الباب السابع

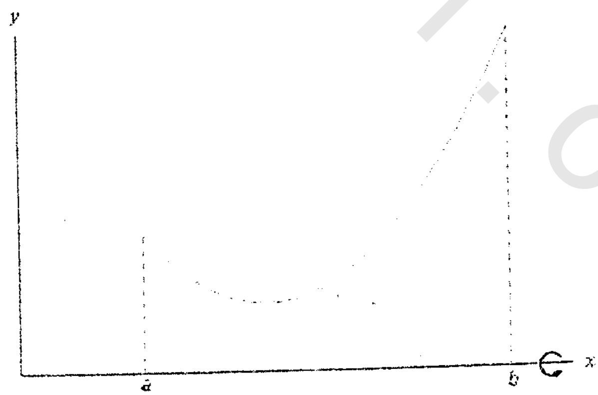
حجم المجسم الدورانى

Volume of Solid Revolution

Method of Rings

المجسم الدورانى هو المجسم الذى يتولد من دوران مساحة مستوية حول مستقيم يقع فى مستواها. ومن هذا التعريف ينتج أن مقطع هذا المجسم بمستوى عمودى على محور الدوران عبارة عن دائرة أو حلقة دورانية مركزها على محور الدوران. وبواسطة تعريف ريمان للتكامل المحدود يمكن حساب حجم مثل هذه المجسمات.

سوف نبدأ بحساب حجم الجسم الدورانى. لعمل ذلك سوف نبدأ بالدالة $y = f(x)$ فى الفترة $[a,b]$.

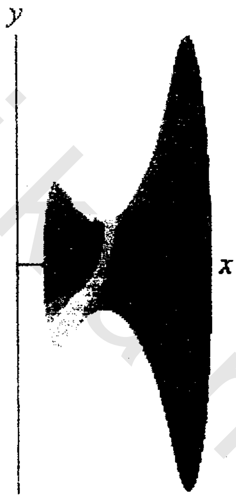


وبالدوران حول محور x-axis نحصل على الحجم فى المنطقة ذات

الابعاد الثلاثية

$$V=\int_a^b A(x)dx\,,\qquad V=\int_c^d A(y)dy$$

كما بالشكل الاتى



فى حالة القرص الصلب تكون المساحة:

$$A=\pi(radius)^2$$

حيث ان نصف القطر يعتمد على الدالة ومحور الدوران.وفى حالة الحلقة

تكون المساحة:

$$A = \pi\left(\begin{pmatrix} outer \\ radius \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} inner \\ radius \end{pmatrix}^2\right)$$

تطبيقات هندسية

أمثلة محلولة Solved Problems

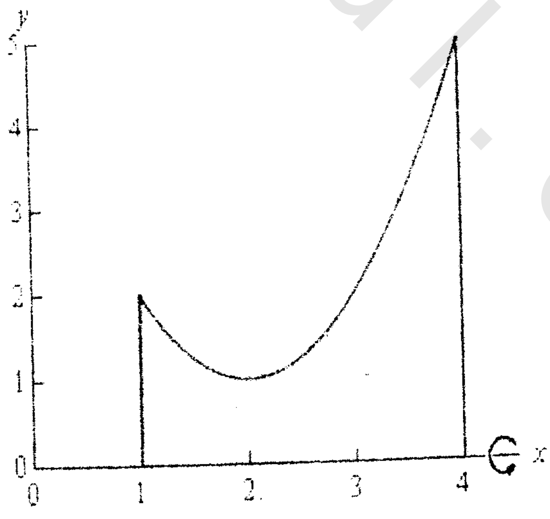
مثال أوجد حجم الجسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة

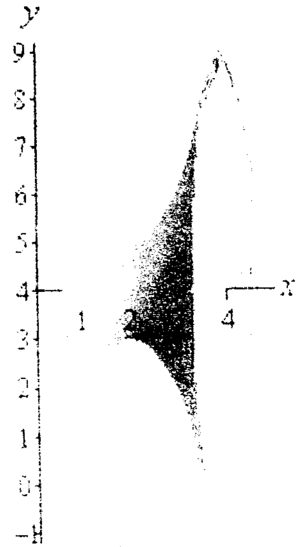
$$y = x^2 - 4x + 5, x = 1, \quad x = 4$$

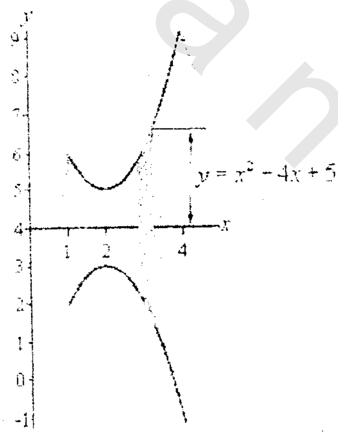
حول محور x و محور y

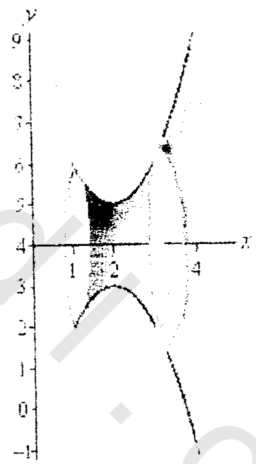
الحل

نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:









وتكون المساحة

$$A = \pi(x^2 - 4x + 5)^2 = \pi(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع

من $x = 1$ والمقطع الثانى من $x = 4$ الاول يبدا

وبالتالى يكون حجم الجسم المطلوب هو

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

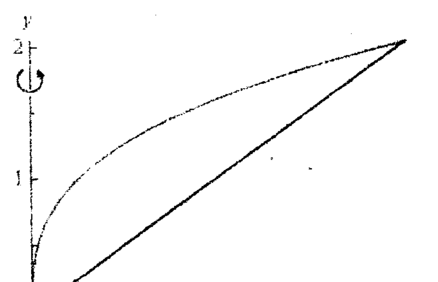
$$= \pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)\,dx$$

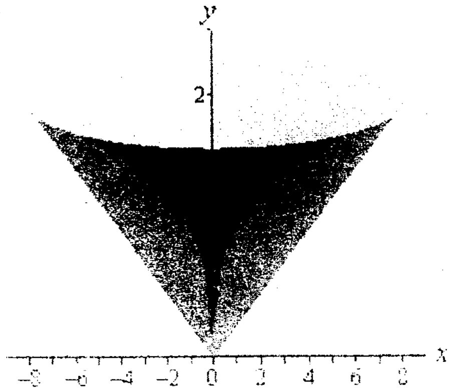
$$\therefore V = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^3 - 20x^2 + 25x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{78}{5}\pi$$

<u>مثال</u> أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران جزء من المنطقة

المحددة $y = \frac{x}{4}$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ حول محور y و محور x

<u>الحل</u> نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:

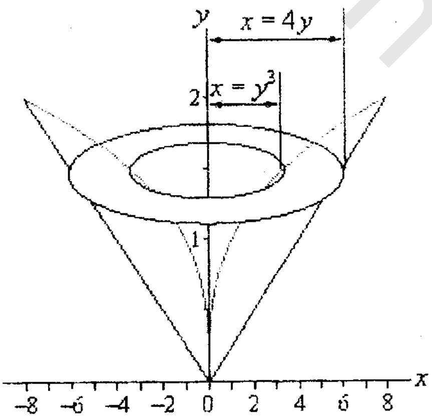


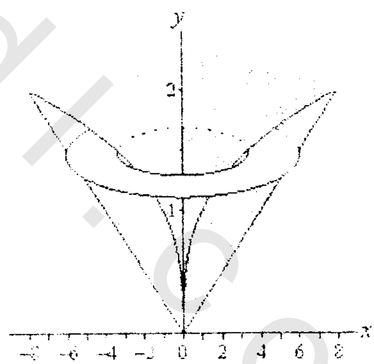


حيث ان $x = f(y)$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \quad x = y^3 , \; y = \frac{x}{4} \Rightarrow \quad x = 4y$$

والان سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالى





وبالتالى مساحة المقطع المراد حسابة

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi(16y^2 - y^6)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع الاول يبدا من $y=0$ والمقطع الثانى من $y=2$ وبالتالى يكون الحجم المطلوب

$$V=\int_c^d A(y)dy$$

$$=\pi\int_0^2 (16y^2-y^6)dy$$

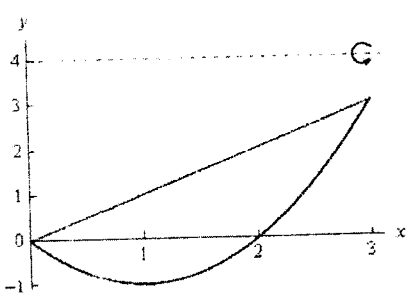
$$=\pi\left(\frac{16}{3}y^3-\frac{1}{7}y^7\right)\Bigg|_0^2$$

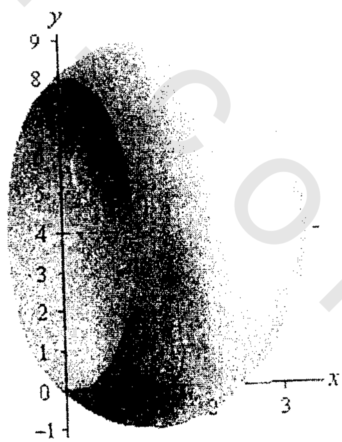
$$=\frac{512\pi}{21}$$

<u>مثال</u> أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

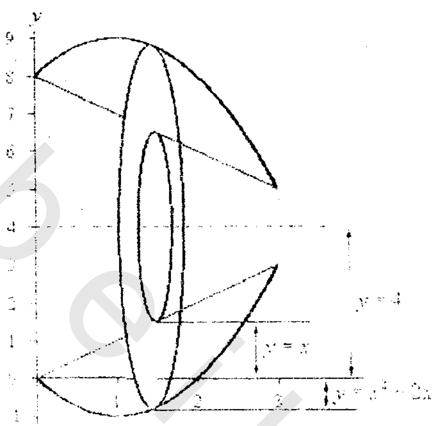
$y=x$, $y=x^2-2x$ حول الخط $y=4$.

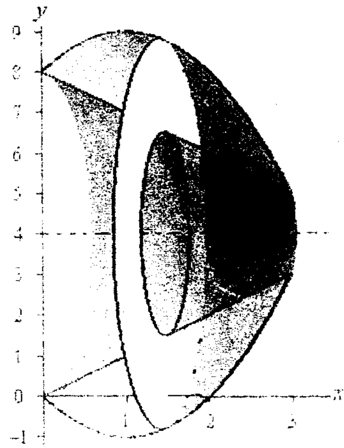
<u>الحل</u> نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:





والان سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالى





$$inner \quad radius = 4 - x$$

$$outer \quad raduis = 4 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 4$$

وبالتالى مساحة المقطع المراد حسابة

$$A(x) = \pi((-x^2 + 2x + 4)^2 - (4 - x)^2)$$

$$= \pi(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع

والمقطع الثانى من $x = 3$ الاول يبدا وبالتالى يكون الحجم المطلوب

من $x = 0$

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x)dx$$

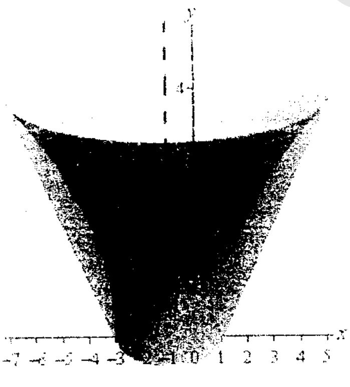
$$= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 - x^4 - \frac{5}{3} x^3 + 12x^2 \right) \Bigg|_0^3$$

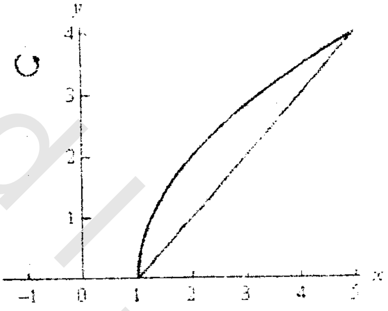
$$= \frac{153\pi}{5}$$

مثال أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

$y = x - 1 \quad , y = 2\sqrt{x-1}$ حول الخط $x = -1$

الحل نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:

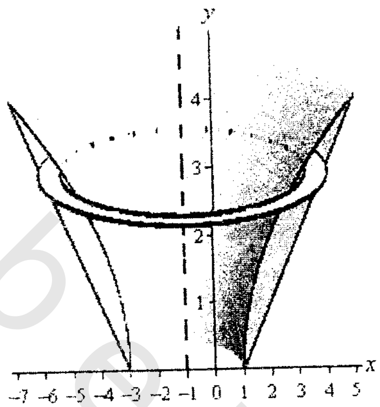


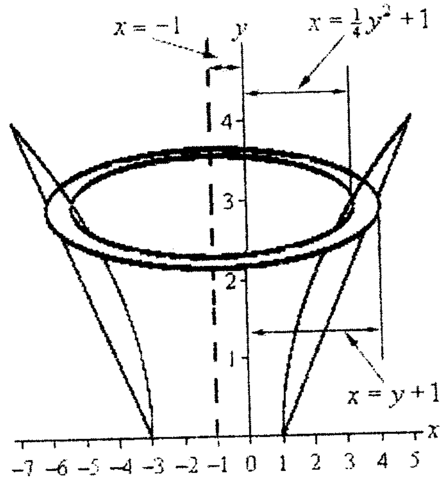


والان سنبحث حدود التكامل كما موضح بالرسم التالى

$$y = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{4} + 1$$

$$y = x - 1 \Rightarrow \quad x = y + 1$$





$$inner \quad radius = \frac{y^2}{4} + 1 + 1 = \frac{y^2}{4} + 2$$

$$outer \quad radius = y + 1 + 1 = y + 2$$

وبالتالى مساحة المقطع المراد حسابة

$$A(y) = \pi\left((y+2)^2 - (\frac{y^2}{4}+2)^2\right) = \pi\left(4y - \frac{y^4}{16}\right)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع

والمقطع الثانى من $y = 4$ الاول يبدا وبالتالى يكون الحجم المطلوب

من $y = 0$

$$V = \int_c^d A(y)dy \qquad = \pi \int_0^4 (4y - \frac{y^4}{16})dy$$

$$= \pi\left(2y^2 - \frac{1}{80}\right)\Big|_0^4 = \frac{96\pi}{5}$$

طريقة الاسطوانة

Method of Cylinders
or Method of Shells

فى الجزء السابق ناقشنا كيف يمكن ايجاد **الحجوم** الناتجة من الدوران.
اما فى هذا الجزء سوف نناقش كيف يمكن حساب **مساحة المقاطع** للحلقة او للقرص والاسطوانة ومن ثم الحجوم باستخدام العلاقات الاتية:

$$V = \int_a^b A(x)dx, \qquad V = \int_c^d A(y)dy$$

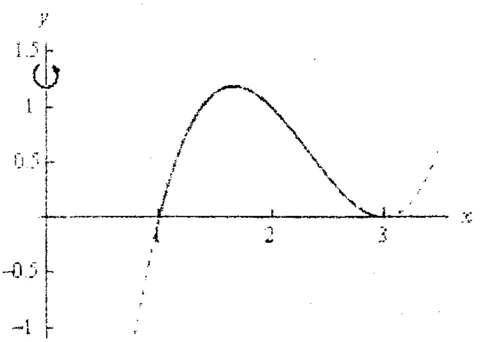
تطبيقات هندسية- مسائل محلولة

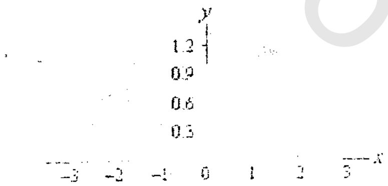
Solved Problems

مثال أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

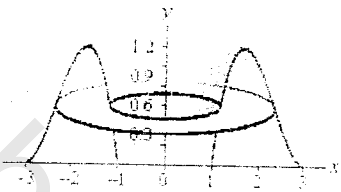
$y = (x-1)(x-3)^2$ حول محور x بالنسبة الى محور y

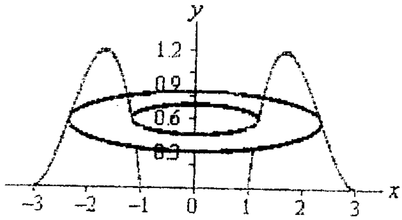
الحل نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:



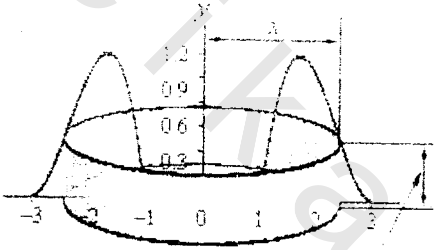


واذا اردنا استخدام الحلقات لهذا الحسم الصلب هنا فيكون الشكل المراد استخدامه فى هذة الحالة:

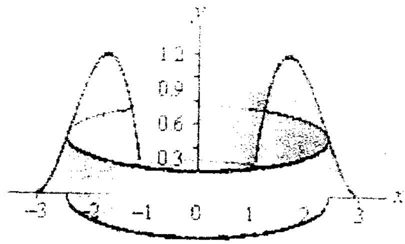




وهذا سيقودنا الى مسائل عديدة وهو ما سنوضحة بالرسم التالى:



$y = (x-1)(x-3)^2$



وبالتالى يكون مساحة سطح الاسطوانة تعطى بالعلاقة الاتية:

$$A(x) = 2\pi(radius)(height)$$
$$= 2\pi(x)\left((x-1)(x-3)^2\right)$$
$$= 2\pi(x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x)$$

والان سنحتاج الى حساب حدود التكامل حيث مساحة المقطع

والمقطع الثانى من $x = 3$ الاول يبدا وبالتالى يكون حجم الجسم

من $x = 1$

المطلوب هو:

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

$$=2\pi\int_1^3 (x^4-7x^3+15x^2-9x)dx$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{7}{4}x^4+5x^3-\frac{9}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3$$

$$=\frac{24\pi}{5}$$

ملاحظة:

الطريقة المستخدمة فى المثال السابق تسمى طريقة الاسطوانة او طريقة الهياكل وبالتالى المعادلة المستخدمة لكل الحالات فى حساب المساحات هى:

$$A=2\pi(radius)(height)$$

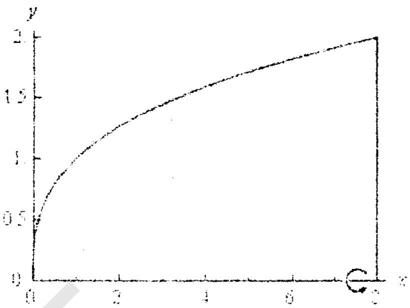
مثال

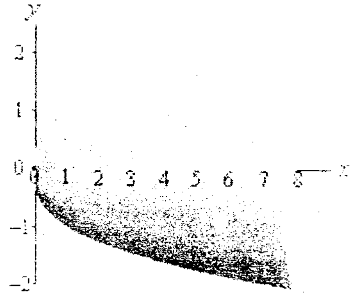
أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

$y=\sqrt[3]{x}\,, x=8$ حول محور x بالنسبة الى محور x

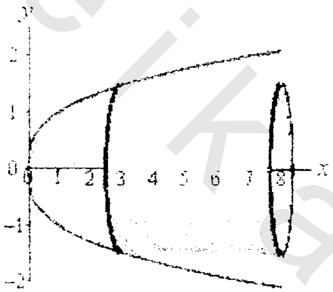
الحل

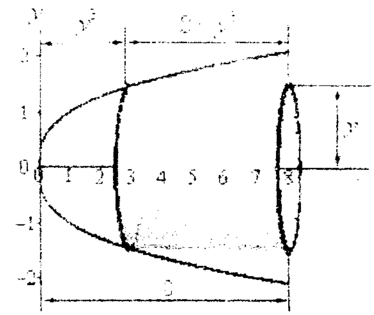
نبدا اولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:





$$x = f(y) \Rightarrow y\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad x = y^3$$





وتكون المسافة من من الطرف الخارجى الى $x = 8$ والعرض هى:

الخط $8 - y^3$ الخط

وبالتالى تكون مساحة المقطع هى:

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi(radius)(width) \\ &= 2\pi(y)(8 - y^3) \\ &= 2\pi(8y - y^4) \end{aligned}$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالى:

تنقطع الاسطوانة الاولى الى قرص $y = 0$ كما تنقطع الاسطوانة الثانية

عند $y = 2$ وهذة هى حدود التكامل وبالتالى يكون حجم الجسم المطلوب

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (8y - y^2)\,dy$$

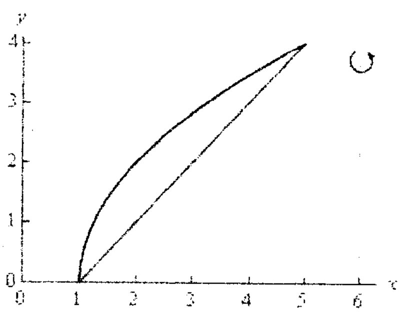
$$= 2\pi \left(4y^2 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Bigg|_0^2$$

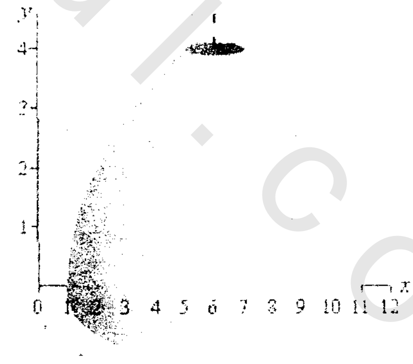
$$= \frac{96\pi}{5}$$

<u>مثال</u> أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

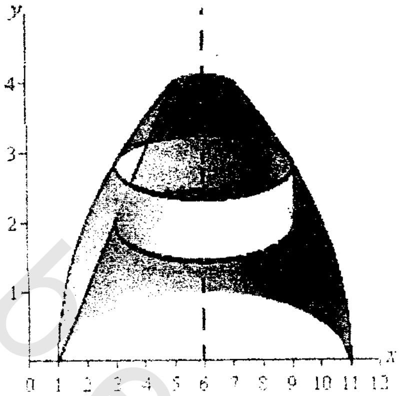
$y = 2\sqrt{x-1}, y = x - 1$ حول الخط $x = 6$.

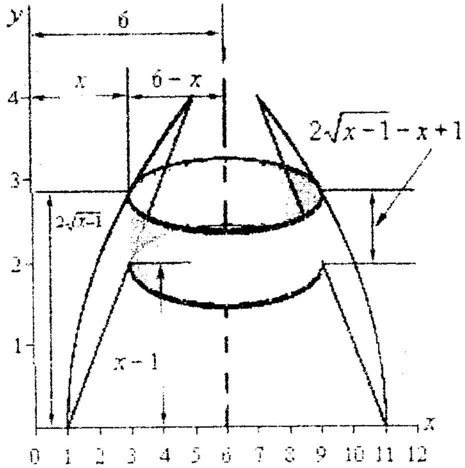
<u>الحل</u> نبدا أولا برسم المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران كالتالى:





وللاكثر توضيحا تأخذ الشكل التالى:





وهذا يعنى ان نصف قطر الاسطوانة هو $6-x$ هى المسافة من محور x الى طرف الاسطوانة. وبالتالى تكون مساحة المقطع هى:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= 2\pi(radius)(height) \\
&= 2\pi(6-x)(2\sqrt{x-1}-x+1) \\
&= 2\pi(x^2-7x+6+12\sqrt{x-1}-2x\sqrt{x-1})
\end{aligned}
$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالى:

تنقطع الاسطوانة الاولى الى قرص عند $x = 0$ كما تنقطع الاسطوانة الثانية عند $x = 5$ وهذة هى حدود التكامل.

وبالتالى يكون حجم الجسم المطلوب

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

$$=2\pi\int_1^5 (x^2-7x+6+12\sqrt{x-1}-2x\sqrt{x-1})dx$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x+8(x-1)^{3/2}-\frac{4}{3}(x-1)^{5/2}\right)\Bigg|_1^5$$

$$=2\pi\left(\frac{136}{15}\right)$$

$$=\frac{272\pi}{15}$$

مثال أوجد حجم الحسم الصلب الناتج من دوران المنطقة المحددة ب

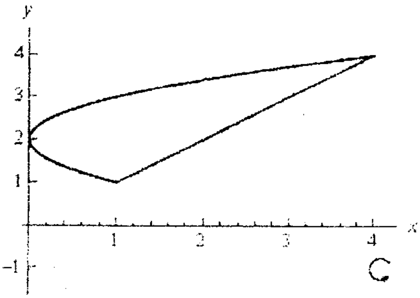
$x=(y-2)^2, y=x$ حول الخط $y=-1$

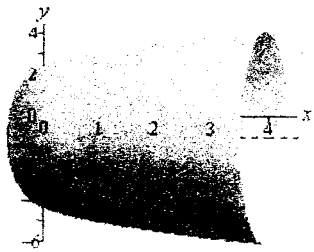
الحل نبدا اولا حساب نقط التقاطع كالتالى:

$$y=(y-2)^2$$
$$y=y^2-4y+4$$
$$0=y^2-5y+4$$
$$0=(y-4)(y-1)$$

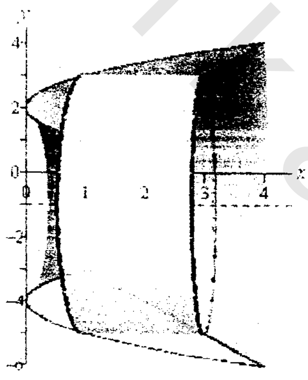
بالتالى تتقاطع المنحنيات عند $y=1, y=1$

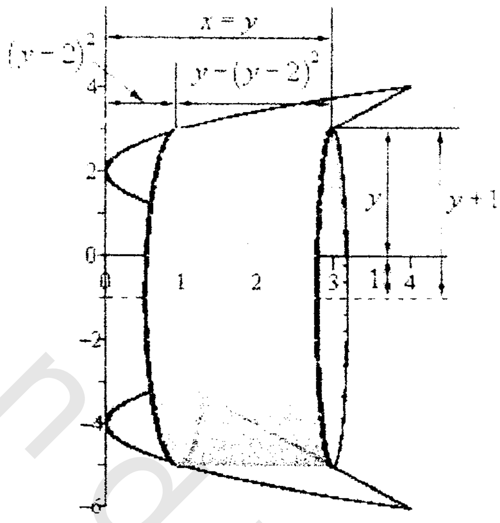
وتكون المنطقة المحددة والجسم الناتج من الدوران موضحة بالرسم التالى:





والرسم التوضيحى لذلك





وبالتالى تكون مساحة المقطع هى:

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi(radius)(width) \\ &= 2\pi(y+1)(y-(y-2)^2) \\ &= 2\pi(-y^3+4y^2+y-4) \end{aligned}$$

والان سنبحث حدود التكامل كالتالى:

تنقطع الاسطوانة الاولى الى قرص عند $y=1$ كما تنقطع الاسطوانة

عند $y = 4$ وهذة هى حدود التكامل. ويكون حجم الجسم المطلوب

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 (-y^3 + 4y^2 + y - 4)\,dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 4y \right) \Big|_1^4$$

$$= 2\pi \left(\frac{136}{15} \right)$$

$$= \frac{272\pi}{15}$$

تطبيقات هندسية للحجوم

Engineering Applications for Volumes

هنا سنبحث عن **كمية الشغل المبذول** من **القوة** لتحريك بعض الاشياء.

ففى **الفيزياء** نعتبر ان القوة F عندما تحرك جسم ما الى مسافة d الثابتة وبالتالى **يكون الشغل المبذول** المطلوب يعطى بالعلاقة

$$W = Fd$$

وفى معظم الاحيان نجد ان القوة ليست ثابتة. دعنا نفترض ان القوة عند اى x تعطى العلاقة $F(x)$ بالتالى يكون الشغل المبذول لتحريك جسم من $x = a \to x = b$ تعطى بالعلاقة

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

مع ملاحظة انه اذا كانت القوة ثابتة تأخذ العلاقة الشكل التالى:

$$W = \int_a^b F dx$$

$$= Fx \Big|_a^b$$

$$= F(b-a)$$

حيث **b-a** هى المسافة المقطوعة d.

أمثلة محلولة Solved Problems

<u>مثال</u> زنبرك **(spring)** طولة الطبيعى 20 سم. وقوه مقدارها **40 N** متصلة بالزنبرك تحركة الى الطول **30 cm . ما مقدار الشغل المبذول** لتحريك طول الزنبرك من **35 cm** الى **38 cm** .

<u>الحل</u>

$$F(x) = kx, \qquad k > 0$$

$k > 0$ يسمى. من الشروط الابتدائية يمكننا ايجاد هذا الثابت كالتالى

القوة 40 N اللازمة لتحريك الزنبرك مسافة قدرها

$$30\text{cm}-20\text{cm} = 10\text{cm} = 0.10\text{m}$$

وبأستخدام قانون هوك Hooke's Law نحصل على:

$$40 = 0.10k \Rightarrow k = 400$$

وطبقا لقانون هوك فأن لقوة اللازمة لتحريك الزنبرك مسافة ما من

طولها الطبيعى x يعطى بالعلاقة:

$$F(x)=400x$$

وهنا نريد ايجاد الشغل المبذول لتحريك الزمبرك مسافة من 35 سم الى 38 سم. اولا لابد من تحويل هذة المسافات الى الطول الطبيعى بالمتر فنحصل على المسافة المراد تحريكها بالمتر وهى من 0.15m الى 0.18m

فيكون الشغل المبذول هو

$$W=\int_{0.15}^{0.18}400x\,dx$$

$$=200x^{2}\Big|_{0.15}^{0.18}$$

$$=1.98J$$

مثال

اذا كان لدينا كابل وزنة 2 رطل / قدم مرفق به دلو مليء بالفحم الذي يزن 800 باوند. وكان الدلو في البداية في الجزء السفلي عند 500 قدم للمنجم. اجب عن كل من العناصر التالية:

1- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلو الى نقطة الوسط للمنجم.

2- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلو من نقطة الوسط للمنجم الى اعلى البئر.

3- اوجد الشغل المبذول لرفع الدلوعلى طول الطريق حتى مدخل المنجم .

الحل

قبل الاجابة لابد من حساب القوة كالتالى:

نفرض ان الطول المسحوب مسافة ما x وعند المنتصف تكون $x = 250$

وفى اعلى المنجم تكون $x = 500$ وبالتالى فأن عند اى نقطة يبقى هناك حوالى

$500 - x$ قدم للمنجم

$$F(x) = weight \quad of \quad cable \quad + \quad weight \quad of \quad buket$$
$$= 2(500 - x) + 800$$
$$= 1800 - 2x$$

$$1- \quad W = \int_0^{250} F(x)dx$$
$$= \int_0^{250} (1800 - 2x)dx$$
$$= (1800x - x^2)\Big|_0^{20}$$
$$= 387500 ft - lb$$

$$2- \quad W = \int_{250}^{500} F(x)dx$$
$$= \int_{250}^{500} (1800 - 2x)dx$$
$$= (1800x - x^2)\Big|_{250}^{500}$$
$$= 262500 \quad ft - 1b$$

$$3- \quad W = \int_0^{500} F(x)\,dx$$

$$= \int_0^{500} (1800 - 2x)\,dx$$

$$= (1800x - x^2)\Big|_0^{500}$$

$$= 650000 ft - lb$$

مثال كابل 20 ألف قدم يزن 80 رطلا وتتدلى من سقف مبنى دون لمس الارض اوجد الشغل المبذول لرفع نهاية اسفل السلسلة الى اعلى حتى يلامس السقف.

الحل قبل الاجابة لابد من حساب الوزن كالتالى:

$$\frac{80 \quad lbs}{20 \quad ft} = 4 \quad lb/ft$$

نفرض ان المسافة من السقف الى نقطة ما x ويكون جزء الكابل $0 < x \leq 20$

فعليا سيتم رفعها وسيكون جزء من الكابل في نطاق $0 < x \leq 10$ لا يمكن رفعها في كل مرة من الجزء السفلي من الكابلات وعند $x = 20$ سيتم رفع 10 قدم للوصول الى نقطة المنتصف وكذلك 10 قدم للوصول الى السقف. وعند 2 قدم من اسفل $x = 18$ سيتم رفع 8 قدم للوصول الى المنتصف وكذلل 8 قدم اضافية للوصول الى النقطة النهائية وبأستمرار هذة العملية يمكن ان نرى ان $0 < x \leq 20$ سوف ترفع $2(x - 10)$. وبالمثل كما فى المثال السابق

$$F(x) = (distance \quad lifted) \quad (weight \quad per \quad foot \quad of \quad cable)$$
$$= 2(x - 10)(4)$$
$$= 8(x - 10)$$

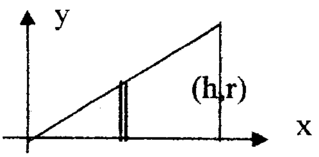
$$\therefore \quad W = \int_{10}^{20} 8(x - 10)\,dx$$
$$= (4x^2 - 80x)\Big|_{10}^{20}$$
$$= 400 ft - lb$$

مثال أوجد حجم المخروط الذى نصف قطر قاعدته r وأرتفاعه h

وناتج من دوران المنحنى $f(x) = \frac{r}{h}x$ حيث $0 \le x \le h$ حول محور x.

الحل

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



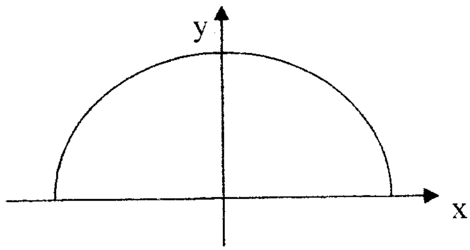
مثال أوجد حجم الكرة الناتجة من دوران المنحنى

$-r \le x \le r$ ، $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ حول محور x.

الحل

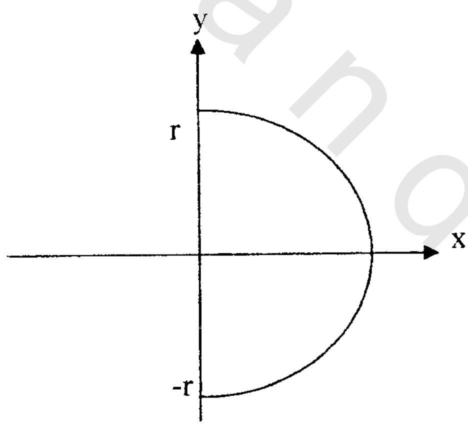
1- أذا كان الدوران حول محور x:

$$V=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$



2- أذا كان الدوران حول محور y:

$$\therefore V=\int_{c}^{d}\pi\left[f(y)\right]^2dy$$



مع ملاحظة أن المنحنى يعطى الصورة

$$x=f(y)$$

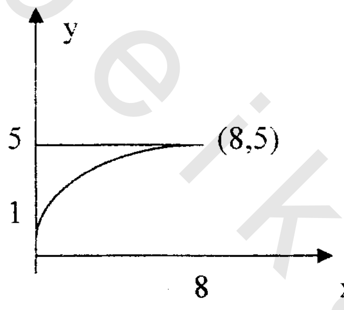
<u>مثال</u> أوجد حجم المجسم الدورانى الناتج من دوران المنحنى

$y=x^{2/3}+1,\quad 0\le x\le 8$ حول محور y.

الحل

$$V=\int_1^5 \pi[f(y)]^2 dy=\pi\int_1^5\left[(y-1)^{3/2}\right]^2 dy$$

$$=\pi\int_1^5 (y-1)^3 dy=64\pi$$



مثال اوجد حجم القطعة الكروية التى سمكها h مقطوعة من كرة نصف قطرها a.

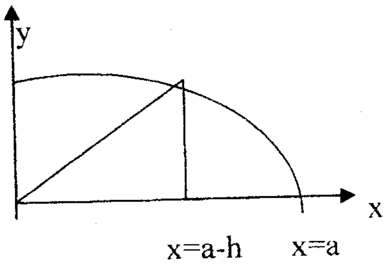
الحل القطعة الكروية تنتج من دوران منطقة من القرص

$$\{(x,y): x^2+y^2\le a^2\}$$

$$V=\pi\int_{a-h}^{a}\pi y^2 dy=\int_{a-h}^{a}\pi(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{a-h}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{3}h^2[3a-h]$$

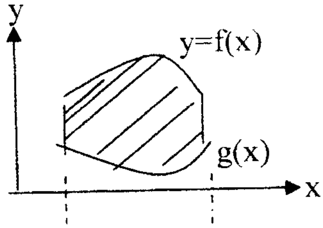


ملاحظة: حجم نصف كره نحصل عليه بوضع a=h

$$\therefore V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

ثانيا طريقة الوردة- الجلبة

Washer Method

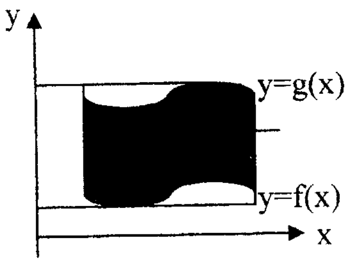


$$V = \int_a^b \pi\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx$$

هى تعميم للطريقة السابقة حيث المجسم يتولد من

دوران المنطقة المحصورة بين y=f(x) ، y=g(x) ،

$x \in [a,b]$ حول محور x



$$V=\int_c^d \pi\left([f(y)]^2-[g(y)]^2\right)dy$$

أو دوران المنطقة بـــ x=f(y) ، x=g(y) حول محور y.

مسائل محلولة

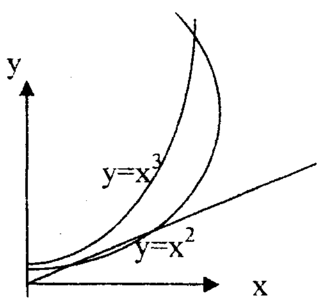
Solved Problems

<u>مثال</u> أوجد حجم المجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة بين المنحنين

$y=x^2$ ، $y=x^3$، $x\in[0,1]$

i) حول محور x   ii) حول محور y

<u>الحل</u>



i) $V=\int_0^1 \pi\left[\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2\right]dx$

$\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{2}{35}\pi$

ii)

$$V = \pi\int_0^1\left[y^{2/3} - y\right]dy = \pi\left(\frac{2}{3}y^{5/3} - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\pi$$

مثال اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحيين

$y=2x$ ، $y=x^2$

i) حول محور x   ii) حول محور y

الحل

i) $$V = \int_0^2 \pi\left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - x^4)dx$$

$$= \int_0^4 \pi\left[(\sqrt{y})^2 - (\frac{1}{2}y)^2\right]dy$$

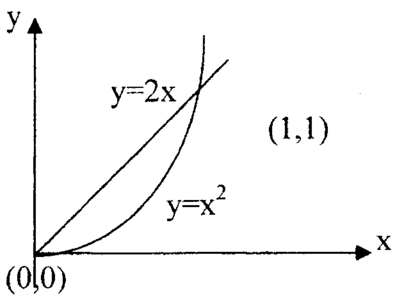
,

$$= \frac{8}{3}\pi$$

$$= \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

ii)

$$= \frac{64}{15}\pi$$



ثالثا : طريقة القشرة الاسطوانيه

The Shell Method

1-أذا دارت المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=f(x)$ ، $x\in(a,b)$

ومحور x والمستقيمين $x=a, x=b$ فإن الحجم الناشئ

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

$$= \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)h$$

$$= \pi h\left(r_1 - r_2\right)\left(r_1 + r_2\right)$$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

2-أذا دارت المنطقة المحصورة بالمنحنى $x=f(y)$ ، $y\in(c,d)$

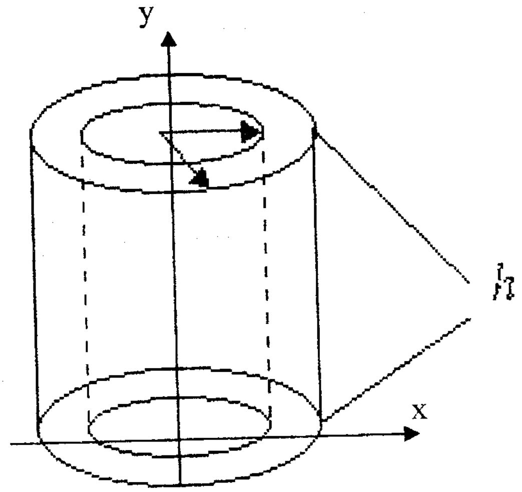
ومحور y والمستقيمين $y=c, y=d$ فإن الحجم الناشئ

$$V = \int_c^d 2\pi y f(y)dy$$

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

$$= \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)h$$

$$= \pi h\left(r_1 - r_2\right)\left(r_1 + r_2\right)$$



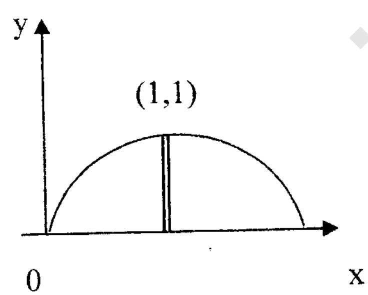
$$\therefore V = \int_{c}^{d} 2\pi y f(y) dy$$

مسائل محلولة

Solved Problems

<u>مثال</u> اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحني y=x(2-x) ، x∈(0,2) ومحور x حول محور y.

<u>الحل</u>



$$V = \int_{a}^{b} 2\pi x f(x) dx$$

$$V = 2\pi\int_0^2 x^2(2-x)dx = 2\pi\left[\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right] = \frac{8}{3}\pi$$

مثال اوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين المنحنيين

$y=x^2$ ، $y=x^3$ ، $x\in[1,2]$ حول محورى x,y.

الحل

$$i)\quad V = \int_1^2 2\pi x\,(x^3 - x^2)dx \quad = 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4\right] = \frac{49}{10}\pi$$

اذا دارت المنطقة حول الخط x=1 فإن عنصر القشرة الاسطوانية نصف

قطره (x-1) وبالتالى :

$$ii)\quad V = \int_1^2 2\pi(1-x)(x^2 - x^3)dx = \frac{62}{15}\pi$$

مثال باستخدام طريقة القشرة الاسطوانية. إوجد حجم المجسم الناشئ

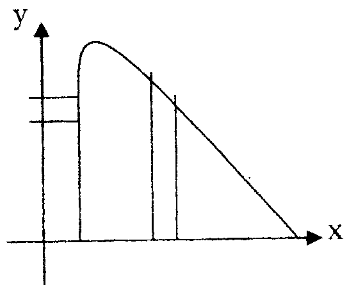
من دوران المنطقة المحدده بالمنحنيات $y=4x-x^2$ ومحوره والخطان

x=1 ، x=4 حول محور y .

الحل

$$V = \int_1^4 2\pi x(x - x^2)dx$$

$$= 2\pi\int_1^4 \left(4x^2 - x^3\right)dx = \frac{81}{2}\pi$$



ملاحظة :

كذلك يمكن تعميم طريقة القشرة الاسطوانية . اذا كانت المنطقة محصورة بين منحنيين y=f(x) ، y=j(x) فإن الحجم الناشئ من دوران هذه المساحة حول محور y يعطى بالصوره

$$V = \int_a^b 2\pi x(f(x) - j(x))\,dx$$

واذا كانت المنطقة محصورة بين x=f(y) ، x=j(y) فالحجم الناتج من دورانها حول محور x يعطى بالصورة

$$V = \int_c^d 2\pi x(f(y) - j(y))\,dy$$

<u>مثال</u> أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ ، $y=2x$ (i) حول محور y (ii) حول محور x

<u>الحل</u>

$$i)\quad V=\int_0^2 2\pi y(2x-x^2)dx=\frac{8}{3}\pi$$

$$ii)\quad V=\int_0^2 2\pi y(\sqrt{y}-\frac{1}{2}y)dy=\frac{64}{15}\pi$$

ملاحظة: هذا المثال قد تم حله باستخدام طريقة الورده (washer) وحصلنا على نفس النتيجة.

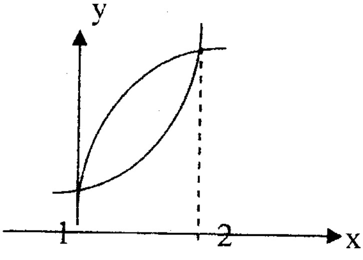
مثال أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين $y=\sqrt{x}$ ، $y=x^2$ ، $0\le x\le 1$ اذا دارت حول المستقيم x=-2

الحل

$$V=\int_0^1 2\pi(x+2)(\sqrt{x}-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x^{3/2}+2x^{1/2}-x^3-2x^2dx$$

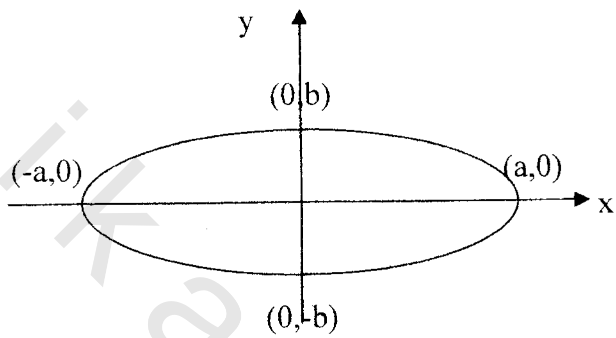
$$=\frac{49\pi}{30}.$$



مثال أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المساحة المحصورة المحصورة بالقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ اذا كان الدوران

i) حول محور السينات ii) حول محور الصادات.

الحل



$$i)\quad V=\int_{-a}^{a}\pi[f(x)]^2dx$$

$$=2\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx\quad=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a_2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

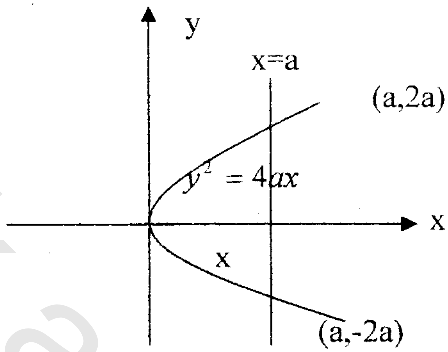
$$ii)\quad V=\int_{-b}^{b}\pi[g(y)]^2dy$$

$$=\int_{-b}^{b}\pi x^2dy=\int_{-b}^{b}\pi a^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy=2\pi a^2\int_{0}^{b}\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]dy$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

مثال أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ والوتر البؤرى العمودى وإذا كان الدوران أولا: حول محور الصادات ثانيا : حول الوتر البؤرى العمودى

الحل



أولا: حول محور الصادات

بما أن المساحة التى ستدور مكونة من جزأين متماثلين فإننا نوجد حجم المجسم الناتج من دوران احد الجزأين ثم نضرب الناتج فى 2 فيكون :

$$V = 2\left[\int_0^{2a} \pi x_2^2\, dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2\, dy\right]$$

$$= 2\pi \int_0^{2a} \left[x_2^2 - x_1^2\right] dy \quad = 2\pi \int_0^{2a} \left[a^2 - \frac{y^4}{16a^2}\right] dy$$

$$= \frac{16}{5}\pi a^3$$

ثانيا :حول الوتر البؤرى العمودى :

$$V = 2\int_0^{2a} \pi (a - x)^2 dy =$$

$$2\int_0^{2a} (a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{y^4}{16a^2})dy$$

$$= \frac{16}{15}\pi a^3$$

تمارين

أوجد المساحات المحددة بالمنحيات الآتية:

1. $y = 6x - x^2 \quad , \quad y = x^2 - 2x$
2. $y = x^3 - 6x^2 + 8x \quad ,$ **y=0**
3. $y = x^2 - 7x + 6 \quad ,$ **y=0**
4. $x = 4 - y^2$ **, x=0**
5. $y^2 = 4x \; , y = 2x - 4$
6. $x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$
7. **Cycloid curve** $0 \le t \le 2\pi$
8. $x = a\cos^3 t, \; y = \sin^3 t$
9. Cardioid's curve $\quad r = a(1 + \cos\theta)$

أوجد أطوال المنحيات الآتية :

10. $x = \ln x$ *from* $x = \sqrt{3}$ **to** $x = \sqrt{8}$

11. $y = 1 - \ln\cos x$ **from** $x = 0$ **to** $x = \frac{\pi}{4}$

12. $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$

13. $r = a(1 + \cos\theta)$, $x = a(t - \sin t)$

14. **The circle** $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$

from t=0 to t=t_1 .

عين حجوم المجسمات الناتجة من دوران المساحات المحددة بالمنحيات التالية حول محور السينات:

15. $y = \sin x$, $y = 0,\ x \in [0, \pi]$

16. $y = x^2$, **x=1.**

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ **, y=0**

عين حجوم المجسمات الناتجة من دوران المساحات المحددة بالمنحيات التالية حول محور الصادات:

18. $y = \sin x$, **x=0** **, y=0**

19. $y = \cos x$, **x=0** **, y=0**

20. $y = x^2$, **y=1** **,x=0**

* * *