$

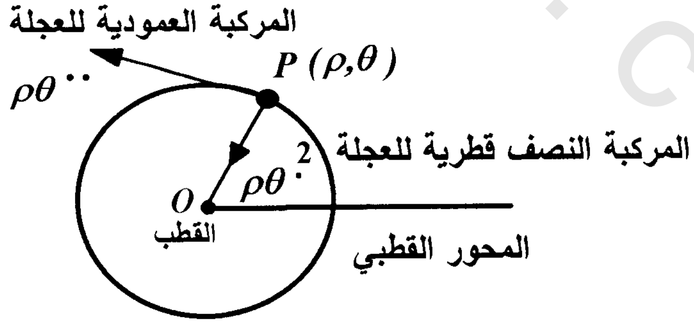
ويكون مقدار هذه العجلة هو

$$a_c = \left|\vec{a_c}\right| = \sqrt{\left(-\rho\dot{\theta}^{2}\right)^{2} + \left(\rho\ddot{\theta}\right)^{2}} \tag{2.53}$$

بالتعويض من (2.51) نجد أن مركبة العجلة في اتجاه نصف القطر (انظر شكل (2.18)) يمكن أن نعبر عنها بدلالة السرعة v_c في الصورة

$$-\rho\dot{\theta}^{2} = -\frac{v_c^{2}}{\rho} \tag{2.54}$$

شكل 2.18



متجه عجلة جسيم يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ

هذا، وإذا فرضنا أن النقطة المادية تتحرك على محيط الدائرة بسرعة زاوية منتظمة ω؛ أي أن إحداثياتها القطبية هي $(r, \omega t)$، عندئذٍ فإن

$$\theta^{\bullet} = \omega \quad \Rightarrow \quad \theta^{\bullet\bullet} = 0 \tag{2.55}$$

وبالتعويض من (2.55) في (2.50) نحصل عندئذٍ على متجه (نرمز له بالرمز $\vec{v_r}$) سرعة نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ وبسرعة زاوية منتظمة ثابتة هي ω في الصورة

$$\vec{v_r} = (\rho\,\omega)\ \hat{\theta} \tag{2.56}$$

ويكون مقدار السرعة هو

$$v_r = \rho\,\omega \tag{2.57}$$

وبالتعويض - أيضاً - من (2.57) في (2.52) نجد أن العجلة المتجهة (نرمز لها بالرمز $\vec{a_r}$) لها مركبة واحدة فقط في اتجاه نصف القطر. إذن

$$\vec{a_r} = \left(-\rho\omega^{2}\right)\hat{u} \tag{2.58}$$

ويكون مقدار العجلة هو

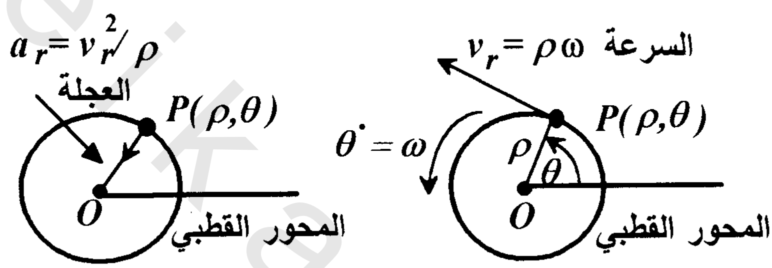
$$a_r = \rho\omega^{2} \tag{2.59}$$

بالتعويض من المعادلة (2.57) في المعادلة (2.59)، نجد أن

$$a_r = \frac{v_r^{\ 2}}{\rho} \tag{2.60}$$

لاحظ أن كلاً من السرعة والعجلة ثابتة مقداراً، كما أن اتجاه العجلة هو الاتجاه العمودي للداخل. انظر شكل (2.19).

شكل 2.19



سرعة، وعجلة جسيم يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها ρ بسرعة زاوية منتظمة ω

في نهاية هذا الفصل من الضروري إعطاء ملخص لتوضيح الفروق بين متجهات الموضع والسرعة والعجلة لحركة نقطة مادية في الإحداثيات القطبية، وعندما تكون الحركة على محيط دائرة بسرعة زاوية، وعندما تكون الحركة على محيط دائرة بسرعة زاوية منتظمة.

في الواقع، يمكن ملاحظة أن متجه السرعة لحركة نقطة مادية على محيط دائرة له مركبة واحدة في اتجاه العمودي على نصف القطر، أي في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ بغض النظر عن كون السرعة الزاوية التي تتحرك بها النقطة المادية هي سرعة زاوية منتظمة أم غير منتظمة. أما متجه العجلة

فيتكون ـ فقط ـ من مركبة واحدة في اتجاه نصف القطر إذا كانت الحركة على محيط الدائرة بسرعة زاوية منتظمة.

ملخص 2.7

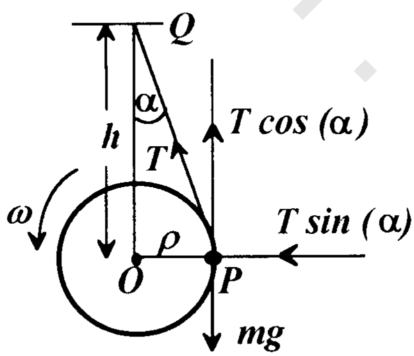
الحركة في الإحداثيات القطبية (r, θ)	$r^{\bullet} = \dfrac{dr}{dt}, \ \theta^{\bullet} = \dfrac{d\theta}{dt}$
متجه الموضع	$\vec{r} = r\,\hat{u}$
متجه السرعة	$\vec{v} = \left(r^{\bullet}\right)\hat{u} + \left(r\,\theta^{\bullet}\right)\hat{\theta}$
متجه العجلة	$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}\right)\hat{u} + \left(r\theta^{\bullet\bullet} + 2r^{\bullet}\theta^{\bullet}\right)\hat{\theta}$
الحركة على محيط دائرة نصف قطرها ρ وبسرعة زاوية $\theta^{\bullet}$	$r = \rho, \ \theta^{\bullet} = \dfrac{d\theta}{dt}$
متجه الموضع	$\vec{r_c} = \rho\,\hat{u}$
متجه السرعة	$\vec{v_c} = (0)\,\hat{u} + \left(\rho\theta^{\bullet}\right)\hat{\theta}$
متجه العجلة	$\vec{a_c} = \left(-\rho\,\theta^{\bullet 2}\right)\hat{u} + \left(\rho\,\theta^{\bullet\bullet}\right)\hat{\theta}$

الحركة على محيط دائرة نصف قطرها ρ وبسرعة زاوية منتظمة ω	$r = \rho\ ,\ \theta^{\bullet} = \omega$
متجه الموضع	$\vec{r_c} = \rho\,\hat{u}$
متجه السرعة	$\vec{v_r} = (0)\ \hat{u} + (\rho\ \omega)\ \hat{\theta}$
متجه العجلة	$\vec{a_r} = \left(-\rho\omega^{2}\right)\hat{u} + (0)\hat{\theta}$

2.5 البنـدول المخروطي ـ Conical Pendulum

يتكون البندول المخروطي من نقطة مادية كتلتها m معلقة في نهاية خيط طرفه الآخر مثبت، ثم قذفت هذه النقطة المادية بحيث تتحرك في دائرة أفقية بسرعة زاوية ثابتة انظر شكل (2.20).

شكل 2.20



Conical Pendulum ـ البندول المخروطي

هذا، ولدراسة حركة البندول المخروطي، نفرض أن النقطة المادية P تتحرك بالسرعة الزاوية الثابتة ω على محيط دائرة نصف قطرها ρ، وبالتالي فإن سرعة النقطة P وعجلتها هما على الترتيب

$$v = \omega \rho \,, \quad a = \frac{v^2}{\rho}$$

أيضاً نجد أن القوى المؤثرة على حركة النقطة المادية P هما قوتان القوة الأولى هي قوة وزن النقطة المادية نفسها، أي القوة mg، والقوة الثانية هي قوة الشد في الخيط، والتي نرمز لها بالرمز T. بما أن النقطة المادية تتحرك في دائرة أفقية، إذن، وبعد تحليل قوة الشد نجد أن معادلات الحركة هي

$$m\,\vec{a} = \vec{F}$$

ولأنه في حالة الحركة على محيط دائرة بسرعة زاوية منتظمة فإن للعجلة مركبة واحدة في اتجاه العمودي للداخل (في اتجاه نصف القطر للداخل)، أما المركبة الأخرى، والتي في اتجاه المماس تكون مساوية للصفر، إذن فإن معادلتي الحركة في اتجاه المماس، وفي الاتجاه العمودي (اتجاه نصف القطر) ـ على الترتيب ـ هما

$$m \times 0 = mg - T\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad mg = T\cos(\alpha); \qquad (2.61)$$

$$m\left(\omega^2 \rho\right) = T\sin(\alpha); \qquad (2.62)$$

بقسمة (2.62) على (2.61) ينتج

$$\tan(\alpha) = \frac{\rho\,\omega^2}{g} \tag{2.63}$$

ولكننا نجد من الرسم أن

$$\tan(\alpha) = \frac{\rho}{h} \tag{2.64}$$

وبمقارنة المعادلتين (2.64) ,(2.63) نجد أن

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{h}} \tag{2.65}$$

وبالتالي فإن زمن الدورة الكاملة هو

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}} \tag{2.66}$$

أيضاً نلاحظ من (2.66) أن

$$h = \frac{g}{\omega^2} \tag{2.67}$$

أي أن البعد عن نقطة التعليق يتوقف على السرعة الزاوية ω فبزيادة ω يقل h وبالعكس.

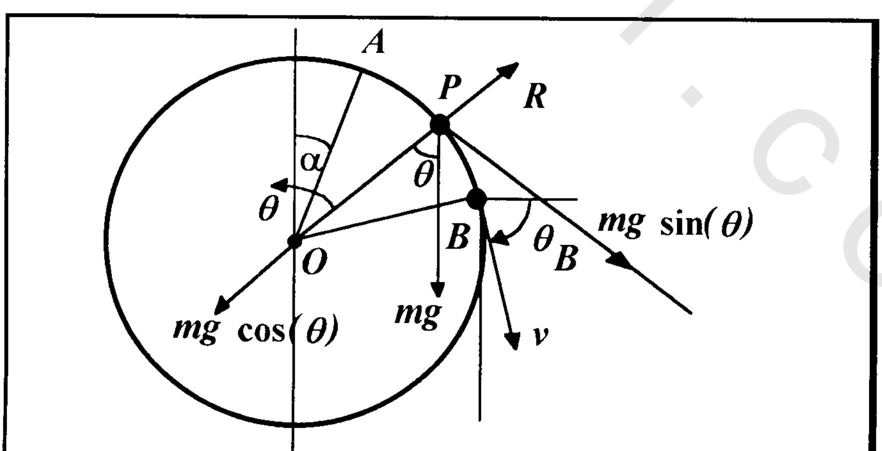
مثال 2.6 تتحرك نقطة مادية كتلتها m على المحيط الخارجي لسلك أملس على شكل دائرة رأسية نصف قطرها ρ. فإذا بدأت النقطة حركتها من السكون من موضع يميل فيه نصف القطر المار بالنقطة المادية على الرأسي بزاوية α.

اثبت أن النقطة المادية تترك سطح السلك عندما يصنع اتجاه السرعة زاوية θ_B مع الأفقي حيث

$$\theta_B = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right)$$

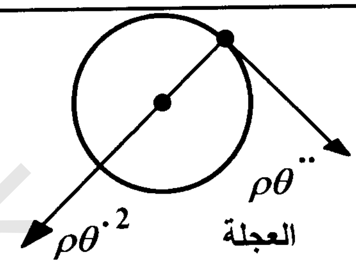
الحل نفرض أن مسار النقطة المادية هو القوس الدائري AB وأن P هو موضع النقطة بعد زمن قدره t، وأن OP يميل على الرأسي بزاوية θ. القوى المؤثرة على النقطة المادية هي الوزن mg ويؤثر رأسياً إلى أسفل، ورد الفعل العمودي R. انظر شكل (2.21).

شكل 2.21



وبما أنه في حالة حركة نقطة مادية على محيط دائرة فإن مقدار مركبتي العجلة النصف قطرية (في اتجاه العمودي للداخل على المسار)، والعمودية هما على الترتيب $\left(\rho\dot{\theta}^2, \rho\ddot{\theta}\right)$، انظر شكل (2.22).

شكل 2.22



إذن معادلتا الحركة هما

$$m\left(\rho\dot{\theta}^2\right) = mg\cos(\theta) - R; \qquad \text{(i)}$$

$$m\left(\rho\ddot{\theta}\right) = mg\sin(\theta); \qquad \text{(ii)}$$

وبما أن $\ddot{\theta}$ يمكن كتابتها في الصورة

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} \qquad (2.68)$$

إذن، وبالتعويض من (2.68) في (ii) نحصل على

$$\rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = g\sin(\theta)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل، نجد أن

$$\rho\int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = g\int \sin(\theta)\, d\theta + C$$

أو

$$\rho\frac{\left(\dot{\theta}\right)^2}{2} = -g\cos(\theta) + C$$

وبما أنه عند بدء الحركة فإن $\theta = \alpha$. إذن، بالتفاضل فإن $\dot{\theta} = 0$. عندئذٍ، وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن الثابت هو $C = g\cos(\alpha)$، وعندئذٍ فإن

$$\rho\dot{\theta}^2 = 2g\left(\cos(\alpha) - \cos(\theta)\right) \qquad \text{(iii)}$$

وبما أن سرعة نقطة مادية على محيط دائرة تعطى من العلاقة $v = \rho\dot{\theta}$، إذن، وبضرب المعادلة (iii) في ρ نحصل على

$$v^2 = \rho^2\dot{\theta}^2 = 2g\rho\left(\cos(\alpha) - \cos(\theta)\right)$$

حيث v هي سرعة النقطة المادية عند النقطة P. وبالتعويض أيضاً من المعادلة (iii) في المعادلة (i) نجد أن

$$R = 3mg\cos(\theta) - 2mg\cos(\alpha)$$

وتظل النقطة المادية تتحرك على السلك في مسار دائري حتى تصل الوضع B، وعندما يكون $R_B = 0$ فإن النقطة تترك سطح السلك وتتحرك تحت تأثير وزنها، وعندئذٍ فإن

$$0 = 3mg\cos(\theta_B) - 2mg\cos(\alpha)$$

أو

$$\cos(\theta_B) = \frac{2}{3}\cos(\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$\theta_B = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right)$$

.

2.6 كينيماتيكا الجسيم في الإحداثيات الذاتية

تعرضنا في الفصول السابقة إلى حركة الجسيم في المستوى في الإحداثيات الكارتيزية، والإحداثيات القطبية. في هذا الفصل نوجد معادلات حركة جسيم في المستوى في ما يسمى "الإحداثيات الذاتية" *(Inertial Coordinates)* والتي سوف نرمز لها بالرمز (s, ψ). ولنبدأ بالتعريف التالي.

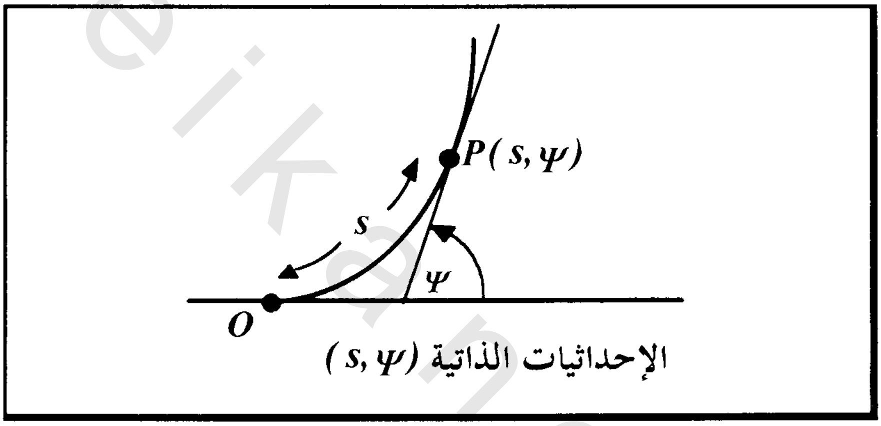
تعريف الإحداثيات الذاتية 2.8

لتعيين موضع نقطة مادية تتحرك في المستوى في الإحداثيات الذاتية (s, ψ) نفرض أية نقطة O على مسار النقطة المادية المتحركة. ولنفرض أن P هو موضع النقطة المادية عند الزمن t، عندما كان s هو

طول القوس مقاساً من النقطة الثابتة O، ولنفرض أيضاً أن المماس عند النقطة P يميل على الأفقي بزاوية مقدارها ψ.

على هذا، فلتعيين موضع نقطة مادية في الإحداثيات الذاتية فإنه يلزم معرفة طول القوس s، كما يلزم معرفة الزاوية ψ. انظر شكل (2.23).

شكل 2.23



✍.

والآن نحاول الحصول على متجهي السرعة والعجلة في الإحداثيات الذاتية. بما أن السرعة دائماً في اتجاه المماس، وبما أن $\hat{t}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المماس إذن متجه السرعة في الإحداثيات الذاتية هو ـ أيضاً ـ نفس المتجه المعطى في المعادلة (2.14)، أي المتجه $\vec{v} = v\hat{t}$. وبما أنه في حالة الإحداثيات الذاتية فإن السرعة عند P هي معدل تغير طول المنحنى s (مقاساً من النقطة الثابتة O) بالنسبة إلى الزمن، إذن فإن

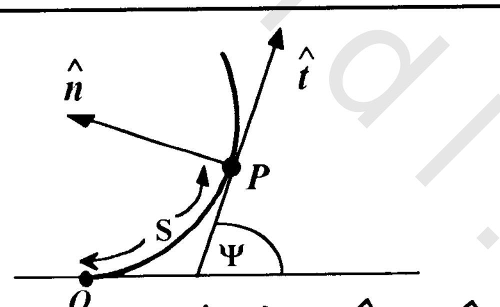
$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = s^{\bullet}} \tag{2.69}$$

وبالتعويض من (2.69) في (2.14)، إذن

$$\boxed{\vec{v} = \left(s^{\bullet}\right)\hat{t} \quad , \quad v = \left|\vec{v}\right| = s^{\bullet}} \tag{2.70}$$

هـذا، وللحصـول علـى متجـه العجلـة في الشـكل $\vec{a} = \left(a_t\right)\hat{t} + \left(a_n\right)\hat{n}$ يكون المطلوب هو الحصول على المركبتين المماسية والعمودية a_t, a_n، ولكن في حالة الإحداثيات الذاتية. انظر شكل (2.24).

شكل 2.24



$\vec{v} = v\,\hat{t} = s^{\cdot}\hat{t}$ ، $\vec{a} = v^{\cdot}\,\hat{t} + \Psi^{\cdot}\,\hat{n}$

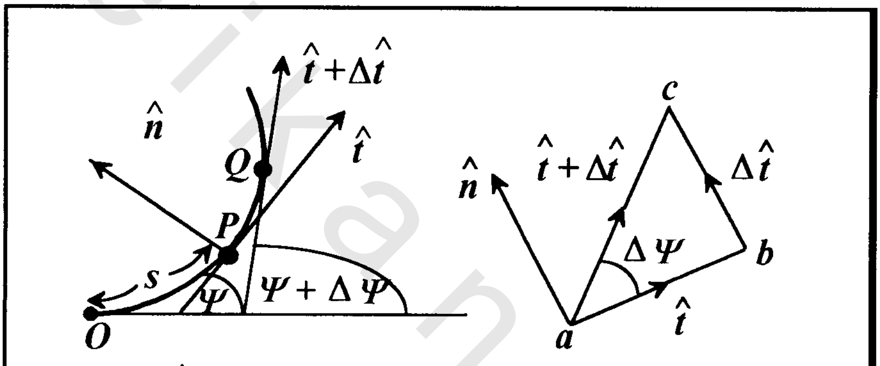
متجها السرعة والعجلة في الإحداثيات الذاتية

ولكن، من جهة أخرى، وبما أن العجلة هي معدل تغير السـرعة بالنسبة إلى الزمن، إذن، بتفاضل المعادلة رقم (2.14) نجد أن

$$\vec{a} = \left(\vec{v}\right)^{\cdot} = \left(v\hat{t}\right) = \left(v\right)^{\cdot}\hat{t} + \left(v\right)\frac{d\hat{t}}{dt} \tag{2.71}$$

لإيجاد المشتقة الأولى $\frac{d\hat{t}}{dt}$ نفرض أن النقطة المادية تحركت من الموضع P إلى الموضع Q كما هو في شكل (2.25).

شكل 2.25



المشتقة الأولى لمتجه الوحدة المماسي $\hat{t}$

وفي هذه الأثناء فقد تغير متجه الوحدة المماسي $\hat{t}$ من $\hat{t}$ إلى $\hat{t} + \Delta\hat{t}$، حيث $\Delta\hat{t}$ هو متجه الإزاحة، وبالتالي فإن

$$\frac{d\,\hat{t}}{d\,t} = \left(\hat{t}\right)^{\cdot} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\,\hat{t}}{\Delta\,t} \tag{2.72}$$

إذن المطلوب هو معرفة مقدار واتجاه متجه الإزاحة $\Delta\,\hat{t}$. واضح ـ طبعاً ـ من شكل (2.25) أن الزاوية المحصورة بين المتجه $\hat{t}$، والمتجه $\hat{t} + \Delta\hat{t}$ هي الزاوية $\Delta\psi$.

أيضاً نجد من المثلث abc عندما تكون الزاوية $\Delta\psi$ صغيرة جداً أن متجه الإزاحة $\Delta\,\hat{t}$ يكون ـ أيضاً ـ صغيراً جداً، ويصبح عندئذٍ $ac = ab$، ونجد أن الزاوية $a\hat{b}c$ هي $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\psi}{2}\right)$. إذن من حساب المثلثات يمكن أن نحصل على

$$\frac{\left|\Delta\hat{t}\right|}{\sin(\Delta\psi)} = \frac{\left|\hat{t}\right|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\psi}{2}\right)}$$

أو

$$\frac{\left|\Delta\hat{t}\right|}{\sin(\Delta\psi)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)}$$

وبالتالي فإن

$$\left|\Delta\hat{t}\right| = \frac{\sin(\Delta\psi)}{\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) \qquad (2.73)$$

ولكننا نعلم ـ أيضاً ـ أن $\sin(x) = x$ في حالة ما تكون الزاوية x، صغيرة ولأن الزاوية $\Delta\psi$ من المفروض أن تكون صغيرة جداً، إذن فإن

$$\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) = \frac{\Delta\psi}{2}$$

وبالتالي نجد أن

$$\left|\Delta\, \hat{t}\right| = 2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) = \Delta\psi \qquad (2.74)$$

الأمر الذي يعني أن مقدار متجه الإزاحة $\Delta\, \hat{t}$ يساوي $\Delta\psi$. وبما أن الزاوية بين متجه الإزاحة $\Delta\, \hat{t}$ والمتجه $\hat{t}$ هي الزاوية $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\psi}{2}\right)$، إذن عندما يكون $\Delta\psi \to 0$ فإن الزاوية بين المتجه $\Delta\, \hat{t}$ والمتجه $\hat{t}$ تصبح $\frac{\pi}{2}$، أي أن اتجاه متجه الإزاحة $\Delta\hat{t}$ يكون هو نفسه اتجاه متجه الوحدة $\hat{n}$، أي في اتجاه العمودي للداخل على المسار. وهكذا نجد أن

$$\Delta\, \hat{t} = \left(\Delta\psi\right)\, \hat{n} \qquad (2.75)$$

بالتعويض من (2.75) في (2.72) نحصل على المشتقة الأولى لمتجه الوحدة في اتجاه المماس في الصورة

$$\frac{d\, \hat{t}}{d\, t} = \left(\hat{t}\right)^{\bullet} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t}\right)\hat{n} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)\hat{n} = \left(\psi^{\bullet}\right)\, \hat{n} \qquad (2.76)$$

هذا، ويمكن الحصول على المشتقة الأولى لمتجه الوحدة $\hat{t}$ في صورة أخرى بدلالة انحناء *(Curvature)* منحنى المسار لحركة النقطة المادية، إذ نجد أن

$$\frac{d\, \hat{t}}{d\, t} = \left(\hat{t}\right)^{\bullet} = \left(\frac{d\psi}{ds}\;\frac{ds}{dt}\right)\, \hat{n} = \left(\frac{d\psi}{ds}\left(s\right)^{\bullet}\right)\hat{n} \qquad (2.77)$$

أو

$$\left(\hat{t}\right)^{\bullet} = \left(Kv\right)\,\hat{n} \tag{2.78}$$

حيث يرمز المقدار $K = \dfrac{d\psi}{ds}$ إلى انحناء المنحنى. وعلى هذا فإنه يمكن إعادة كتابة العجلة (2.71) في الصورة

$$\vec{a} = (v)^{\bullet}\ \hat{t} + \left(v\psi^{\bullet}\right)\hat{n} \tag{2.79}$$

أو

$$\vec{a} = (v)^{\bullet}\ \hat{t} + \left(v^{2}K\right)\hat{n} \tag{2.80}$$

أو

$$\vec{a} = (s)^{\bullet\bullet}\,\hat{t} + \left(\frac{v^{2}}{\mu}\right)\hat{n} \tag{2.81}$$

حيث

$$\mu = \frac{1}{K},\ s^{\bullet} = v \tag{2.82}$$

في الواقع أن المقدار μ، والذي يعتبر مقلوب الانحناء K يسمى "نصف قطر الانحناء" *(Radius of Curvature)*. وبالمقارنة مع متجه العجلة في الإحداثيات الكارتيزية

$$\vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_n\,\hat{n}$$

نجد ـ في حالة الإحداثيات الذاتية ـ أن

$$a_t = v^{\cdot} = (s)^{\cdot\cdot}$$

هي مركبة العجلة في اتجاه المماس في اتجاه تزايد s وبالإنجليزية *(Tangential Components)*، أما مركبة العجلة في اتجاه العمودي على المماس للداخل، وبالإنجليزية *(Normal Components)* نحو مركز انحناء المسار فهي

$$a_n = v\psi^{\cdot} = v^2 K = \frac{v^2}{\mu} \qquad (2.83)$$

2.7 معادلة الحركة المستوية في الإحداثيات المختلفة

المعادلة رقم (1.18) يمكن أن تأخذ أشكالاً أخرى متنوعة تعتمد على نوع محاور الإسناد المستخدمة. فإذا استخدمنا ـ مثلاً ـ في الفضاء ثلاثي الأبعاد الإحداثيات الكارتيزية (x, y, z)، فإننا نجد أن هذه المعادلة تتحول إلى ثلاث معادلات، كل معادلة تختص بمحور من الثلاثة محاور الأساسية $OX,\ OY,\ OZ$. وعلى هذا إذا تحرك الجسيم في الفراغ (الفضاء ثلاثي الأبعاد) فإن معادلات حركته الثلاث في اتجاه الثلاثة محاور الأساسية تصبح

$$F_x = mx^{\cdot\cdot},\quad F_y = my^{\cdot\cdot},\quad F_z = mz^{\cdot\cdot} \qquad (2.84)$$

حيث F_x , F_y , F_z هي مركبات القوة المسببة للحركة في اتجاه المحاور الأساسية، بينما $x^{\cdot\cdot},\ y^{\cdot\cdot},\ z^{\cdot\cdot}$ فهي مركبات العجلة في اتجاه المحاور الأساسية أيضاً. وإذا تحرك الجسيم في المستوى (الفضاء ثنائي الأبعاد) تكون له معادلتان للحركة من الثلاث معادلات (2.84) طبقاً لمحوري احداثيات الحركة. وإذا كان الجسيم يتحرك في خط مستقيم (فضاء احادي البعد) يكون له معادلة حركة واحدة من الثلاثة معادلات (2.84) طبقاً لمحور إحداثيات الحركة. أما بالنسبة للإحداثيات الاسطوانية، (r, θ, z)، في الفضاء ثلاثي الأبعاد، فإن معادلات الحركة الثلاث تأخذ الصور الرياضية

$$F_r = m\left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2} \right);$$

$$F_\theta = m\left(r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot}\right),\ F_z = mz^{\cdot\cdot} \tag{2.85}$$

حيث F_r , F_θ, F_z هي مركبات القوة في اتجاهات زيادة (r, θ, z) على الترتيب.

أما إذا تحرك الجسيم في الفضاء ثنائي الأبعاد في الإحداثيات القطبية (r, θ) فإن هناك معادلتين للحركة هما على الترتيب

$$F_r = m\left(r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2} \right),\ F_\theta = m\left(r\theta^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\theta^{\cdot}\right) \tag{2.86}$$

حيث F_r, F_θ هما مركبتا القوة في اتجاهي زيادة البارامترين (r, θ) على الترتيب. وإذا تحرك في الفضاء ثنائي الأبعاد في الإحداثيات الذاتية (s, ψ) فإن هناك معادلتين للحركة هما على الترتيب

$$F_t = m\, s^{\cdot\cdot}, \quad F_n = m\, \psi^{\cdot} \tag{2.87}$$

حيث

$$s^{\cdot\cdot} = \frac{dv}{dt}, \quad \psi^{\cdot} = \frac{v^2}{\mu} = v^2 K \tag{2.88}$$

هنا μ يرمز لنصف قطر الانحناء، بينما K يرمز للانحناء، أما s فهو طول جزء منحنى المسار. أيضاً فإن F_t, F_n هما مركبتا القوة في اتجاهي المماس لمنحنى المسار والعمودي عليه للداخل.

مثال 2.7 أوجد نصف قطر الانحناء μ عندما $t = 1$ لجسيم يتحرك في الفراغ الثلاثي بحيث تعطى إحداثياته الكارتيزية ـ كدوال في الزمن ـ في الصورة

$$x = \frac{1}{2}t^2 + 5, \quad y = \frac{4}{3}t^3 - 1, \quad z = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}$$

الحل بما أن نصف قطر الانحناء لمسار الجسيم المتحرك يعطى من العلاقة (2.83)، إذن المطلوب هو معرفة مقدار السرعة v والمركبة العمودية للعجلة، a_n. بما أن متجه الموضع هو

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{2}t^2 + 5\right)\hat{i} + \left(\frac{4}{3}t^3 - 1\right)\hat{j} + \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}\right)\hat{k}$$

إذن، متجه السرعة هو

$$\vec{v} = (t)\hat{i} + \left(4t^2\right)\hat{j} + \left(t^3\right)\hat{k}$$

إذن مقدار السرعة هو

$$v = \sqrt{t^2 + 16t^4 + t^6}$$

وبالتالي فإن

$$v_{t=1} = \left(\sqrt{t^2 + 16t^4 + t^6}\right)_{t=1} = 3\sqrt{2}$$

أما متجه العجلة فهو

$$\vec{a} = \hat{i} + (8t)\hat{j} + \left(3t^2\right)\hat{k}, \quad a = \sqrt{1 + 64t^2 + 9t^4}$$

إذن

$$a_{(t=1)} = \left(\sqrt{1 + 64t^2 + 9t^4}\right)_{t=1} = \sqrt{74}$$

أيضاً فإن

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t + 64t^3 + 6t^5}{2\sqrt{t^2 + 16t^4 + t^6}}$$

إذن، عند $t = 1$ فإن

$$a_t = \frac{72}{6\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

وبما أن $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$ ، إذن فإن

$$a^2 = a_t{}^2 + a_n{}^2 \Rightarrow a_n{}^2 = a^2 - a_t{}^2$$

وبالتالي فإنه عند $t = 1$ نجد أن

$$a_n = \sqrt{\left(\sqrt{74}\right)^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

إذن، عندما $t = 1$، فإن نصف قطر الانحناء لمسار حركة الجسيم هو

$$\mu = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

✍.

مثال 2.8 أوجد نصف قطر الانحناء لمسار النقطة المادية، التي متجه موضعها في الفراغ الثلاثي الكارتيزي يعطى بالعلاقة

$$\vec{r} = \left(e^t + te^t\right)\hat{i} - \left(2te^{2t} + 2t^2e^{2t}\right)\hat{j} + \hat{k}$$

الحل بتفاضل متجه موضع النقطة المادية $\vec{r}$ - بالنسبة إلى الزمن - نحصل على متجه السرعة

$$\vec{v} = \left(2e^t + te^t\right)\hat{i} - \left(4te^{2t} + 2e^{2t} + 4t^2e^{2t} + 4te^{2t}\right)\hat{j}$$

$$=\left[e^{t}(2+t)\right]\hat{i}-\left[e^{2t}\left(4t^{2}+8t+2\right)\right]\hat{j}$$

إذن

$$v=\sqrt{e^{2t}(2+t)^{2}+e^{4t}\left(4t^{2}+8t+2\right)^{2}}$$

وبالتالي فإن

$$(v)_{(t=0)}=2\sqrt{2}$$

وبما أن

$$a_{t}=\frac{dv}{dt}=\frac{e^{2t}(2+t)(t+3)+4e^{4t}\left(4t^{2}+8t+2\right)\left(2t^{2}+6t+3\right)}{\sqrt{e^{2t}(2+t)^{2}+e^{4t}\left(4t^{2}+8t+2\right)^{2}}}$$

إذن، عند $t=0$ فإن

$$a_{t}=\frac{15}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(a_{t}\right)^{2}=\frac{225}{2}$$

أيضاً فإن متجه العجلة هو

$$\vec{a}=e^{t}(t+3)\hat{i}-4e^{2t}\left(2t^{2}+6t+3\right)\hat{j}$$

وبالتالي فإنه عند $t=0$ تجد أن

$$\vec{a}=3\hat{i}-12\hat{j}$$

ونحصل عندئذٍ على

$$a^{2}=\left(\sqrt{9+144}\right)^{2}=153$$

وبما أن

$$a_n^{\,2} = a^2 - a_t^{\,2}$$

وبالتالي فإنه عند $t = 0$ تجد أن

$$(a_n)^2 = 153 - \frac{225}{2} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن نصف قطر الانحناء هو

$$\mu = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\left(\dfrac{9}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{9} = 1.26$$

✍.

2.8 مسائل

(1) يتحرك جسيم في مستوى بحيث أن إحداثياتة القطبية تتعين من المعادلتين: $r = \lambda \sin(t),\ \theta = t$، حيث λ ثابت موجب. أوجد: معادلة مسار الجسيم. سرعة الجسيم في أية لحظة. متجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار الجسيم في اتجاه الحركة. متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم. نصف قطر انحناء المسار.

(2) يتحرك جسيم في مستوى بحيث أن إحداثياتة الكارتيزية تتعين من $x = \cosh(t),\ y = \sinh(t)$. أوجد: معادلة مسار الجسيم. سرعة

الجسيم في أية لحظة. متجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار الجسيم في اتجاه الحركة. متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم. نصف قطر انحناء المسار.

(3) الإحداثيات الكارتيزية لحركة جسيم تعطى ـ كدوال في الزمن ـ في الصورة

$$x = \sin(t) - t\cos(t),\ y = \cos(t) + t\sin(t),\ z = t^2$$

عين في أية لحظة: متجه السرعة. متجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار الجسيم في اتجاه الحركة. مركبتي عجلة الجسيم في اتجاهي المماس لمسار الجسيم والعمودي عليه. نصف قطر الانحناء لمسار الجسيم. متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم.

(4) كتلتان متصلتان بخيط خفيف طوله $\lambda\frac{\pi}{2}$، وموضوعتان في حالة اتزان على السطح الخارجي لإسطوانة ملساء نصف قطرها λ ومحورها أفقي، وبحيث يكون مستواهما رأسياً وعمودياً على محور الإسطوانة. إذا تحركت الكتلتان بدءاً من حالة السكون في مستويهما. اثبت أن الضغط الواقع على الكتلة العلوية يساوي $\frac{3}{4}$ وزنها تقريباً في اللحظة التي تترك الكتلة السفلى سطح الإسطوانة.

(5) يسقط جسيم رأسياً إلى أسفل على الخط المستقيم الذي معادلته $x = 5$ مبتدءاً من سكون من عند النقطة $(5,0)$. أوجد السرعة الزاوية للخط الواصل من الجسيم إلى نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة.

(6) يتحرك جسيم في مستوى بحيث أن إحداثياته الكارتيزية تعطى من المعادلات $x = t,\ y = t^2\ ,\ z == t^3$. عيّن في أية لحظة نصف قطر انحناء المسار.

(7) يتحرك جسيم في مستوى بحيث أن إحداثياته الكارتيزية تعطى من المعادلات $x = \cos(t),\ y = \sin(t)$. عيّن في أية لحظة نصف قطر انحناء المسار.

(8) صفيحة على شكل المربع $ABCD$ تتحرك في المستوى الكارتيزي. عند لحظة ما كان الضلع AB أفقياً، والنقطة A متحركة بسرعة $10\ ft / \sec$ في الاتجاه الموجب لمحور ـ OX، بينما كانت النقطة B تتحرك في اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور ـ OX. عيّن سرعات النقط B, C, D وكذلك سرعة مركز المربع عند هذه اللحظة.

(9) يتحرك جسيم في الفراغ الثلاثي بحيث يتعين متجه موضعه من العلاقة

$$\overrightarrow{r} = \left(4\sin(2t)\right)\hat{i} + (t)\,\hat{j} + \left(4\cos(2t)\right)\hat{k}$$

أوجد: معادلة مسار الجسيم. متجه الوحدة في اتجاه المماس لمسار الجسيم في اتجاه الحركة. متجه الوحدة في اتجاه العمودي للداخل على مسار الجسيم.

(10) يتحرك جسيم بسرعة ثابتة v، إذا كان متجه عجلة الجسيم عند أية لحظة لايساوي الصفر، اثبت أن متجه العجلة عمودي على متجه السرعة.

****

قال أمير الشعراء أحمد شوقي:

ومن يستعن في أمره غير نفسه

يخنه الرفيق العون في المسلك الوعر

If you want a thing well done, do it yourself