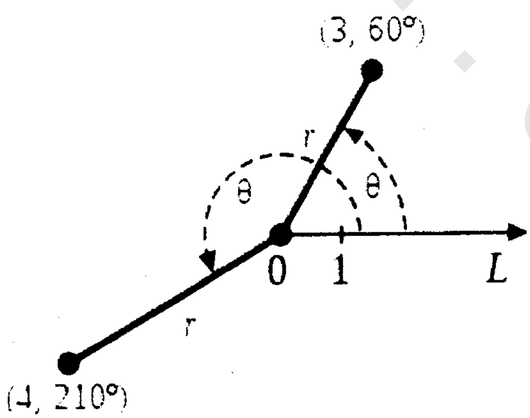
الباب السادس

الاحداثيات القطبية

Polar coordinate system

فى نظام الإحداثيات الكارتيزية الزوج المرتب (a,b) يمثل نقطة بعداها عن محور x ومحور y هما a و b على الترتيب. هناك طريقة أخرى لتمثيل النقط باستخدام الإحداثيات القطبية. نبدأ بنقطة ثابته تسمى القطب (نقطة الأصل) وخط متجه ثابت (المحور القطبى) يبدأ من نقطة 0 . أى نقطة فى المستوى يمكن تحديدها بواسطة بعدها عن القطب o ،

$r=d(0,p)$ وكذلك مقياس الزاوية التى يصنعها op مع المحور القطبى كما بالرسم وبذلك يكون r,θ هما الإحداثيات القطبية للنقطة p، ويستخدم الرمز (r,θ) أو $p(r,\theta)$ لتحديد النقطة P.



ويكون اتجاه الدوران (الزاوية θ) الموجب هو اتجاه الدوران ضد عقارب الساعة ويكون سالبا ‘ذا كان فى اتجاه عقارب الساعة. تمثيل النقطة باستخدام الإحداثيات القطبية تمثيل ليس وحيد.

على سبيل المثال

$(3,-7\pi/4)$ ، $(3,9\pi/4)$ ، $(3,\pi/4)$

كلها تمثل نقطة واحدة. ومن الممكن أن يكون r سالب فى هذه الحالة نقيس الزاوية θ (سواء كانت موجبة أو سالبة) ثم نضع النقطة فى الاتجاه العكسى لموضعها (لأن r سالب) . وإحداثيات القطب هى $(0, \theta)$ حيث θ تأخذ أى قيم .

المعادلات القطبية

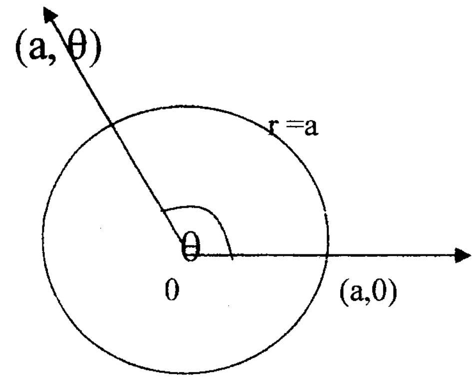
Polar equations

هى معادلة فى r, θ وحلها يكون بمعرفة القيم r, θ.

ويمكن تمثيل المعادلة بالرسم وذلك بفئة نقط الحل.

مثال

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ ، تمثيل هذه المعادلة هو فئة النقط (a, θ) لأى زاوية θ. وبذلك فإن المعادلة تمثل دائرة نصف قطرها $|a|$ ومركزها نقطة القطب.

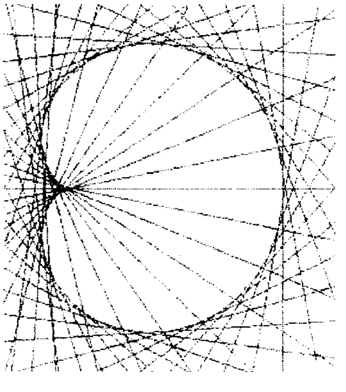


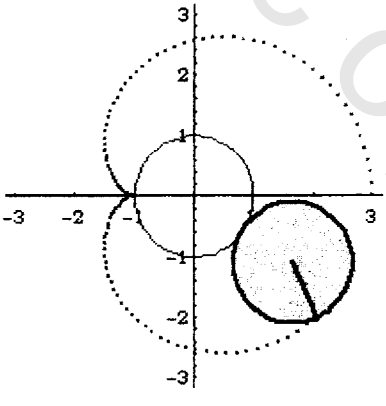
الكاردويد

Cardioid

اخذت كلمة كارديود (شكل القلب، من الكلمة اليونانية رووت كاردى والتى تعنى كلمة قلب)

تعريف:يعرف الكارديود على انه النقطة المتحركة على دائرة وحركتها ثابتة بالنسبة لدائرة ثابتة نصف قطرها بدون انزلاق كما هو موضح بالشكل التالى





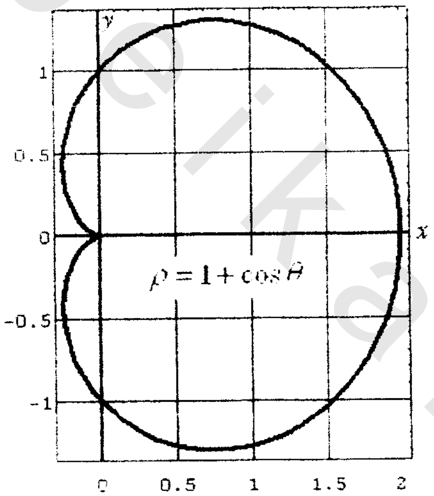
مسائل محلولة

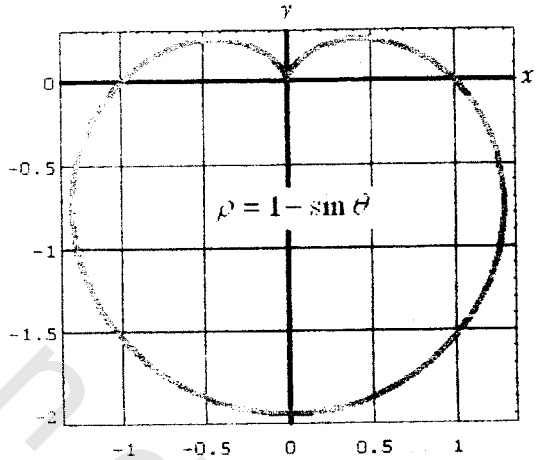
Solved Problems

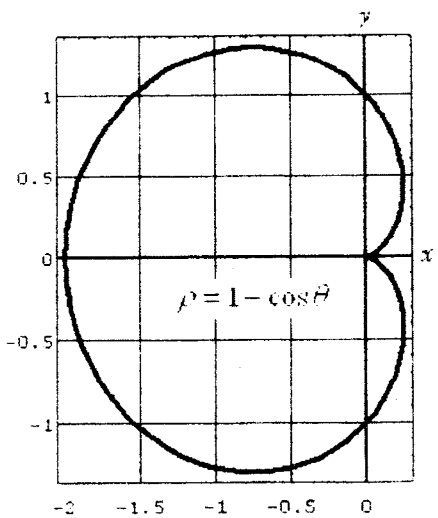
<u>مثال</u> ارسم معادلات **الكارديود** الممثلة بالمعادلات التالية:

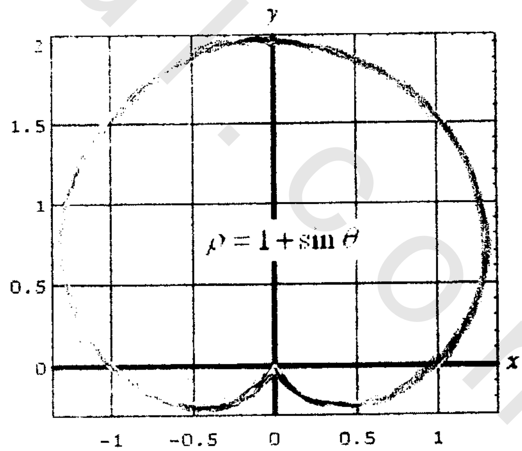
$$\rho = 1 + \cos\theta, \qquad \rho = 1 - \cos\theta,$$

$$\rho = 1 + \sin\theta, \qquad p = 1 - \sin\theta.$$







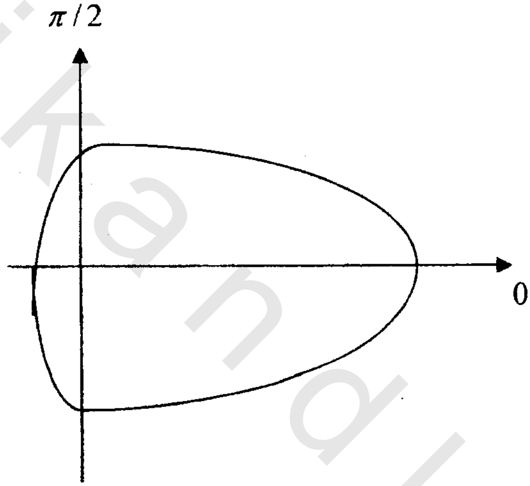


<u>مثال</u> ارسم معادلة **الكارديود** الممثلة بالمعادلة القطبية التالية:

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

<u>الحل</u>

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
r	4	3.7	3.4	3	2	1	6	0.3	0



حيث ان الدالة $\cos\theta$ تتناقص من -1 الى 1 و ان θ تتغير من 0 الى π بالتالى r تتغير من 4 الى 0 والرسم السابق يوضح ذلك:

$$r: 0 \to 4 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta: -1 \to 1 \quad \Rightarrow \quad \theta: \pi \to 2\pi$$

<u>مثال</u> ارسم المعادلة القطبية (Lima cons) التالية:

$$r = 2 + 4\cos\theta$$

الحل

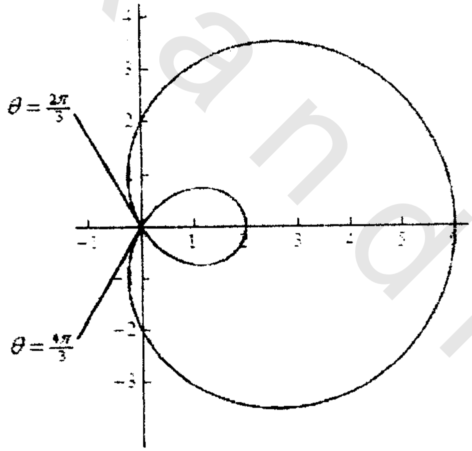
$$r = 2 + 4\cos\theta$$

$$r = 0 \quad at \quad \theta = 2\pi/3$$

$$\theta : 2\pi \rightarrow 2\pi/3$$

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
r	6	5.4	4.8	4	2	0	-.8	-1.4	-2

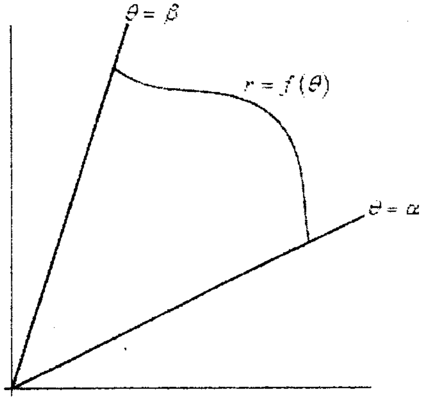
$$r : 0 \rightarrow 4 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta : -1 \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \theta : \pi \rightarrow 2\pi$$



المساحات فى الإحداثيات القطبية

Areas in the polar coordinates

فى هذا الجزء سنبحث على المساحات المحصورة داخل المنحنيات القضبية. والشكل التالى يوضح المساحات المراد حسابه



المساحة المحددة الداخلية تعطى بالعلاقة:

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^{2}d\theta$$

مسائل محلولة

Solved Problems

مثال اوجد مساحة العروة الداخلية للمنحنى(**inner loop**) :

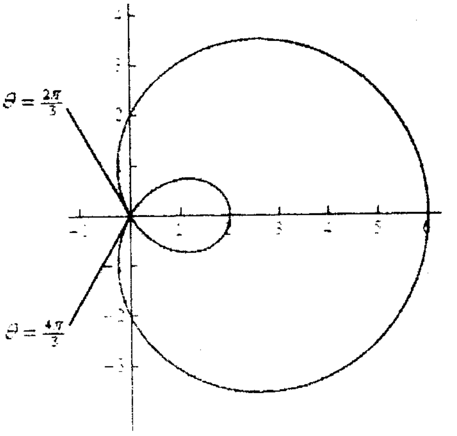
$$r=2+4\cos\theta$$

الحل بوضع المعادلة مساوية للصفر نحصل على

$$0=2+4\cos\theta\Rightarrow$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

والشكل التالى يوضح المطلوب



والمساحة المطلوبة هي:

$$A = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2}(2+4\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2}(4+16\cos\theta+16\cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 2+8\cos\theta+4(1+\cos(2\theta))d\theta$$

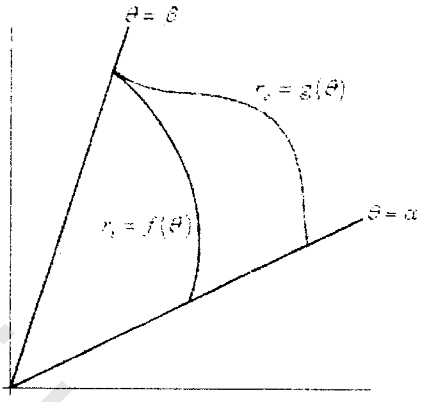
$$= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 6+8\cos\theta+4\cos\theta(2\theta)d\theta$$

$$= (6\theta+8\sin\theta+2\sin(2\theta)\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3}$$

$$= 4\pi - 6\sqrt{3}$$

$$= 2.174$$

ملاحظة: للحصول على المساحات المحددة بمنحنيين كما فى الشكل التالى:



فى هذة الحالة نستخدم المعادلة الاتية:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(r_0^{\ 2} - r_1^{\ 2})d\theta$$

مثال اوجد المساحة الداخلية للمنحنى $r = 3 + 2\sin\theta$

والمساحة الخارجية للمنحنى $r = 2$

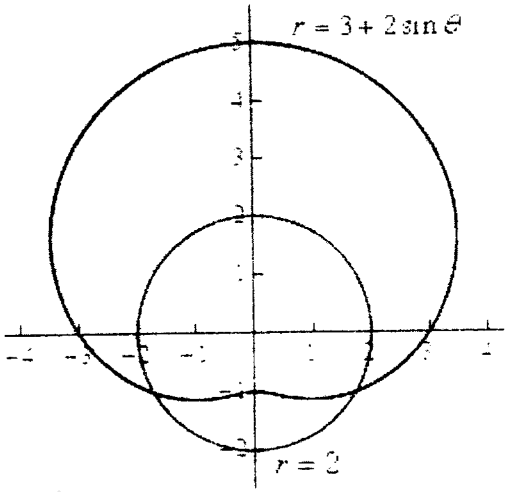
الحل بمساوات المعادلتين للحصول على θ كالتالى

$$3 + 2\sin\theta = 2$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

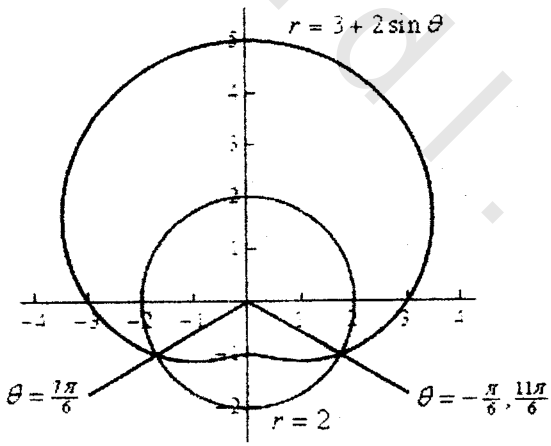
والرسم التاللى يوضح ذلك:



وحيث ان

$$\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

وبأضفة الزاوية الحاصلين عليها يكون الشكل المطلوب هو:



وتكون المساحة المطلوبة هى:

$$A = \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2}((3+2\cos\theta)^2 - (2)^2)d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2}(5+12\sin\theta+4\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{2}(7+12\sin\theta-2\cos(2\theta))d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(7\theta+12\cos\theta-\sin(2\theta)\Big|_{-\pi/6}^{7\pi/6}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}$$
$$= 24.187$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة الداخلية للمنحنى $r = 3+2\sin\theta$

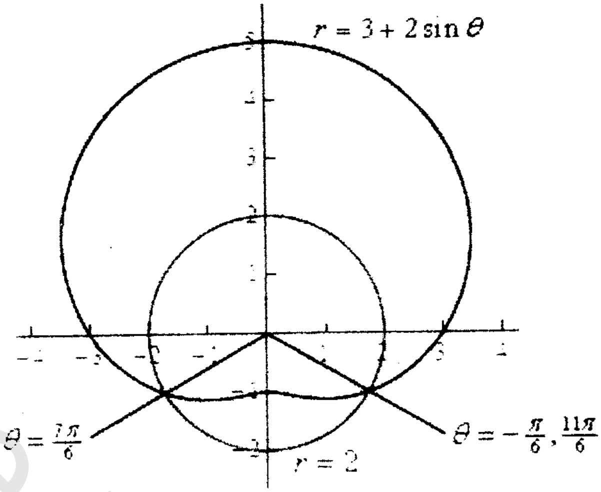
والمساحة الداخلية للمنحنى $r = 2$

<u>الحل</u>

بمساوات المعادلتين للحصول على θ كالتالى ونتبع نفس الطريقة السابقة فنحصل على:

$$\theta : \frac{7\pi}{6} \to \frac{11\pi}{6}$$

والرسم التاللى يوضح ذلك:



وتكون المساحة المطلوبة هى:

$$A = \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2}((2)^2 - (3 + 2\cos\theta)^2) d\theta$$

$$= \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2}(-5 - 12\sin\theta - 4\sin^2\theta) d\theta$$

$$= \int_{7\pi/6}^{11\pi/6} \frac{1}{2}(-7 - 12\sin\theta + 2\cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(-7\theta + 12\cos\theta + \sin(2\theta)\Big|_{7\pi/6}^{11\pi/6}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3}$$

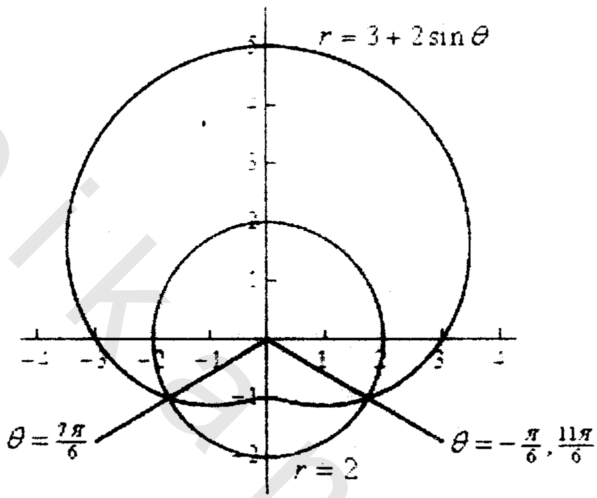
$$= 2.196$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة الداخلية لكل من المنحنيات

$$r = 3 + 2\sin\theta, \quad r = 2$$

<u>الحل</u>

بمساوات المعادلتين للحصول على θ ونتبع نفس الطريقة السابقة فنحصل على الشكل التالى:



هناك طريقتين لحل هذا المثال

الطريقة الاولى: نلاحظ هنا ان الدائرة تنقسم الى جزئين وسنحسب الجزء العلوى كما فى المثال السابق

$$\begin{aligned} Area &= Area \ of \ Circle - Area \ from \ peravious \ Example \\ &= \pi(2)^2 - 2.196 \\ &= 10.370 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية:

$$Area = Area \ of \ Limacon - Area \ from \ peravious \ Example$$

$$\therefore A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(3+2\sin\theta)^2 d\theta - 24.187$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(9+12\sin\theta+4\sin^2\theta)d\theta - 24.187$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(11\theta+12\theta+2\cos(2\theta))d\theta - 24.187$$

$$= \frac{1}{2}(11\theta-12\cos\theta+\sin(2\theta)\Big|_0^{2\pi} - 24.187$$

$$= 11\pi - 24.187$$

$$= 10.370$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة الداخلية لمنحنى **الكارديود** $r = 2+2\cos\theta$

<u>الحل</u> حيث ان الدالة منتظمة الشكل فى الاحداثيات القطبية لذلك سنحسب المساحة العلوية ثم نضرب الناتج فى 2 فنحصل على المساحة الكلية مع ملاحظة ان الزاوية θ تتغير من 0 الى π :

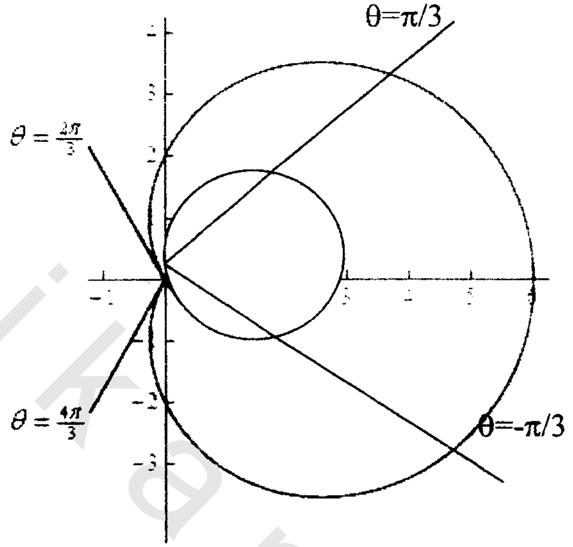
$$\therefore A = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+2\cos\theta)^2 d\theta = 6\pi$$

<u>مثال</u>

اوجد المساحة الداخلية لمنحنى **الكارديود** $r = 2+2\cos\theta$ وخارج الدائرة $r = 2$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على:

(3, π/3)، (-3,- π/3)



وتكون المساحة المطلوبة هى:

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f_1^2(\theta) - f_2^2(\theta)\right] d\theta$$

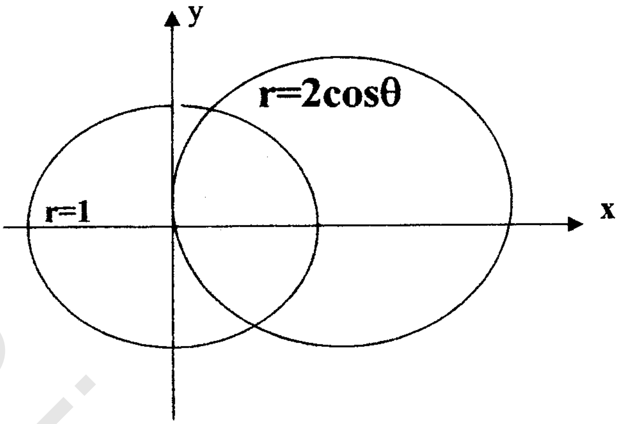
$$A = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} [(2+2\cos\theta)^2 - (3)^2] d\theta = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi$$

مثال

اوجد المساحة الداخلية للدائرة $r = 2\cos\theta$ وخارج الدائرة $r = 1$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$



وتكون المساحة المطلوبة هى:

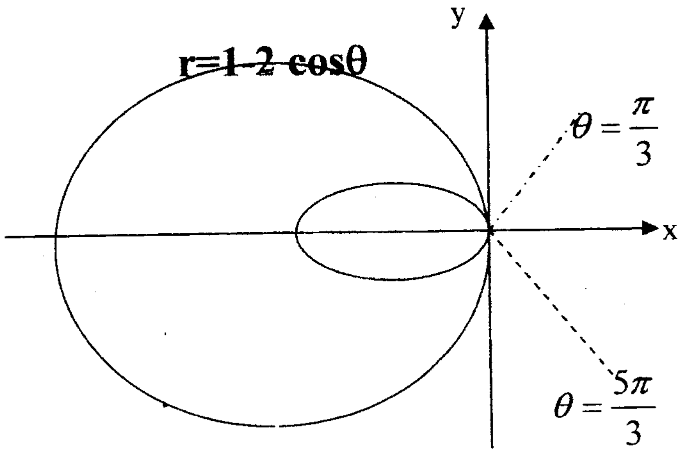
$$A = .\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[2\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1)^2 d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}(2\cos^2\theta - \frac{1}{2})d\theta$$

$$= 2(\frac{\sin\theta\cos\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) - \frac{\theta}{2}\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \left[\sin\theta\cos\theta + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة المحصورة بين الحلقة الكبرى والحلقة الصغرى للمنحنى $r = 1 - 2\cos\theta$

<u>الحل</u> بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على الشكل التالى:

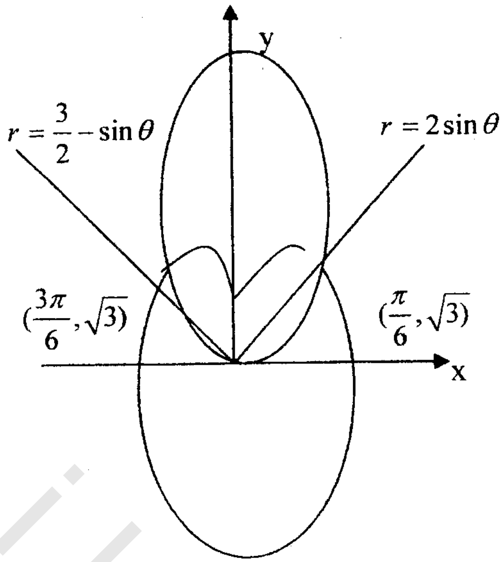


مع ملاحظة ان الجزء العلوى يبدأ بالزاوية $\theta : \frac{\pi}{3} \to \pi$ وان الجزء السفلى يبدأ بالزاوية $\theta : 0 \to \frac{\pi}{3}$ وحيث ان الدالة منتظمة الشكل فى الاحداثيات القطبية لذلك سنحسب المساحة العلوية ثم نضرب الناتج فى 2 فنحصل على المساحة الكلية

$$A = 2\left[\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}[1-2\cos\theta]^2 d\theta - \int_{0}^{\pi/3} \frac{1}{2}[1-2\cos\theta]^2 d\theta\right] = \pi + 5\sqrt{3}$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة المحصورة بين الدائرة $r = 2\sin\theta$ القاطع الليمنسبكت $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$

<u>الحل</u> بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على الشكل التالى:

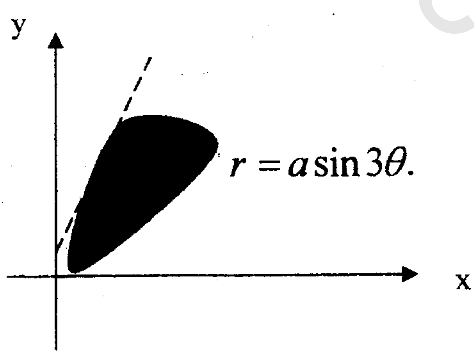


$$A=2\left[\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{2}[2\sin\theta]^{2}\,d\theta-\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\sin\theta\right]^{2}d\theta\right]=\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

<u>مثال</u> اوجد المساحة داخل عروة واحدة للمنحنى $r=a\sin 3\theta$

<u>الحل</u> المنحنى له ثلاثة حلقات سنأخذ الحلقة الاولى فى الربع الاول كالتالى:

$$at \qquad r=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$



$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}(a\sin 3\theta)^2\,d\theta=\frac{a^2}{4}(1-\cos 6\theta)d\theta$$

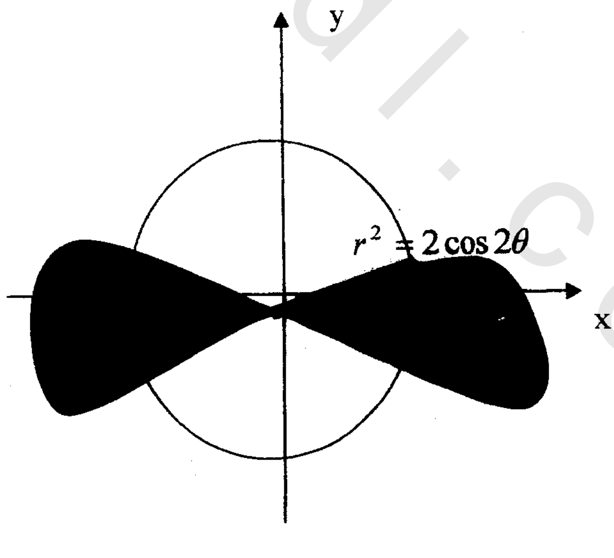
$$=\frac{a^2}{4}\left[\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{12}\pi a^2$$

مثال اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات $r^2=2\cos 2\theta, r=1$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع وتكون المساحة المطلوبة هى:

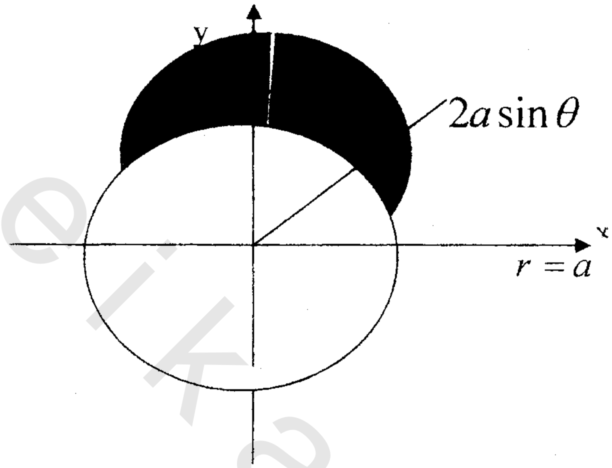
$$A=4\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos 2\theta)d\theta\right]=2-\sqrt{3}$$

والرسم التالى يوضح ذلك:



مثال اوجد المساحة داخل المنحنى $r = 2a\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = a$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على الشكل التالى:



$$2a\sin\theta = a \Rightarrow \theta = \pi/6$$

وتكون المساحة المطلوبة هى:

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(2a\sin\theta)^2 - a^2\right]d\theta\right] = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

مثال اوجد المساحة داخل المنحنى $r = 2\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 1$

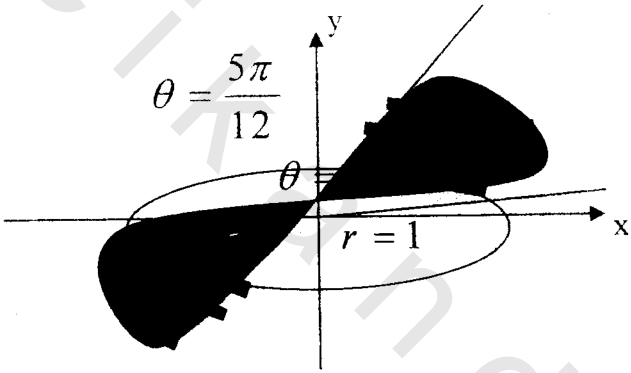
الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

$$2\sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} \quad or \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12}$$

$$A = 2\left\{\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}((2\sin 2\theta)^2 - 1)d\theta\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{12}$$

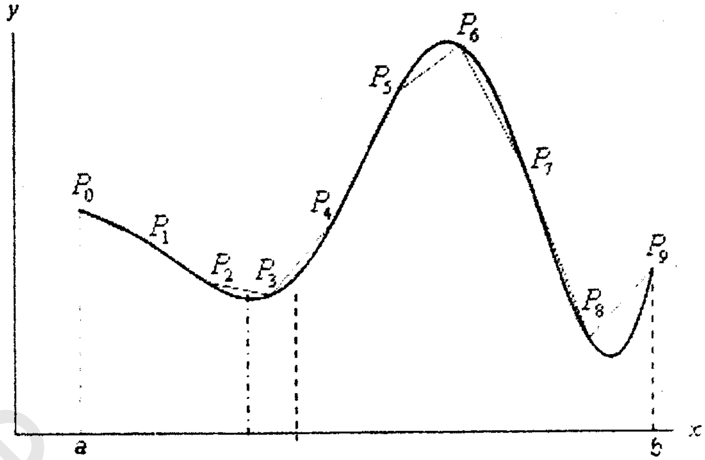
والشكل التالى يوضح ذلك:



طول المنحنى Arc Length

يقال الدالة f أنها ملساء (ناعمة) على الفترة [a,b] اذا كانت مشتقتها f' متصلة على هذه الفترة. بمعنى آخر ، أن الدالة تكون ملساء اذا كان اى تغير بسيط فى قيمته x يحدث تغيرا بسيط فى ميل المماس لمنحنى الدالة.

وفى هذا الفصل سوف ندرس طول المنحنى بين نقطتين A,B على منحنى أملس .لنفرض أن f ملساء على الفترة [a,b]. لنفرض أن P تجزئيا للفترة [a,b] بواسطة النقط



$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

وأن

$$Q_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \ldots, n$$

ولنفرض أن $d(Q_{i-1}, Q_i)$ هو طول القطعة المستقيمة الواصلة من Q_{i-1} الى Q_i ولنفرض أن L_P هو طول الخط المنكسر الناتج من توصيل النقط Q_i المتتالية فيكون :

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} d(Q_{i-1}, Q_i) \qquad \ldots (2)$$

ولكن

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \qquad \ldots (3)$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة (للتفاضل) يكون:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f`(w_i)(x_i - x_{i-1})$$

حيث $w_i \in]x_{i-1}, x_i[$. بالتعويض فى (3) نحصل على

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f`(w_i)\Delta x_i)]^2}$$

$$= [\ \sqrt{1+[f`(w_i)]^2}\ ]\Delta x_i$$

حيث

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

وبالتعويض عن ذلك فى (2) نحصل على :

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} \left(\ \sqrt{1+[f`(w_i)]^2}\ \right)\Delta x_i \qquad \textbf{...(4)}$$

لاحظ أن L_P هو عبارة عن مجموع ريمان للدالة g المعرفة بالمتساوية

$$g(x) = \sqrt{1+[f`(x)]^2}$$

بالإضافة الى ذلك فإن g دالة متصلة على [a,b] لأن `f متصلة على هذه الفترة.

اذا أخذنا النهاية للمتساوية (4) عندما $\|P\| \to 0$ فإن طول الخط المنكسر L_P سوف يؤول الى طول منحنى الدالة f من A الى B والذى يرمز له بالرمز L . وبمعنى آخر:

$$L = \lim_{\|p\|\to 0} g(w_i)\Delta x_i \quad = \int_a^b g(x)\,dx$$

وهكذا فإنه إذا كانت f دالة ملساء على الفترة [a,b] فان طول منحنى هذه الدالة من A(a,f(a)) الى B(b,f(b)) هو

$$L=\int_a^b\left(\sqrt{1+[f`(x)]^2}\right)dx \qquad \dots(5)$$

II . إذا كانت الدالة y = f(x) معطاة في الصورة البارامترية

$$x=\varphi(t) \quad , \qquad y=\psi(t)$$

حيث $\varphi(\alpha)=a$ ، $\varphi(\beta)=b$ ، $t\in[\alpha,\beta]$

$\varphi,\psi,\varphi`,\psi`$ دوال متصلة فى الفترة المعطاه بحيث $\varphi`\neq 0$ بالتعويض فى (5) نحصل على

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi`(t)}{\varphi`(t)}\right]^2}\,\varphi`(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi`(t)]^2+[\psi`(t)]^2}\,dt \quad \dots(6)$$

<u>على سبيل المثال</u> اذا اردنا ايجاد طول المنحنى $y=f(x)$ فى الفترة $[a,b]$ و لنفرض ان $n=9$ كما هو موضح فى الشكل السابق.

سوف نرمز الى كل قطعة من الخط بالرمز:

$$|P_{i-1}P_i|\Rightarrow$$

$$L\approx\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$$

سوف نعرف الدالة:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

بالتالى يكون الطول المطلوب هو:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}$$

بالتالى يمكن ان نستنتج

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

وبالمثل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

اما اذا كانت

$$x = h(y) \in [c, d]$$

$$\therefore L = \int_c^d \sqrt{1 + [h'(y)]^2}\, dy$$

$$= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

امثلة متنوعة

Solved Problems

<u>مثال</u> اوجد طول المنحنى $y = \ln(\sec x)$ بين $0 \le x \le \pi/4$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $y = f(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \ \tan x}{\sec x} = \tan x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \tan^2 x \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\sec^2 x} = |\sec x| = \sec x$$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec x dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1)$$

مثال اوجد طول المنحنى $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ بين $1 \le y \le 4$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $x = h(y)$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = (y-1)^{1/2} \Rightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+y-1} = \sqrt{y}$$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_1^4 \sqrt{y}\, dy$$

$$= \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_1^4$$

$$= \frac{14}{3}$$

مثال اوجد طول المنحنى $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ بين $1 \le x \le 4$

الحل بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $y = h(x)$

$$\because x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} \Rightarrow y = \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{3x}{2}\right)^{-1/3}$$

ويكون طول المنحنى المطلوب هو:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{(3x/2)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{(3x/2)^{2/3}+1}{(3x/2)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{(3x/2)^{2/3}+1}{(3x/2)^{1/3}}} \Rightarrow$$

$$0 \le x \le \frac{2}{3}(3)^{3/2} \Rightarrow$$

وبالتالى يكون التكامل الذى يعطينا المطلوب هو:

$$L = \int_{0}^{2/3(3)^{3/2}} \frac{\sqrt{(3x/2)^{2/3}+1}}{(3x/2)^{1/3}}dx$$

وباستخدام طريقة التكامل يالتعويض

$$u = \left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad du = \left(\frac{3x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$x = \frac{2}{3}(3)^{3/2} \Rightarrow u = 4$$

وبالتعويض فى التكامل نحصل على:

$$L = \int_{1}^{4} \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{1}^{4}$$

$$= \frac{14}{3}$$

<u>مثال</u> اوجد طول المنحنى $x = \frac{1}{2}y^{1/2}$ بين $0 \le x \le \frac{1}{2}$ مفترضا ان y قيمة موجبة.

<u>الحل</u> بحل المعادلتين معا للحصول على نقط التقاطع فنحصل على

حيث ان $y = h(x)$

$$\because \frac{dx}{dy} = y \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+y^2}$$

$0 \le y \le 1$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dy$$

وباستخدام طريقة التكامل يالتعويض

$$y = \tan\theta \qquad dy = \sec^2\theta d\theta$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \tan\theta \Rightarrow \quad \theta = 0$$
$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \tan\theta \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{1+(y)^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| = \sec\theta \Rightarrow$$

وبالتالى فأن طول المنحنى المطلوب هو:

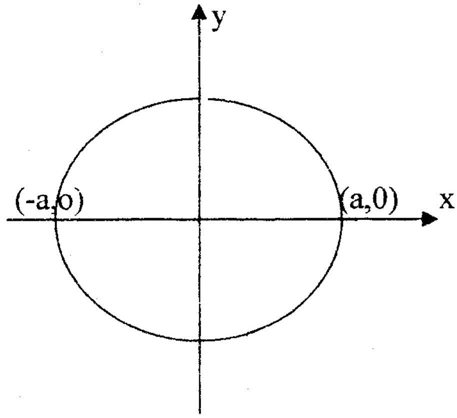
$$L = \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|)\Big|_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$$

<u>مثال</u>

اوجد محيط الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$

<u>الحل</u> نحسب طول ربع المحيط ثم نضرب الناتج فى 4 كما بالشكل:

$$Q\, x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

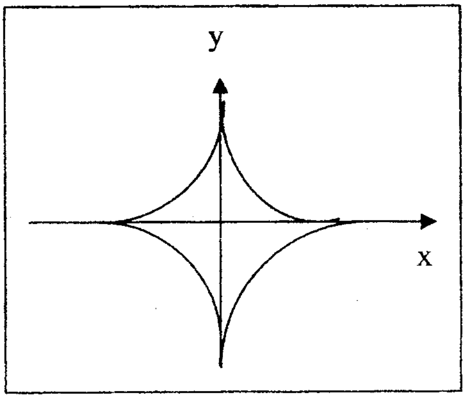


$$\therefore f`(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \therefore L = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 4a\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4a \times \frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

<u>مثال</u> أوجد طول منحنى الاسترويد $x = a\cos^3 t$ ، $y = a\sin^3 t$

<u>الحل</u> منحنى الاسترويد (كما هو موضح بالشكل) متماثل بالنسبة الى المحورين ولذلك سنحسب طول ربعه وفيه يتغير t من 0 إلى π ثم نضرب الناتج فى 4.



$$\because \psi(t) = \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t$$

$$\psi`(t) = \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} \right) dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a \times \frac{1}{2} = 6a$$

تحويل الدالة من الصورة القطبية الى البارامترية

اذا كانت الدالة المعطاة فى الصورة القطبية $r = f(\theta)$

فإنه يمكن تحويلها الى الصورة البارامترية

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$= f(\theta)\cos\theta \quad = f(\theta)\sin\theta$$

وبالتالى

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\sin\theta + f`(\theta)\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f`(\theta)\sin\theta$$

اذا :

$$(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 = [f(\theta)]^2 + [f`(\theta)]^2$$

بالتعويض فى الصياغة (6) حيث $\theta = t$ ، $\frac{dx}{d\theta} = \varphi`(\theta)$ ،

$$\frac{dy}{d\theta} = \psi`(\theta)$$

يكون طول المنحنى L من $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ هو

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f`(\theta)]^2}\, d\theta$$

<u>مثال</u>

أوجد طول الحلزون الذى معادلته $r = e^{\theta/2}$ من $\theta = 1$ الى $\theta = 2$.

<u>الحل</u>

باستخدام الصياغة (7)يكون

$$L = \int_1^2 \left((e^{\theta/2})^2 + (\frac{1}{2} e^{\theta/2}) \right)^{1/2} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2e^{\theta/2}\right)\Big|_1^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}.2e - \frac{\sqrt{5}}{2}.2e^{1/2}$$

$$= \sqrt{5e}\,(e^{1/2} - 1) = 2.3916$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_1^2 e^{\theta/2} d\theta = \sqrt{5}(e - \sqrt{e})$$

* * *