الباب
1

# الحركة الخطية للجسيم

## Rectilinear Motion of a Particle

إذا تحرك الجسيم في خط مستقيم سميت حركته "حركة خطية" *(Rectilinear Motion)*، وإذا تحرك في خط منحني سميت حركته "حركة منحنية" *(Curvilinear Motion)*.

والحركة الخطية تعني الحركة على خط مستقيم أو في ما يسمى فضاء أحادي البعد *(One-Dimensional Space)*. أما الحركة المنحنية للجسيم فلا يمكن ـ بالطبع ـ دراستها إلا في فضاء ثنائي الأبعاد *(Two-Dimensional Space)* وهو ما يعرف بالحركة المستوية *(Plane Motion)*، أو دراستها في فضاء ثلاثي الأبعاد *(Three-Dimensional Space)* وهو ما يعرف بالحركة في الفراغ *(Motion in Space)*. هذا، وسوف نتعرف في هذا الباب على حركة الجسيم في خط مستقيم في الإحداثيات الكارتيزية فقط، وذلك من وجهتي النظر الكيناماتيكية *(Kinematics)* والتي تختص بعلاقة الحركة بالمكان والزمان، والكيناتيكية *(Kinetics)*، والمختصة بعلاقة الحركة بالقوى المؤثرة عليها.

## 1.0 مقدمة

قبل البدء في دراسة الحركة الخطية، دعنا نتعرف ـ أولاً ـ على معنى الحركة بصفة عامة، ونجيب عن السؤال التالي: متى يمكن القول أن جسيماً ما في حالة حركة؟

في الواقع فإنه يقال أن الجسيم المادي يتحرك أو في حالة حركة إذا كان يغير موضعه *(Position)* في فترات زمنية متتالية، أي أن موضعه يتغير بالنسبة إلى نقطة ثابتة بالنسبة إلى الزمن.

فإذا كان موضع الجسيم بالنسبة إلى نقطة ثابتة في لحظة ما عند النقطة $P$ مثلاً، ثم أصبح عند النقطة $Q$ بعد فترة زمنية معينة $\Delta t$، فإن هذا الجسيم يكون في حالة حركة في الفترة الزمنية $\Delta t$. كما أن المتجه $\overrightarrow{PQ}$ هو المتجه الذي يعبر عن التغير الذي حدث في موضع هذا الجسيم أثناء الفترة الزمنية $\Delta t$. وبالتأكيد أن المسار *(Path)* الذي يسلكه هذا الجسيم هو المحل الهندسي أو المنحنى المرسوم بواسطة المواضع المتتالية للجسيم.

هذا، ودراسة كينيماتيكا الجسيم في الخط المستقيم تعني دراسة الحركة دون التعرض لمسبباتها. بكلمات أخرى فإن دراسة الحركة تعني من وجهة نظر الكينماتيكا دراسة ثلاثة متجهات هي: متجه الموضع، ومتجه السرعة، ومتجه العجلة. فنوجد ـ مثلاً ـ علاقة الحركة بالمكان عن طريق إيجاد ما يسمى "متجه الموضع" *(Position Vector)* للجسيم المتحرك كدالة في الزمن، كما نوجد العلاقة الرياضية التي تربط الموضع (المكان) بالسرعة *(Velocity)*، والعلاقة الرياضية التي تربط العجلة *(Acceleration)* بالزمن، وغيرها من العلاقات.

بينما دراسة كيناتيكا الجسيم تعني دراسة مسببات الحركة، أي دراسة نوعية القوى المسببة للحركة والقوى المقاومة للحركة. فعلم الكيناتيكا يمكّن من معرفة القوى اللازمة لإحداث حركة ذات مواصفات معينة. بيد أنه يمكن بدراسة كيناتيكا الحركة الحصول على معلومات بخصوص كينيماتيكا الحركة (علاقة الحركة بالمكان، والزمان)، بينما العكس ليس ممكناً دائماً.

## 1.1 كينيماتيكا الجسيم في خط مستقيم

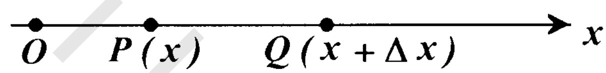
في هذا الفصل ندرس حركة جسيم يتحرك في الفضاء أحادي البعد، أي في الخط المستقيم، وذلك في الإحداثيات الكارتيزية.

نحاول الحصول على متجه الموضع $\vec{r}$ للجسيم المتحرك، ومن ثم نحصل منه ـ بإجراء عملية التفاضل ـ على متجه السرعة $\vec{v}$، ومتجه العجلة $\vec{a}$. بعد ذلك نبحث في العلاقات الرياضية التي تربط الثلاثة متجهات ببعضهما البعض.

هذا، وللحصول على متجه الموضع لجسيم كتلته $m$ يتحرك في خط مستقيم نختار نظام الإحداثيات الكارتيزية. نفرض ـ أولاً ـ أن هذا الخط هو محور ـ $x$ مثلاً، ونختار نقطة ثابتة عليه ولتكن نقطة الأصل $O$. كما نختار الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$ اتجاه زيادة $x$ مع الزمن.

لنفرض أنه عند اللحظة التي كان عندها الزمن هو $t$ كان الجسيم موضوعاً في النقطة $P(x)$ على محور - $x$. ولنفرض أن هذا الجسيم قد تحرك أو انتقل (أُزيح) تحت تأثير قوة ما فوصل بعد فترة زمنية مقدارها $\Delta t$ إلى الموضع $Q(x+\Delta x)$، بمعنى أن الجسيم قد وصل إلى الموضع $Q$ عندما كان الزمن $t+\Delta t$. انظر شكل (1.1).

شكل 1.1




متجهات الموضع والإزاحة لجسيم
يتحرك في خط مستقيم

يعرَّف "متجه موضع" الجسيم عند النقطة $P(x)$، ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ على أنه المتجه $\overrightarrow{OP}$ كما هو موضح في شكل (1.1). وبالتالي فإن

$$\vec{r} = x\,\hat{i} \tag{1.1}$$

حيث $\hat{i}$ هو متجه الوحدة في اتجاه محور - $x$. طول متجه الموضع $\vec{r}$ أو مقداره هو

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2} = x \tag{1.2}$$

أما "متجه الإزاحة" *(Displacement Vector)* فيعرَّف على أنه المتجه

$\overrightarrow{PQ}$، أو المتجه $\overrightarrow{\Delta r}$، حيث نجد من شكل (1.1) أن

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{PQ} = \left((x + \Delta x) - x\right)\hat{i} = \Delta x\, \hat{i} \qquad (1.3)$$

ويكون مقدار متجه الإزاحة هو

$$\Delta r = \left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2} = \Delta x \qquad (1.4)$$

وللحصول على متجه سرعة الجسيم المتحرك نجد أن المسافة التي تحركها الجسيم من النقطة $P$ إلى النقطة $Q$ على مسار حركته هي $\Delta x$ وقد استغرقت هذه الرحلة الزمن $\Delta t$، عندئذٍ فإن السرعة المتوسطة (نرمز لها بالرمز $v_{av.}$) التي تحرك بها الجسيم المسافة $\Delta x$ في الفترة الزمنية $\Delta t$ هي

$$v_{av.} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1.5)$$

ولأنه كلما صغرت الفترة الزمنية $\Delta t$، كلما كان $\Delta x$ صغيراً، وبالتالي يمكن الحصول على السرعة اللحظية، والتي تعطي وصفاً دقيقاً للحركة أفضل من السرعة المتوسطة، إذن علينا البحث عن السرعة اللحظية. في الواقع فالمقصود عادةً بالسرعة هو السرعة اللحظية وليس السرعة المتوسطة. وبالطبع يمكن الحصول على السرعة اللحظية (أو اختصاراً السرعة) عندما تقترب الفترة الزمنية $\Delta t$ من الصفر. هكذا ـ من مفهوم

المشتقة الأولى ـ يمكن القول أن السرعة اللحظية (السرعة) التي تحرك بها الجسيم على محور ـ $x$ مسافة $\Delta x$ في الفترة الزمنية $\Delta t$ تعطى في الصورة

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x^{\cdot} \tag{1.6}$$

حيث يرمز $x^{\cdot}$ للمشتقة الأولى للمسافة $x$ بالنسبة للزمن $t$. وبما أن إشارة السرعة $v$ هي نفسها إشارة الإزاحة $\Delta x$، إذن فإن اتجاه الحركة يكون في اتجاه زيادة $x$ إذا كانت إشارة السرعة موجبة، وفي اتجاه تناقص $x$ إذا كانت إشارة السرعة سالبة. عندئذٍ فإن متجه سرعة الجسيم كما في شكل (1.1) هو

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\, \hat{i} = \frac{dx}{dt}\, \hat{i} = x^{\cdot}\, \hat{i} \tag{1.7}$$

وأيضاً نجد ـ بنفس المنطق السابق ـ أنه عندما تؤول الفترة $\Delta t$ إلى الصفر $(\Delta t \to 0)$ أن العجلة اللحظية أو اختصاراً العجلة ـ معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن ـ تعطى من العلاقة

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x^{\cdot}}{\Delta t} = \frac{dx^{\cdot}}{dt} = x^{\cdot\cdot} \tag{1.8}$$

فإذا كانت إشارة العجلة موجبة كان اتجاه العجلة في الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$، وإذا كانت إشارة العجلة سالبة كان اتجاه العجلة في الاتجاه

السالب لمحور ـ $x$. وهكذا، نجد أن متجه العجلة للجسيم الذي في شكل (1.1) يأخذ الصورة

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta t}\, \hat{i} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}\, \hat{i} \tag{1.9}$$

حيث مقدار العجلة هو

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x})^2} = \ddot{x} \tag{1.10}$$

**مثال 1.1** الإحداثيات الكارتيزية لجسيم يتحرك في خط مستقيم في أية لحظة هي $x = t^3 + t^2$، حيث $t$ هو الزمن. أوجد مقدار السرعة والعجلة بعد مضي ثانية واحدة.

**الحل** نختار الخط المستقيم الذي يتحرك عليه الجسيم محور ـ $x$ ، بحيث تكون نقطة الأصل $O$ هي النقطة الثابتة. إذن فإن متجه موضع الجسيم هو

$$\vec{r} = x\hat{i} = \left(t^3 + t^2\right)\hat{i}$$

وبالتالي فإن متجه السرعة يصبح

$$\vec{v} = \left(3t^2 + 2t\right)\hat{i}$$

ومتجه العجلة يصبح

$$\vec{a} = (6t + 2)\hat{i}$$

عند $t = 1$ فإن مقداري كل من السرعة والعجلة يصبحان على الترتيب

$$v = 5\ \text{ft./sec.},\quad a = 8\ \text{ft./sec.}^2$$

.

## 1.2 العجلة كدالة في المكان أو الزمان أو السرعة

في المثال السابق وجدنا أنه يمكن الحصول على سرعة الجسيم وعجلته عند أية لحظة متى علمنا إحداثياته، أو بالأحرى متجه الموضع، وذلك بإجراء عملية التفاضل. والسؤال المطروح ـ الآن ـ هو: هل يمكن وصف حركة الجسيم المتحرك، أي الحصول على متجهات السرعة والموضع مثلاً متى علمنا عجلته فقط؟ الإجابة ـ طبعاً ـ بالإيجاب وذلك بإجراء العملية العكسية للتفاضل، أي التكامل. سنبين ذلك في ثلاث حالات:

**الحالة الأولى**

### إذا أعطيت العجلة $a$ كدالة في الزمن $t$

في هذه الحاله يمكن أن نحصل على علاقة بين السرعة والزمن، وأيضاً علاقة بين المسافة والزمن. نفرض أن

$$a = \psi(t)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$a = \frac{dv}{dt} = \psi(t) \quad \Rightarrow \quad v = \int \psi(t)dt + C_1$$

أو

$$v = \phi(t) + C_1 \; ; \; \phi(t) = \int \psi(t)dt$$

وبفصل المتغيرات، إذن

$$\frac{dx}{dt} = \phi(t) + C_1$$

وبالتالي فإن

$$x = \int \phi(t)dt + C_1 t + C_2 \; ; \quad C_1, C_2 - \text{Constants}$$

**مثال 1.2** يتحرك جسيم في الاتجاه الموجب لمحور السينات بعجلة $(6t+2)\ \text{ft./sec.}^2$ حيث $t$ هو الزمن. فإذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل وأصبحت سرعته $5\ ft./sec.$ بعد مضي ثانية واحدة. عين موضع الجسيم بعد خمس ثوان.

**الحل** متجه عجلة الجسيم هو

$$\vec{a} = (6t+2)\hat{i} \quad \Rightarrow \quad a = 6t+2$$

للحصول على مقدار السرعة، نستبدل المقدار $\frac{dv}{dt}$ بالعجلة $a$، فنحصل على

$$\frac{dv}{dt} = 6t + 2 \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int (6t + 2)dt + C_1$$

إذن فإن

$$v = 3t^2 + 2t + C_1$$

بما أن السرعة تكون $v = 5$ عندما $t = 1$، إذن فإن الثابت يصبح $C_1 = 0$، وبالتالي فإن السرعة تصبح

$$v = 3t^2 + 2t$$

وبما أن $v = \frac{dx}{dt}$، إذن

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2t \Rightarrow \int dx = \int \left(3t^2 + 2t\right)dt + C_2$$

أو

$$x = t^3 + t^2 + C_2$$

وبما أن $x = 0$ عندما $t = 0$، إذن فإن $C_2 = 0$، وبالتالي فإن موضع الجسيم كدالة في الزمن يعطى من

$$x = t^3 + t^2$$

وبعد مضي خمس ثوان فإن الجسيم يكون قد قطع مسافة 150 قدماً عن نقطة الأصل.

الحالة الثانية

## إذا أعطيت العجلة $a$ كدالة في السرعة $v$

في هذه الحالة يمكن أن نحصل على علاقة بين السرعة والزمن، وأيضاً علاقة بين السرعة والمسافة. نفرض أن

$$a=\varphi(v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=\varphi(v)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dv}{\varphi(v)}=dt+C \ \Rightarrow \ \Phi(v)=t+C \ ; \ \ \Phi(v)=\int\frac{dv}{\varphi(v)}$$

ولإيجاد العلاقة بين السرعة والمسافة $x$، نضع ـ أولاً ـ العجلة في الصورة

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx} \tag{1.11}$$

إذن فإن $a=\varphi(v)$ تتحول إلى

$$v\frac{dv}{dx}=\varphi(v)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل، نجد أن

$$\frac{vdv}{\varphi(v)}=dx \ \Rightarrow \ \int\frac{vdv}{\varphi(v)}=\int dx+C$$

أو

$$G(v) = x + C \;\; ; \;\; G(v) = \int \frac{v\,dv}{\varphi(v)}$$

حيث $C$ ثابت.

**مثال 1.3** يتحرك جسيم بعجلة تقصيرية مقدارها في أية لحظة يساوي ضعف مربع سرعة الجسيم عند هذه اللحظة. أوجد موضع الجسيم بعد مضي ثانيتين من بدء الحركة، علماً بأن الجسيم قد بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها $10\ ft./sec.$.

**الحل** بما أن الجسيم يتحرك بعجلة تقصيرية إذن فإن إشارة العجلة تكون سالبة، إذن

$$a = -2v^2 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -2v^2$$

بفصل المتغيرات، والتكامل، إذن

$$\int \frac{1}{v^2}\,dv = -2\int dt + c_1$$

أو

$$\frac{1}{v} = 2t + C_1 ; \;\; C_1 = -c_1$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة لدينا

$$t = 0; \quad v = 10 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{10}$$

وبالتالي فإن

$$v = \frac{10}{1 + 20t}$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل، نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{1 + 20t} \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{10}{1 + 20t} dt + C_2$$

أو

$$x = \frac{1}{2} \ln(1 + 20t) + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية ـ أيضاً ـ لدينا

$$t = 0; \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

إذن

$$x = \frac{1}{2} \ln(1 + 20t)$$

وبعد مضي ثانيتين يكون موضع الجسيم على بعد 1.9 قدماً تقريباً عن نقطة الأصل حيث $x = \frac{1}{2} \ln(41) \approx 1.9 \text{ ft.}$.

.✍

**الحالة الثالثة**

## إذا كانت العجلة $a$ معطاة كدالة في المسافة $x$

في هذه الحالة يمكن أن نحصل على علاقة بين المسافة والزمن. نفرض أن

$$a = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad v\frac{dv}{dx} = \varphi(x)$$

إذن فإن

$$\int v dv = \int \varphi(x) dx + C$$

أو

$$\frac{v^2}{2} = K(x) + C \;\Rightarrow\; v = \pm\sqrt{2K(x) + C_1}$$

حيث $C_1 = 2C$، وبفصل المتغيرات، وإجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2K(x) + C_1}$$

أو

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{2K(x) + C_1}} = \int dt + C_2$$

أو

$$F(x) = t + C_2 \;;\; F(x) = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{2K(x) + C_1}}$$

**مثال 1.4** يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة تقصيرية مقدارها $\frac{\pi^2}{16}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$. فإذا تحرك الجسيم من السكون من موضع على بعد قدم واحد من نقطة الأصل. فاثبت أن الجسيم يصل إلى نقطة الأصل بعد ثانية واحدة.

**الحل** بما أن العجلة تقصيرية، إذن فإشارتها سالبة، وبما أنه يمكن وضع العجلة على الشكل $a = v\frac{dv}{dx}$، إذن فإن

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\pi^2}{16}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$$

بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\int v dv = -\frac{\pi^2}{16}\int\left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx + C_1$$

أو

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)+C_1$$

حيث $C_1$ ثابت التكامل. ومن الشروط الابتدائية للحركة لدينا

$$t=0,\ v=0,\ x=1 \ \Rightarrow\ C_1=0$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

أو

$$v^2 = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) \Rightarrow v = \pm\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$$

ونختار الإشارة السالبة لأن $x$ تتناقص مع الزمن (العجلة تقصيرية).

بفصل المتغيرات، والتكامل، إذن

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x} \Rightarrow \int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}\int dt + C_2$$

لإجراء عملية التكامل نضع

$$x^2 = y \Rightarrow 2xdx = dy$$

فنحصل على

$$\frac{1}{2}\int \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{\pi}{4}\int dt + C_2$$

أو

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}(y) = \frac{\pi}{4}t + C_2$$

وبالعودة للتعويض $y = x^2$، إذن

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(x^2\right)=\frac{\pi}{4}t+C_2$$

ومن الشروط الابتدائية، لدينا

$$t=0,\ x=1\ \Rightarrow\ C_2=0$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(x^2\right)=\frac{\pi}{4}t\ \Rightarrow\ \cos^{-1}\left(x^2\right)=\frac{\pi t}{2}$$

ومنها نحصل على

$$x^2=\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

وبالتأكيد فإن الجسيم يصل إلى نقطة الأصل عندما $x=0$، أي عندما

$$\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \frac{\pi t}{2}=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ t=1$$

✍.

**ملخص**

(1) إذا تحرك جسيم في الاتجاه الموجب لمحور- $x$ ، بحيث يكون موضعه $x$ دالة في الزمن $t$، بمعنى أن $x=x(t)$، فإن سرعته، وعجلته $v=x^{\bullet}$، $a=x^{\bullet\bullet}$ - على الترتيب - ليس من الضروري أن يكونا دالتين في الزمن.

(2) إذا لم يتغير اتجاه السرعة أثناء الحركة، فإن هذا يعني أنها حركة خطية. أما إذا غيرت السرعة اتجاهها، فإن الحركة تكون حركة مستوية، أو حركة فراغية.

**مما سبق**

تتضح لنا الحقيقة التالية: عندما يكون اتجاه السرعة هو نفسه اتجاه العجلة، أي عندما تكون إشارة السرعة هي نفسها إشارة العجلة فإن السرعة تكون في حالة ازدياد. فإذا كان اتجاه السرعة عكس اتجاه العجلة، أي عندما تكون إشارة السرعة عكس إشارة العجلة فإن السرعة تكون في حالة نقصان.

## 1.3 كينماتيكا جسيم في خط مستقيم بعجلة ثابتة

وجدنا أن الحركة بصفة عامة يمكن أن تتم بعجلة متغيرة (تعتمد على الزمن أو البعد عن موضع ثابت)، كما يمكن أن تتم بعجلة ثابتة. وطبعاً فإن العجلة الثابتة تعني - رياضياً - أن

$$a = C \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = C, \;\; \frac{da}{dt} = 0; \;\; C = \text{Constant}$$

الأمر الذي يعني - أيضاً - أن السرعة تتغير بمقادير متساوية في الأزمنة المتساوية. أما إذا كانت العجلة هي التي تتغير بمقادير متساوية في

الأزمنة المتساوية، فإن هذا يعني ـ رياضياً ـ أن

$$\frac{da}{dt} = K; \quad K = \text{Constant}$$

هذا، ومن أمثلة الحركة بعجلة ثابتة حركة جسيم رأسياً لأسفل أو لأعلى تحت تأثير قوة وزنه فقط وبدون قوى مقاومة لحركته في الفراغ القريب من سطح الأرض، أي على ارتفاع صغير بالنسبة لنصف قطر الأرض. في هذه الحالة فإن الحركة تتم بعجلة ثابتة هي عجلة الجاذبية الأرضية *(Gravitational Acceleration)*، والتي يرمز لها بالرمز $g$. فإذا تحرك الجسيم رأسياً لأسفل تكون $g$ تزايدية، وإذا تحرك رأسياً لأعلى تكون $g$ تقصيرية حتى يسكن، ثم يبدأ في الهبوط بعجلة تزايدية $g$. واضح ـ بالتأكيد ـ أنه إذا سقط جسيم رأسياً إلى أسفل تحت تأثير وزنه في الفراغ القريب من سطح الأرض أن سرعته تزداد تدريجياً مع الزمن حتى تصل إلى السرعة القصوى عندما يصطدم الجسيم بالأرض.

**مثال 1.5** يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة ثابتة مقدارها يساوي $a_0$. فإذا بدأ هذا الجسيم حركته بسرعة ابتدائية $v_0$ من نقطة تبعد مسافة $x_0$ عن نقطة الأصل، أوجد سرعته، والمسافة المقطوعة بعد زمن قدره $t$.

**الحل** لنرمز لعجلة الجسيم بالرمز $a$، بما أن

$$a = a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = a_0$$

إذن، بفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\int dv = a_0 \int dt + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = a_0 t + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة، لدينا

$$t = 0, \;\; v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0$$

وبالتالي فإن

$$v = a_0 t + v_0$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل إذن

$$\frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0 \Rightarrow \int dx = \int (a_0 t + v_0) dt + C_2$$

أو

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة، لدينا

$$t = 0, \;\; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0$$

وبالتالي فإن

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

✍.

**وهكذا**

يمكن تلخيص نتائج المثال السابق فيما يلي: إذا تحرك الجسيم في خط مستقيم بعجله ثابتة $a_0$ - مثلاً - وبسرعة ابتدائية $v_0$، وإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة تبعد مسافة $x_0$ عن نقطة الأصل فإن المعادلات الآتية تكون مناسبة لوصف الحركة.

$$a = a_0, \; v = v_0 + a_0 t, \; x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \qquad (1.12)$$

**مثال 1.6** يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تتغير بمعدل ثابت مقداره $C$. فإذا بدأ هذا الجسيم حركته بعجلة ابتدائية $a_0$، وبسرعة ابتدائية $v_0$ من نقطة تبعد مسافة $x_0$ عن نقطة الأصل، أوجد السرعة، والمسافة كدوال الزمن.

**الحل** لنرمز لعجلة الجسيم المتحرك بالرمز $a$، بما أن $\frac{da}{dt} = C$، إذن، يمكن بفصل المتغيرات، والتكامل أن نحصل على

$$\int da = C \int dt + C_1 \;\; \Rightarrow \;\; a = Ct + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة، لدينا

$$t = 0, \;\; a = a_0 \;\; \Rightarrow \;\; C_1 = a_0$$

وبالتالي فإن

$$a = Ct + a_0$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل إذن

$$\frac{dv}{dt} = Ct + a_0 \Rightarrow \int dv = \int (Ct + a_0)dt + C_2$$

أو

$$v = \frac{1}{2}Ct^2 + a_0 t + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة، لدينا

$$t = 0, \quad v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = v_0$$

وبالتالي فإن

$$v = \frac{1}{2}Ct^2 + a_0 t + v_0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}Ct^2 + a_0 t + v_0$$

إذن

$$\int dx = \int \left(\frac{1}{2}Ct^2 + a_0 t + v_0\right)dt + C_3$$

أو

$$x = \frac{1}{6}Ct^3 + \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + C_3$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة، لدينا

$$t = 0, \quad x = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = x_0$$

وبالتالي فإن

$$x = \frac{1}{6} C t^3 + \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

✍.

## 1.4 معادلة حركة الجسيم في خط مستقيم

في هذا الفصل نحاول الحصول على معادلة حركة الجسيم في خط مستقيم. لنفرض أن هذا الخط هو محور ـ $x$، والذي نرمز له بالرمز $OX$. بالطبع فإن حركة هذا الجسيم هي نتيجة حتمية لتأثير قوى خارجية عليه. هذه القوى يمكن أن تكون قوى جذب نحو نقطة الأصل $O$، ويمكن أن تكون قوى طرد.

وبالطبع إذا تحرك الجسيم في الاتجاه السالب لمحور ـ $OX$ فإن عجلته تكون سالبة لأن $x$ في هذه الحالة تتناقص مع الزمن، وإذا تحرك الجسيم في الاتجاه الموجب لمحور ـ $OX$ فإن عجلته تكون موجبة لأن المسافة $x$ تزداد مع الزمن.

على أية حال، لدراسة كيناتيكا حركة الجسيم في خط مستقيم بعجلة متغيرة أو ثابتة يجب ـ أولاً ـ تعيين معادلة حركته، لذلك دعنا نبدأ بالتعريف التالي.

## تعريف كمية الحركة ـ Momentum
## 1.1

إذا تحرك جسيم كتلته، $m$، وكانت سرعته عند لحظة ما هي $v$ فإن كمية الحركة لهذا الجسيم عند هذه اللحظة هي الكمية المتجهة $\vec{P}$، حيث

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{1.13}$$

✍.

وإذا أخذنا في الاعتبار قانون نيوتن الثاني، والذي ينص على أن معدل التغير في كمية الحركة يتناسب طردياً مع القوة المؤثرة عليه وسببت له الحركة، بمعنى أنه إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم كتلته $m$ مسببة له حركة، وكانت كمية حركته عند لحظة ما هي الكمية المتجهة $\vec{P}$ فإن

$$\vec{F} \propto \frac{d}{dt}\left(\vec{P}\right) \tag{1.14}$$

أو

$$\vec{F} = k\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) \tag{1.15}$$

حيث $k$ مقدار ثابت. فإذا كانت كتلة الجسيم، $m$، تتغير مع الزمن

فإننا نحصل من المعادلة (1.15) على

$$\vec{F} = k\left( m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \right) \tag{1.16}$$

وإذا كانت كتله الجسيم ثابتة فإن هذا يعني أن معدل تغيرها بالنسبة للزمن يساوي الصفر، أي أن $\frac{dm}{dt} = 0$، وبالتعويض بذلك في (1.16) نحصل على

$$\vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.17}$$

وبما أن $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ، وإذا كانت وحدة القوة هي القوة التي إذا أثرت على وحدة الكتل أكسبتها وحدة العجلات فإن الثابت $k$ يصبح $k = 1$ ونحصل على

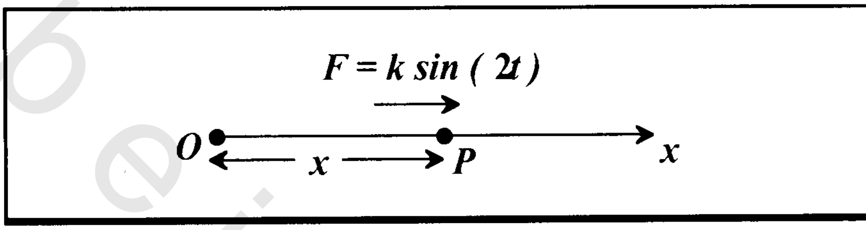
$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.18}$$

**مثال 1.7** يتحرك جسيم في خط مستقيم مبتدئاً من السكون تحت قوة تتناسب مع $\sin(2t)$، حيث $t$ هو الزمن. أوجد المسافة كدالة في الزمن.

**الحل** نختار نظام الإحداثيات الكارتيزية، ونفرض الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$ كما هو مبين بشكل (1.2).

**الحل** نختار نظام الإحداثيات الكارتيزية، ونفرض الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$ كما هو مبين بشكل (1.2).

**شكل 1.2**




نفرض أن $P$ هو موضع الجسيم عند اللحظة $t$، وحيث أن مقدار القوة التي سببت الحركة تتناسب مع $\sin(2t)$ وفي الاتجاه الموجب لمحور - $x$، إذن فإن مقدار القوة هو

$$F = k\sin(2t)$$

حيث $k$ ثابت التناسب. نفرض أن $a$ ترمز لعجلة الجسيم، إذن من (1.18) نجد أن معادلة الحركة في اتجاه تزايد $x$ هي

$$ma = F \;\Rightarrow\; m\frac{dv}{dt} = k\sin(2t)$$

لاحظ أننا استخدمنا هنا التعويض $a = \frac{dv}{dt}$. بفصل المتغيرات، والتكامل، نحصل على

$$\int dv = \frac{k}{m}\int \sin(2t)dt + C_1$$

أو

$$v = \frac{-k}{2m}\cos(2t) + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة لدينا

$$t = 0,\ \ v = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{k}{2m}$$

إذن السرعة هي

$$v = \frac{k}{2m}\left(1 - \cos(2t)\right)$$

وبما أن $v = \frac{dx}{dt}$، إذن، بالتعويض، ثم فصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2m}\left(1 - \cos(2t)\right)$$

أو

$$\int dx = \frac{k}{2m}\int \left(1 - \cos(2t)\right)dt + C_2$$

إذن

$$x = \frac{k}{2m}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية ـ أيضاً ـ نجد أن

$$t = 0,\ \ v = 0,\ \ x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

إذن فإن

$$x = \frac{k}{2m}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

✍.

## 1.5 حركة جسيم في مسافات بعيدة عن سطح الأرض

في هذا الفصل ندرس حركة الجسيمات تحت تأثير الجاذبية الأرضية وهي تتحرك في مسافات بعيدة عن الكرة الأرضية، بحيث تكون عجلتها (المتغيرة) متأثرة بعجلة الجاذبية الأرضية في الفضاء القريب من الأرض (الثابتة). لكن بدايةً، ليتنا نتذكر قانون الجذب العام أو ما يسمى بقانون التربيع العكسي.

### قانون التربيع العكسي 1.2

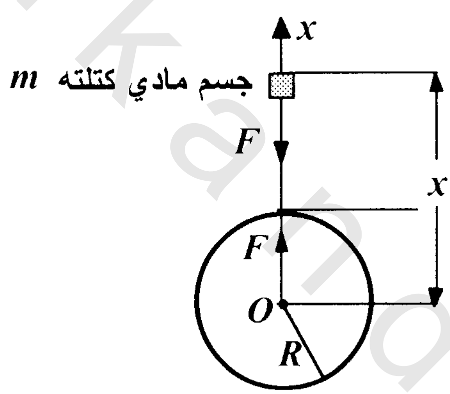
ينص قانون التربيع العكسي للعالم الجليل نيوتن على أنه توجد قوة جاذبية متبادلة بين أي جسمين ماديين في الكون، تؤثر في الخط الواصل بينهما، وتتناسب طردياً مع كتلة كل من الجسمين، وتتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما.

✍.

هذا. ونحاول الآن الحصول على الصورة العامة لعجلة جسيم يتحرك في مسافات بعيدة عن الكرة الأرضية. نفرض أن كتلة الجسيم $m_1$، وأنه على بعد $x$ عن مركز الأرض.

لنفرض ـ أيضاً ـ أن كتلة الأرض هي $m_2$، وأن نصف قطرها $R$. ولنفرض أن قوة الجذب بين الجسيم والأرض هي $F$. انظر شكل (1.3).

شكل 1.3




الكرة الأرضية، مركزها $O$ ، نصف قطرها $R$

عندئذٍ فإنه ـ طبقاً لقانون التربيع العكسي ـ نجد أن

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \tag{1.19}$$

حيث $G$ هو ثابت الجاذبية الكوني. وقد أُثبت ـ عملياً ـ أنه يساوي تقريباً المقدار

$$G \approx 6.673 \times 10^{-11}\ m^3 / kg / s^2 \qquad (1.20)$$

وإذا فرضنا أن الجسم يتحرك تحت تأثير القوة $F$ فقط بعجلة نرمز لها بالرمز $a$، فإننا نجد من قانون نيوتن الثاني أن

$$m_1 a = F \;\Rightarrow\; m_1 a = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \qquad (1.21)$$

وبالتالي فإن

$$a = G\frac{m_2}{x^2} \qquad (1.22)$$

لكننا نجد أنه في الفضاء القريب من سطح الأرض أو على سطح الأرض أن $x = R$، حيث $R$ هو نصف قطر الأرض، كما أن عجلة الجسيم، $a$، تكون مساوية لعجلة الجاذبية الأرضية $g$، والتي تساوي تقريباً

$$g \approx 980\ cm/s^2,\;\; g \approx 32.2\ ft/s^2 \qquad (1.23)$$

في هذه الحالة (أي عندما يكون $x = R,\ a = g$)، وبالتعويض في (1.22) نجد أن

$$g = G\frac{m_2}{R^2} \qquad (1.24)$$

أو

$$gR^2 = Gm_2 \qquad (1.25)$$

وبالتعويض مرة أخرى في (1.22) نجد أن العجلة التي يتحرك بها جسم مادي في الفضاء البعيد عن سطح الأرض هي

$$a = \frac{gR^2}{x^2} \tag{1.26}$$

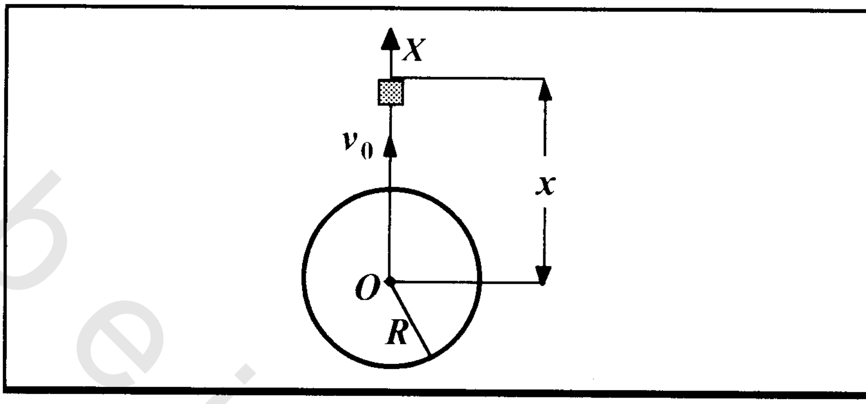
ولأن هذه العجلة تتجه دائماً نحو مركز الأرض فإنها تكون عجلة تقصيرية على الدوام بغض النظر عن كون الجسيم صاعداً لأعلى (المسافة $x$ تزداد مع الزمن) أو ساقطاً لأسفل (المسافة $x$ تتناقص مع الزمن). وبالتالي فإنها تأخذ دائماً الصورة

$$a = -\frac{gR^2}{x^2} \tag{1.27}$$

**مثال 1.8** قذف جسيم من على سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها $v_0$. أوجد سرعة الهروب *(Velocity of Escape)*، التي لو قذف بها هذا الجسيم فإنه لايعود إلى الأرض ثانية.

**الحل** نختار نظام الإحداثيات الكارتيزية، ونفرض الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$، حيث $O$ هو مركز الأرض، كما هو مبين بشكل (1.4).

شكل 1.4




للحصول على سرعة الهروب ندرس حركة الجسـيم في مسـافات بعيـدة تحت تأثير الجاذبية الأرضية. من (2.27) نجد أن عجلة هـذا الجسـيم هـي $a = -\dfrac{gR^2}{x^2}$، حيـث $x$ هـو البعـد عـن مركـز الأرض، $g$ هـي عجلـة الجاذبية الأرضية، بينما $R$ هـو نصـف قطـر الأرض. بفصـل المتغـيرات، والتكامل نحصل على

$$\frac{vdv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \int vdv = -gR^2\int\frac{dx}{x^2} + C$$

أو

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + C$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$x = R, \quad v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + \frac{1}{2}v_0^2 - gR$$

أو

$$\left(v^2 - v_0^2\right) = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)$$

للحصول على سرعة الهروب نضع $x \to \infty$ ،$v = 0,$ فنجد أن سرعة الهروب هي $v_0 = \sqrt{2gR}$.

✍.

**مثال 1.9** سقط جسيم إلى أسفل من سكون من مسافة بعيدة عن سطح الأرض. أوجد سرعة الوصول إلى الأرض.

**الحل** نختار نظام الإحداثيات الكارتيزية، ونفرض الاتجاه الموجب لمحور ـ $x$، حيث $O$ هو مركز الأرض، كما هو مبين بشكل (1.4).

من (2.27) نجد أن عجلة جسيم يسقط من مسافة بعيدة $h$ ـ مثلاً ـ تحت تأثير الجاذبية الأرضية هي $a = -\frac{gR^2}{x^2}$، حيث $x$ هو البعد عن مركز الأرض، $g$ هي عجلة الجاذبية الأرضية، بينما $R$ هو نصف قطر الأرض. بفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\frac{vdv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + C$$

ومن الشروط الابتدائية لدينا

$$x = h + R, \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-gR^2}{R+h}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} - \frac{gR^2}{R+h}$$

أو

$$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h+R}\right)$$

وطبعاً عندما يصل الجسيم إلى سطح الأرض فـإن $x = R$، وبـالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن

$$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h+R}\right) = \frac{2gRh}{(h+R)}$$

إذن سرعة الوصول هي

$$v = \sqrt{\frac{2gRh}{(h+R)}}$$

✍.

## 1.6 حركة جسيم في خط مستقيم في وسط مقاوم

إذا تحرك جسيم في وسط مقاوم للحركة كالهواء أو الماء مثلا، فإن حركته تلقى مقاومة، هذه المقاومة تعتمد على خصائص الوسط الذي تتم فيه الحركة، كما تعتمد على سرعة الجسيم، والتي تعتبر من أهم العوامل التي تتوقف عليها مقاومة الهواء لحركته. فإذا كانت سرعة الجسيم $v$، وكتلته $m$، ومقاومة الهواء $R$ فإن العلاقة الرياضية التي تربط المقاومة والسرعة والكتلة هي

$$R = mk\Phi(v) \tag{1.28}$$

حيث $\Phi(v)$ هي دالة في السرعة، والثابت $k$ يعتمد على خواص الوسط الذي تتم فيه الحركة، ويعتمد ـ أيضاً ـ على الشكل الهندسي للجسم في حالة الأجسام المتماسكة.

### تعريف السرعة الاتزانية 1.3

تعرف السرعة الاتزانية لجسيم متحرك تحت تأثير قوة معينة بعجلة ثابتة أو عجلة متغيرة، وفي وسط مقاوم لحركته على أنها السرعة التي نحصل عليها عندما تتلاشى العجلة في حالة (في حالة العجلة المتغيرة)، أو عندما يصل الزمن إلى اللانهاية (في حالة العجلة الثابتة).

.

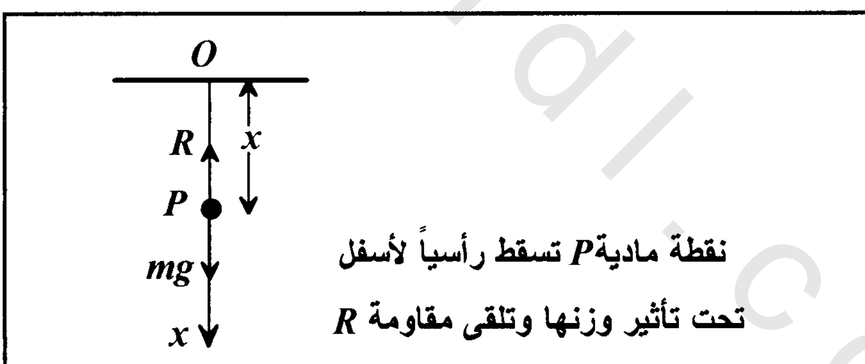
**ملاحظة**

سبب تسمية السرعة بالاتزانية ناتج عن حالة التساوي أو حالة الاتزان بين وزن النقطة المادية والمقاومة عندما تتلاشى العجلة. بمعني أنه إذا سارت النقطة المادية بسرعتها الاتزانية فإن هذا يدل على أن وزنها يساوي المقاومة التي تعوق حركتها.

**مثال 1.10** أوجد السرعة الاتزانية (السرعة القصوى) لجسيم يسقط رأسياً تحت تأثير الجاذبية الأرضية في وسط مقاوم فيه $\Phi(v) = v$.

**الحل** نفرض أن عجلة النقطة المادية $a$، وكتلتها $m$، والمقاومة $R$. انظر شكل (1.5).

**شكل 1.5**




من (1.28)، نحصل على

$$R = mk\Phi(v) = mkv$$

إذن، معادلة حركة الجسيم هي

$$ma = mg - mkv$$

أو

$$a = g - kv$$

وتصبح السرعة اتزانية أو أكبر ما يمكن عندما تنعدم العجلة، أي عندمـا يكون

$$0 = g - kv$$

وبالتالي فالسرعة الاتزانية هي

$$v_{\max} = \frac{g}{k}$$

✍.

**مثال 1.11** تسقط نقطة مادية من سكون تحت تأثير وزنها رأسياً إلى أسفل في وسط مقاومته تتناسب طردياً مع السرعة. ادرس الحركة.

**الحل** نفرض أن كتلة النقطة المادية هي $m$، وحيث أن المقاومة تتناسب طرديا مع السرعة إذن فإن المقاومة تعطى من المعادلة

$$R = mkv$$

فإذا اخترنا نقطة بدء الحركة نقطة أصـل، عندئـذٍ تكـون معادلـة الحركـة للنقطة المادية لأسفل هي

$$ma = mg - kmv$$

بالقسمة على $m$، نجد أن العجلة هي

$$a = g - kv$$

وعندما تتلاشى العجلة $a$ (تساوي الصفر) فإن النقطة المادية تتحرك بالسرعة الثابتة (السرعة الاتزانية)، والتي نرمز لها بالرمز $v_{max}$، حيث نجد أن

$$0 = g - kv \quad \Rightarrow \quad v_{max} = g/k \quad \Rightarrow \quad k = g/v_{max}$$

وبالعودة مرة أخرى إلى العجلة، والتعويض عن $k = g/v_{max}$ فإنها تأخذ الصورة

$$a = g - \frac{g}{v_{max}} v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{v_{max}} (v_{max} - v)$$

وبفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dv}{v_{max} - v} = \frac{g}{v_{max}} dt$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$-\ln(v_{max} - v) = \frac{g}{v_{max}} t + C$$

ولكن عندما $t = 0$ فإن $v = 0$، ونحصل على الثابت $C$ في الصورة $C = \ln\left(\frac{1}{v_{max}}\right)$. عندئذٍ فإن

$$\frac{v_{\max} - v}{v_{\max}} = e^{-\left(\frac{g}{v_{\max}}\right)t}$$

إذن السرعة هي

$$v = v_{\max}\left(1 - e^{-\left(\frac{g}{v_{\max}}\right)t}\right)$$

من هذه المعادلة نلاحظ أن السرعة تصبح السرعة القصوى، أي أن $v = v_{\max}$ فقط عندما $t \to \infty$ وهذا يعني أن السرعة تقترب من سرعتها النهائية، ولكنها لن تصل إليها أبداً. أيضاً، باستبدال $\frac{dx}{dt}$ بالسرعة $v$ في العلاقة السابقة نجد أن

$$\frac{dx}{dt} = v_{\max}\left(1 - e^{-\left(\frac{g}{v_{\max}}\right)t}\right)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل، نجد أن

$$\int dx = v_{\max}\int\left(1 - e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right)dt + C$$

أو

$$x = v_{\max}\left(t + \frac{v_{\max}}{g}e^{-\frac{g}{v_{\max}}t}\right) + C$$

ولكن، من الشروط الابتدائية نجد أنه عندما $t = 0$ فإن $x = 0$، ويكون الثابت $C$ هو

$$C = -\frac{(v_{\max})^2}{g}$$

وبالتالي فإن

$$x = v_{\max}\left(t + \frac{v_{\max}}{g}e^{-\frac{g}{v_{\max}}t} - \frac{v_{\max}}{g}\right)$$

ومن هذه المعادلة (حيث $x$ دالة في الزمن $t$) نلاحظ أن $x \to \infty$ عندما $t \to \infty$، أي أن النقطة المادية يمكن أن تصل إلى سرعتها القصوى بعد قطعها مسافة لانهائية، وذلك لن يحدث أبداً.

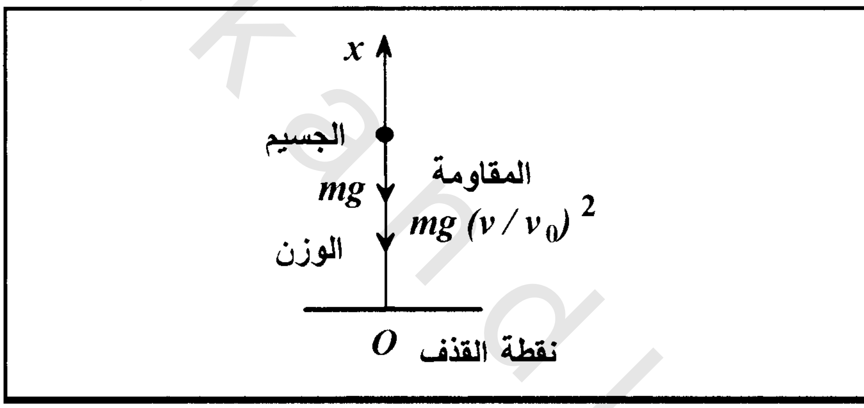
✍.

**مثال 1.12** قذف جسيم كتلته $m$ رأسياً لأعلى بسرعة $v_0$ في وسط مقاومته هي $mg\left(\frac{v}{v_0}\right)^2$، حيث $v$ هي سرعة الجسيم عند أية لحظة، بينما $g$ هي عجلة الجاذبية الأرضية.

اثبت أن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو $\frac{v_0^2}{g}\ln\left(\sqrt{2}\right)$، وأنه يعود إلى موضع القذف بالسرعة $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$.

**الحل** ليكن موضع القذف هو نقطة الأصل $O$. القوى المؤثرة على الحركة هي الوزن $mg$ رأسياً إلى أسفل، وقوة المقاومة رأسياً إلى أسفل أيضاً. انظر شكل (1.6).

**شكل 1.6**




معادلة الحركة هي

$$ma = -mg - mg\left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

وبالتالي فإن

$$a = -\frac{g}{v_0^2}\left(v_0^2 + v^2\right)$$

الآن، باستبدال الكمية $v\dfrac{dv}{dx}$ بالعجلة $a$، ثم فصل المتغيرات، وإجراء التكامل نحصل على

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v_0^2}\left(v_0^2 + v^2\right)$$

أو

$$\int \frac{vdv}{\left(v_0^2 + v^2\right)} = \int -\frac{g}{v_0^2}dx + C_1$$

وهكذا نجد أن

$$\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2 + v^2\right) = -\frac{gx}{v_0^2} + C_1$$

هذا، ومن الشروط الابتدائية للحركة نجد أن $v = v_0$ عندما $x = 0$، وبالتالي فإن الثابت يصبح

$$C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(2v_0^2\right) = \ln\left(\sqrt{2}v_0\right)$$

إذن

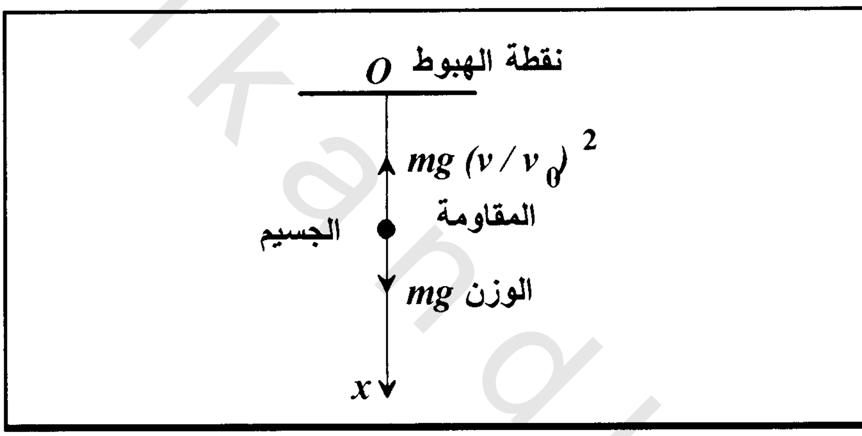
$$\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2 + v^2\right) = -\frac{gx}{v_0^2} + \ln\left(\sqrt{2}v_0\right)$$

ولإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم نضع $v = 0$ في المعادلة الأخيرة، فنحصل على

$$x_{max}=\frac{v_0^2}{g}\ln\left(\frac{\sqrt{2}v_0}{v_0}\right)=\frac{v_0^2}{g}\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

والآن ندرس حركة الجسيم إلى أسفل فنأخذ في هذه الحالة نقطه أقصى ارتفاع على أنها نقطة الأصل، وهي النقطة التي يبدأ الجسيم منها الهبوط رأسياً لأسفل. انظر شكل (1.7).

شكل 1.7




معادلة الحركة هي

$$ma=mg-mg\left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

إذن

$$a=\frac{g}{v_0^2}\left(v_0^2-v^2\right)$$

الآن، باستبدال الكمية $v\dfrac{dv}{dx}$ بالعجلة $a$، ثم فصـل المتغـيرات، وإجـراء التكامل نحصل على

$$\int \frac{vdv}{v_0^2 - v^2} = \int \frac{g}{v_0^2}dx + C_2$$

أو

$$-\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2 - v^2\right) = \frac{gx}{v_0^2} + C_2$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة نجد أن $v = 0$ عندما $x = 0$، وبالتـالي فإن

$$C_2 = -\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2\right) = \ln\left(\frac{1}{v_0}\right)$$

إذن فإن

$$-\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2 - v^2\right) = \frac{gx}{v_0^2} + \ln\left(\frac{1}{v_0}\right)$$

وبما أنه عندما يصل الجسيم إلى موضع القذف فإنه يكون قد قطع نفـس مسافة أقصى ارتفاع وهي $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}\ln\left(\sqrt{2}\right)$، إذن فإن

$$-\frac{1}{2}\ln\left(v_0^2 - v^2\right) = \frac{g}{v_0^2} \times \frac{v_0^2}{g}\ln\sqrt{2} + \ln\frac{1}{v_0} = \ln\frac{\sqrt{2}}{v_0}$$

وهكذا نجد أن

$$\ln\left(v_0^2 - v^2\right) = \ln\left(\frac{v_0^2}{2}\right)$$

أو

$$v^2 = v_0^2 - \frac{v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

✍.

## 1.7 مسائل

(1) يتحرك جسيم في الاتجاه الموجب لمحور السينات بعجلة $\left(4t^2+5\right)\ ft/sec$. فإذا بدأ الجسيم حركته من سكون من نقطة تبعد مسافة مقدارها $10\ ft$ عن نقطة الأصل $O$، وأصبحت سرعته $30\ ft/sec$ بعد مضي 3 ثوان من بدء الحركة. عين سرعة الجسيم، وبعده عن نقطة الأصل $O$ بعد مُضّي زمن قدره $t$ من لحظة بدء الحركة.

(2) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن العلاقة بين المسافة $x$ والزمن $t$ تعطى من $x = A\cos(wt) + B\sin(wt)$ حيث $w,\ B,$ $A$ ثوابت. اثبت أن السرعة $v$، والعجلة $a$ تعطيان من العلاقتين التاليتين

على الترتيب

$$v^2 = w^2\left(A^2 + B^2 - x^2\right), \ \ a = -w^2 x$$

(3) بدأ جسيم الحركة على خط مستقيم من السكون من نقطة تبعد مسافة $b$ عن نقطة الأصل $O$، بعجلة مقدارها $k^2\left(x + \frac{b^4}{x^3}\right)$ حيث $x$ ُبعد الجسيم عن نقطة الأصل، بينما $k$ مقدار ثابت. اثبت أن الجسيم يصل الى $O$ بعد مضي زمن قدره $\frac{\pi}{4k}$، ثم أوجد الزمن الذي يأخذه الجسيم من بدء حركته حتى يصل إلى نقطة تبعد عن $O$ مسافة $\frac{b}{\sqrt{2}}$.

(4) قذف جسيم إلى أعلى بسرعة $v \ \ ft/\sec$ وبعد ُمضّي زمن قدره $t$ قذف جسيم آخر إلى أعلى من نفس النقطة وبنفس السرعة. اثبت أن الجسيمين يتلاقيان على الارتفاع $\left(4v^2 - g^2t^2\right)\Big/8g$ بعد زمن قدره $\left(\frac{t}{2} + \frac{v}{g}\right)$ من لحظة قذف الجسيم الأول.

(5) يتحرك جسيم في خط مستقيم تحت تأثير قوة مركزية طاردة مقدارها $k^2x$ لوحدة الكتل حيث $x$ ُبعد النقطة عن المركز الطارد $O$، كما أن $k$ ثابت. فإذا قذف الجسيم نحو مركز الطرد بسرعة مقدارها $kA$ من موضع يبعد مسافة $A$ من $O$، اثبت أن الجسيم يقترب باستمرار من $O$ ولكنه لايصل إليها أبداً.

(6) قذف جسيم من نقطة على سطح الأرض رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية $v_0$ في وسط تتناسب فيه المقاومة مع مربع السرعة فعاد إلى نقطة القذف بالسرعة $u$. اثبت أن السرعة النهائية (الاتزانية) $v_m$ في هذا الوسط المقاوم تعطى بالعلاقة $v_m = \frac{\sqrt{v_0^2 - u^2}}{u v_0}$.

(7) يتحرك جسيم تحت تأثير الجاذبية الأرضية مع وجود مقاومة تتناسب مع مربع السرعة. ادرس الحركة صعوداً وهبوطاً.

(8) يتحرك جسيم كتلته $m$ في خط مستقيم تحت تأثير قوة مقاومة لحركته مقدارها $\frac{mv^2}{k}$، حيث $k$ ثابت، $v$ هي سرعة الجسيم عند أية لحظة. فإذا قذف الجسيم بسرعة ابتدائية $v_0$. أوجد الزمن اللازم لكي يصل الجسيم إلى موضع على بعد $2k$ من نقطة القذف.

(9) سقط جسيم رأسياً من سكون في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة فإذا علم أن $v_{max}$ هي السرعة النهائية في هذا الوسط، فاثبت أن الجسيم يتحرك بسرعة قدرها $\frac{1}{2}v_{max}$ بعد زمن قدره $\frac{v_{max}}{g}\ln(4)$، ويكون قد تحرك مسافة قدرها $\frac{v_{max}^2}{g}\left(\ln(4) - \frac{3}{4}\right)$.

(10) قذف جسيم كتلته $m$ رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية $u$، في وسط مقاومته هي $mkv^2$، حيث $k$ ثابت موجب وسرعة الجسيم في أية لحظة هي $v$. اثبت أن هذا الجسيم يعود إلى نقطة القذف بسرعة مقدارها $u/\sqrt{1+ku^2/g}$.

(11) أسقط جسيمان رأسياً في لحظة واحدة في وسط مقاومته تتناسب مع مربع السرعة فإذا علم أن سرعتيهما الاتزانيتين في هذا الوسط هما $v_1$، $\frac{1}{2}v_1$ على الترتيب، فاثبت أنه بعد زمن قدره $t$ تكون $v_2v_1^2 = v_3\left(v_1^2 + v_2^2\right)$، حيث $v_2$ هي سرعة الجسيم الأول، بينما $v_3$ سرعة الجسيم الثاني بعد زمن قدره $t$.

(12) أدرس حركة تساقط قطرات المطر المتساقط، إذا كانت هذه القطرات تلقى مقاومة تتناسب مع سرعتها.

(13) يتحرك جسيم من سكون تحت تأثير قوة ثابتة مقدارها يجعل السرعة النهائية تساوي $u$. فإذا كانت هنالك قوة مقاومة للحركة مقدارها $mc\left(1+v^2\right)$، حيث $c$ ثابت موجب، أما $v$ فهي سرعة الجسيم. أوجد علاقة بين السرعة والمسافة. واستنتج فى حالة صغر الثابت $c$ أن السرعة تكون $v = u\sqrt{2cx}$.

*******************************************