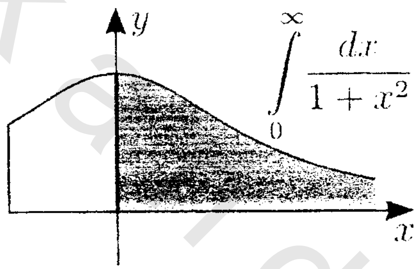
الباب الثامن

التكامل المعتل

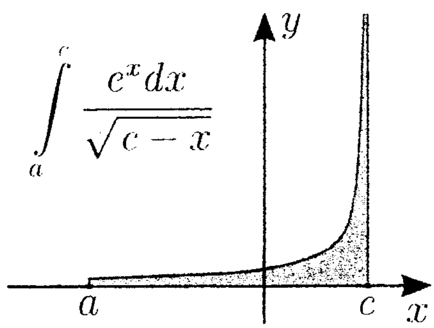
Improper Integrals

فى حساب التكامل، التكامل المعتل هو نهاية التكامل المحدود كنهاية النقطة لفترة التكامل التى تقترب من من عدد حقيقى محدود او من $-\infty \to \infty$ فى بعض الحالات تقترب من نهايتى الطرفين كما هو موضح بالشكل التالى:



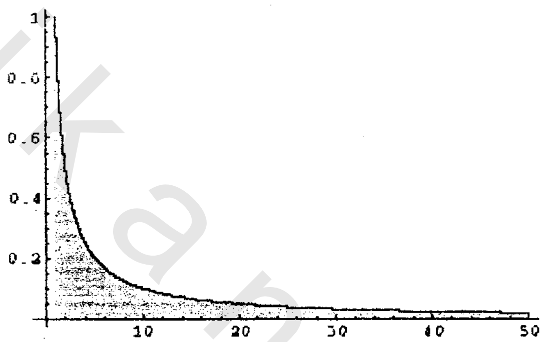
التكامل المعتل من النوع الاول :

فالتكامل يحتاج لتعريف المجال المحدود كما هو موضح بالشكل التالى:



تكامل ريمان المعتل من النوع الثانى :

ربما هذا التكامل ليست له خاصية الوجوود وذلك بسبب وجود خط التقارب العمودىللدالة. لنفرض دوران الدالة **$y = 1/x, x > 1$** حول محور **x** وبالتالى سوف نحصل على سطح يسمى **Gabriel's Horn** **غابرييل هورن**. دعنا اولا ان نحسب المساحة اسفل هذا المنحنى من $x = 1$ الى ∞ كما هو موضح بالشكل التالى:



وتعرف هذه المساحة كالتالى:

$$Area = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

وبالنظر الى هذا التكامل، نجد انه من الواضح توجد مشكلة لان هذة المساحة ليست محددة. وفى الواقع هذا التكامل غير محدود. أى تكامل له نهاية غير محددة او نقط داخل نطاق التكامل يسمى التكامل المعتل **(Improper integrals)**والان كيف يمكن ايجاد هذا التكامل؟

اولا لابد من ايجاد قيمة هذا التكامل المعدل والذى هو التكامل المحدود.

$$\int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx$$

والان سنحسب النهاية على انها يؤول الى ∞. وبالتالى سنوجد احد النهايتين كالتالى:

1. $$\int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{1}^{b} = \ln|b| - \ln|1| = \ln|b|$$

2. $$\lim_{b \to \infty} \ln|b| = \infty$$

وبالتالى تصبح المساحة اسفل المنحنى تؤول الى مالانهاية. والطريقة المتبعة فى هذة الحالة هى:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} (\ln|x|) \Big|_{1}^{b} = \lim_{b \to \infty} (\ln|b| - \ln|1|) = \infty$$

1- فاذا كنت نتيجة التكامل مالانهاية او ليس للتكامل وجود وغير معرف بالتالى يسمى هذا التكامل المعتل انه متباعد.

2- واذا كانت النهاية محدودة يسمى هذا التكامل متقارب.

بالتالى لابد من حساب حجم الجسم الناشئ من الدوران بطريقة القرص:

$$Volum = \int_a^b \pi (r(x))^2 dx$$

$$Volum = \int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \pi x^{-2} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{\pi}{b} + \pi \right) = \pi$$

فنجد ان الحجم محدود. وسوف نناقش بعض الامثلة التالية موضحين كيف يمكن حساب التكامل غير المعتل:

<u>تعريف:</u> التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ يسمى تكاملا معتلا اذا تحققت إحدى الشروط الآتية :

1- إذا كانت الدالة f(x) نقطة عدم اتصال(أو اكثر من نقطة) فى الفترة $a \le x \le b$

2- اذا كانت احدى حدود التكامل هى المالانهاية.

طريقة حل التكاملات الغير متصلة

أ-اذا كانت الدالة التكاملية f(x) متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ ولكنها غير متصلة عند x=b فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\in 0^+} \int_a^{b-\in} f(x)dx$$

بشرط وجود النهاية.

ب-إذا كانت f(x) متصلة فى الفترة $a < x \leq b$ ولكنها غير متصلة عند x=a فإن

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\in 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\in} f(x)dx$$

ح- اذا كانت الدالة f(x) متصلة عند جميع نقط الفترة $a \leq x \leq b$ ولكنها غير متصلة عند النقطة x=c حيث $a < c < b$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\in} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

بشرط وجود كلتا النهايتين.

امثلة محلولة

Solved Problems

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

<u>الحل</u>

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b \to 4} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b \to 4} \int_4^{4-b} -u^{-1/2} du = \lim_{b \to 4} (-2u) \Big|_4^{4-b} \quad ...(I)$$

نفرض ان

Let $u = 4 - x \Rightarrow du = -dx$,when $x = 0 \Rightarrow u = 4,$
when $x = b \Rightarrow u = 4 - b.$

$$I = \lim_{b \to 4}(2\sqrt{4-b} + 2\sqrt{4}) = 4$$

بالتالى يكون هذا التكامل متقارب (Convergence) وقيمته = 4.

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3}$

<u>الحل</u> نلاحظ ان احد حدى التكامل مالانهاية، وبالتالى نتبع الطريقة التى تجعلة متقارب كالتالى:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_{b+1}^{-1} u^{-3} du = \lim_{b \to -\infty} \left(\frac{u^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_{b+1}^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Let $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$,when $x = b \Rightarrow u = b + 1,$
when $x = -2 \Rightarrow u = -1.$

$$\therefore I = \lim_{b \to -\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(b+1)}\right) = -\frac{1}{2}$$

بالتالى يكون هذا التكامل متقارب (convergence) وقيمته = $-1/2$.

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

الحل نلاحظ ان العدد 0 يسبب مشكلة لمقام هذا التكامل وبالتالى لابد ان نجعل النهاية تقترب من 0 لهذا التكامل كالتالى:

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to 0}\int_{\sqrt{b}}^1 2e^u du = \lim_{b\to 0}(2e^u)\Big|_{\sqrt{b}}^{1} \ldots(I)$$

$$Let \quad u=\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \text{ ,} when \quad x=b \Rightarrow u=\sqrt{b},$$

$$when \quad x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\therefore I = \lim_{b\to 0}\left(2e - 2e^{\sqrt{b}}\right) = 2e-2.$$

بالتالى هذا التكامل المعتل متباعد (divergence) وقيمته = $2e-2$.

مثال أحسب التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{\left(3x^2+2\right)^3}dx$

الحل نلاحظ ان حدى التكامل مالانهاية، وبالتالى نتبع الطريقة التى تجعلة متقارب كالتالى:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{\left(3x^2+2\right)^3}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{3x}{\left(3x^2+2\right)^3}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{3x}{\left(3x^2+2\right)^3}dx \ldots\ldots\ldots(I)$$

بالتالى يكون لدينا تكاملين معتلين ولابد ان يكون التكاملين متقاربين، واذا كان احدهم غير متقارب يكون التكامل الاصلى غير متقارب.

Let $u = 3x^2 + 2 \Rightarrow du = 6xdx$, when $x = b \Rightarrow u = 3b^2 + 2$, when $x = 0 \Rightarrow u = 2$. Also, when $x = c \Rightarrow u = 3c^2 + 2$

$$\therefore I = \lim_{b \to -\infty} \frac{1}{2} \int_{3b^2+2}^{2} u^{-3} du + \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2} \int_{2}^{3c^2+2} u^{-3} du$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \left(-\frac{1}{4u^2} \right) \Bigg|_{3b^2+2}^{2} + \lim_{c \to \infty} \left(-\frac{1}{4u^2} \right) \Bigg|_{2}^{3c^2+2}$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4(3b^2+2)} \right) + \lim_{c \to \infty} \left(-\frac{1}{4(3c^2+2)} + \frac{1}{16} \right) = 0$$

وحيث ان النهاية الاولى تقترب الى $1/16$ والنهاية الثانية تقترب من

العدد $-1/16$ لذلك التكامل المعتل متقارب ويقترب من العدد 0

<u>مثال</u> أحسب التكامل $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

<u>الحل</u> دعنا نحسب مساحة الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ للفترة

$[1, \infty) \to [1, t], t > 1$

$$A_t = \int_{1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_{1}^{t} = 1 - \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$A = \lim_{t \to \infty} A_t = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1$$

$$\therefore \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$$

دعنا نضع طريقة الحل فى حالة الفترات اللانهائية. هناك ثلاث حالات اساسية:

1. $If \quad \int_a^t f(x)dx$

هذا التكامل موجود لكل قيم t>a وبالتالى فأن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

شرط ان تكون النهاية موجودة ومحدودة.

2. $If \quad \int_t^b f(x)dx$

هذا التكامل موجود لكل قيم t<b وبالتالى فأن:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

شرط ان تكون النهاية موجودة ومحدودة.

3. If $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ and $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ are both convergence

اذا كان كلا من التكاملين متقاربين فأن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

حيث c اى عدد اختيارى.

<u>مثال</u> حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا احسب قيمته: $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$

<u>الحل</u>

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{x \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\ln(x) \right) \Big|_{1}^{t}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\ln(t) - \ln 1 \right)$$

$$= \infty$$

وبالتالى فأن التكامل متباعد.

Fact حقيقة

If $a > 0$ then $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} dx$

يكون متقارب اذا كان $P > 1$ ومتباعدا اذا كان $p \le 1$

مسائل محلولة

Solved Problems

<u>مثال</u> حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد و اذا كان متقاربا احسب قيمته:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$$

<u>الحل</u>

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{x \to \infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$= \lim_{x \to \infty} (-2)\sqrt{3-x}\,\Big|_{1}^{0}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3-t}\right)$$

$$= -2\sqrt{3} + \infty$$

$$= \infty$$

وبالتالى فأن التكامل متباعد.

<u>مثال</u> حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد و اذا كان متقاربا احسب قيمته:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\,dx$$

<u>الحل</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

والان سنحسب كل تكامل على حدة كالتالى:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{x\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

وبالتالى فأن التكامل الاول متقارب.

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{x\to\infty}\int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

وبالتالى فأن التكامل الثانى متقارب. فيكون التكامل الاصلى متقاربا وقيمتة

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

<u>مثال</u> حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته: $\int_{-2}^{\infty} \sin x \, dx$

<u>الحل</u>

$$\int_{-2}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-2}^{t} \sin x \, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(-\cos x \right) \Big|_{-2}^{t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\cos 2 - \cos t \right)$$

النهاية غير موجودة وبالتالى التكامل يكون متباعد.

التكامل المتقطع او الغير متصل

Discontinuous Integrand

1 – اذا كانت الدالة f(x) متصلة فى الفترة $[a,b)$ وغير متصلة عند

x=b فأن

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية.

2- اذا كانت f(x) متصلة فى الفترة $[a,b)$ وغير متصلة عند x=a:
الدالة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

بشرط وجود النهاية.

3- اذا كانت الدالة f(x) متصلة عند $x = c, \quad where \quad a < c < b$

وكلا من

$$\int_a^c f(x)dx \quad and \quad \int_c^b f(x)dx$$

متقاربين فأن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

بشرط وجود كلا النهايتين.

4- اذا كانت الدالة f(x) غير متصلة عند $x = a, \quad and \quad x = b$

واذ كان كلا من التكاملين الاتين متقاربين

$$\int_a^c f(x)dx \quad and \quad \int_c^b f(x)dx$$

فأن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

حيث c اى عدد اختيارى.

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx$$

الحل

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx &= \lim_{x\to 3^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx \\
&= \lim_{x\to 3^-}\left(-2\sqrt{3-x}\right)\Big|_0^t \\
&= \lim_{x\to 3^-}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{3-t}\right) \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

حيث ان النهاية موجودة فان التكامل موجود وقيمته $2\sqrt{3}$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته:

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} dx$$

<u>الحل</u>

هذا التكامل غير متصل عند $x = 0$ وبالتالى سوف نتقسم التكامل الى النقطة جزئين عند هذة النقطة كالتالى:

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^3} dx$$

والان سوف ندرس التكاملين لمعرفة التقارب:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{x \to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_{-2}^{t}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= -\infty$$

سنتوقف عند هذة النقطة لان التكامل عندها متباعد فلا داعى لدراسة النقطة الاخرى.

<u>مثال</u> حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته: $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx$

الحل

هذا التكامل عند حدود ∞ وبالتالى سوف نقسم التكامل الى جزئين عند اى نقطة كالتالى

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

لكى يكون التكامل متقارب لابد من تقارب شقى التكامل.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_t^1$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t} \right)$$

$$= \infty$$

وحيث ان التكامل الاول متباعد فيكون التكامل الاصلى متباعد ايضا.

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

الحل

نلاحظ ان الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست متصلة عند النقطة x = 3

$$\int_0^3 f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\delta\to0^+}\arcsin\frac{x}{3}\Big]_0^{3-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا

احسب قيمته:
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$$

الحل

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ ليست متصلة عند النقطة $x=\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2}\text{.........}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-2\sqrt{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right\}+1\right]=\left[0+2\sqrt{1-0}\right]=2$$

مثال اثبت ان الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست لها معنى.

الحل الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ليست لها معنى اذا كانت ليست لها نهاية

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\ln(2-x)\right]_0^{2-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln\varepsilon}-\frac{1}{\ln 2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\frac{2}{\varepsilon}}{\ln 2\ln\varepsilon} = \infty$$

مثال حدد ما اذا كان التكامل الاتى متقارب او متباعد واذا كان متقاربا احسب قيمته:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$$

الحل نلاحظ ان احد حدى الدالة ∞ اذن

$$\int_0^\infty \ldots\ldots dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big]_0^u = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

مثال احسب قيمته التكامل:

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx$$

الحل

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 e^{2x}dx = \lim_{u\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2}\Big]_u^0 = \frac{1}{2}-\lim_{u\to-\infty}\frac{e^{2u}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{2x}dx = \frac{1}{2}.$$

مثال احسب قيمته التكامل:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

الحل

$$Q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}$$

نلاحظ ان احد حدى لدالة $\pm\infty$ بالتالى سنعتبر النهايات

$$\lim_{v\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}+\lim_{u\to\infty}\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}$$

$$=\lim_{v\to-\infty}\tan^{-1}e^{x}\Big]_{v}^{0}+\lim_{u\to\infty}\tan^{-1}e^{x}\Big]_{0}^{u}$$

$$=(0-0)+\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}$$

مثال احسب المساحة المحددة بالدالة $y^{2}=\dfrac{x^{2}}{1-x^{2}}$ و محورى التماثل $x=1,x=-1$.

الحل من تماثل الدالة نجد انها غير متصلة عند $x=1$ بالتالى:

$$\int_{0}^{4}\text{.......}dx=\lim_{\in\to0^{+}}\int_{0}^{1-\in}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\lim_{\in\to0^{+}}\left[-(1-x^{2})^{1/2}\right]_{0}^{1-\in}$$

$$=\lim_{\in\to0^{+}}\left[1-(2\in-\in^{2})^{1/2}\right]=1\,square\quad units.$$

وتكون المساحة المطلوبة A تساوى 1 وحدة مربعة.

تمارين

إثبت ما يأتى :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

2- $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$

3- $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

4. $\int_0^1 \ln x dx = -1$

5- $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$ ليس له معنى

6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = 1$

7. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{e}$

8. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1$

10. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{2}$

* * *