الباب الخامس

تطبيقات التكامل المحدود

Applications of Definite Integrations

للتكامل المحدود عديدا من التطبيقات والاستخدامات فى المسائل العملية.

وسنكتفي هنا بذكر جزء من هذه التطبيقات .

1. المساحة Area

I . (i) اذا كانت f دالة متصلة بحيث $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فأنــه تبعا لتعريف التكامل فإن المساحة المحــصورة بــين منحنــى الدالــة f والمستقيمين x=a ، x=b ومحور السينات هى عبارة عن التكامل

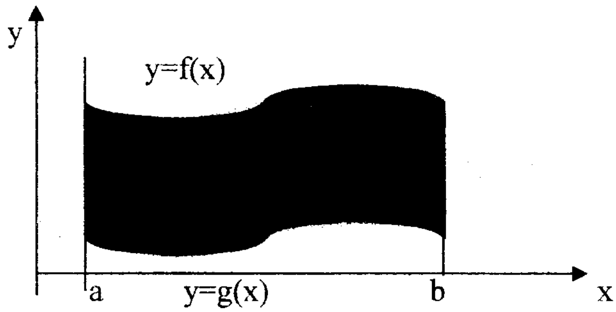
$$\int_a^b f(x)dx$$

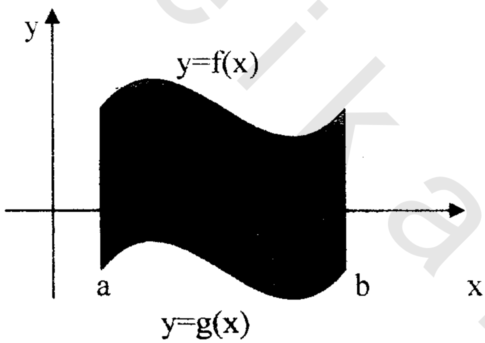
(ii) إذا كانت f ، g دالتان متصلتان بحيث $f(x) \geq g(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين :

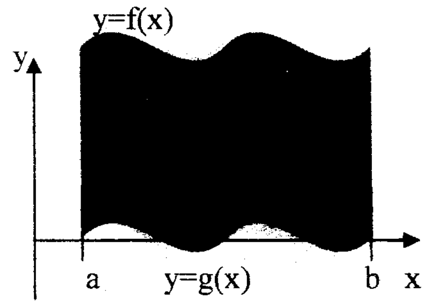
(أ) منحنى الدالتين f،g (ب)المستقيمين x=a,x=b

كما هو موضح بالشكل هى كالتالى:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$







الصياغة السابقة يمكن أن نوسع استخدامها ايضا عندما تكون f ،g سالبة عند بعض نقط (اجزاء) من الفترة [a,b]. للحصول على المساحة المشار اليها سنختار عدد سالب d أقل من القيمة الصغرى للدالة g على [a,b] ونفرض أن لكل $x \in [a,b]$:

$$f_1(x) = f(x) - d = f(x) + |d|$$

$$g_1(x) = g(x) - d = g(x) + |d|$$

وهكذا يكون

$$f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$$

Solved Problems أمثلة محلولة

وحيث أن المساحة A المحصورة بين المنحيين f، g مساوية للمساحة المحصورة بين f_1 ، g_1 فإنه تبعا للمتساوية (1) يكون :

$$A = \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]dx \quad = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

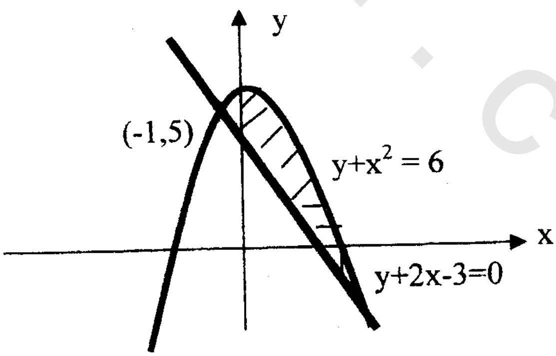
مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين

$$y + 2x - 3 = 0, \qquad y + x^2 = 6$$

الحل نوجد نقطتى التقاطع (3,-3)، (-1,5) للمنحنيين وذلك على المعادلتين

$$y = 6 - x^2, \qquad y = 3 - 2x$$

وتكون المساحة المحصورة هى
$$A = \int_{-1}^{3} [(6 - x^2 - (3 - 2x)]dx$$



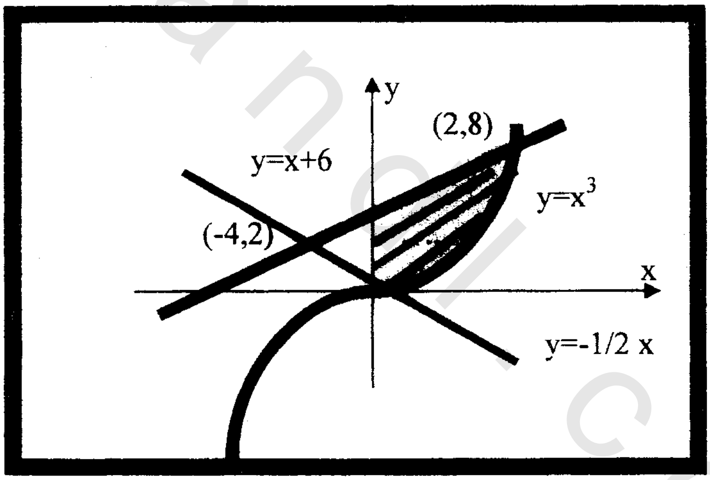
$$A = \int_{-1}^{3} [(6 - x^2 - (3 - 2x)]dx$$

$$= \int_{-1}^{3}(3 - x^2 + 2x)dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$y - x^3 = 0$ ، $2y + x = 0$ ، $y - x = 6$

الحل الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المطلوب ايجادها .ونلاحظ ان هذه المساحة لا يمكن حسابها باستخدام (1) مرة واحدة ولكن اذا جزئنا هذه المساحة الى المنطقتين R_2 ، R_1 كما موضح بالشكل وكانت مساحتيهما هما A_2 ، A_1 فإن :



$$A_1 = \int_{-4}^{0}\left[(x+6) - (-\frac{1}{2}x)\right]dx = \int_{-4}^{0}\left[\frac{3x}{2} + 6\right]dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x\right]_{-4}^{0} = 12$$

$$A_2 = \int_0^2 \left[(x+6) - x^3\right] dx \qquad = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 10$$

فتكون المساحة المطلوبة $A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$

تطبيقات هندسية

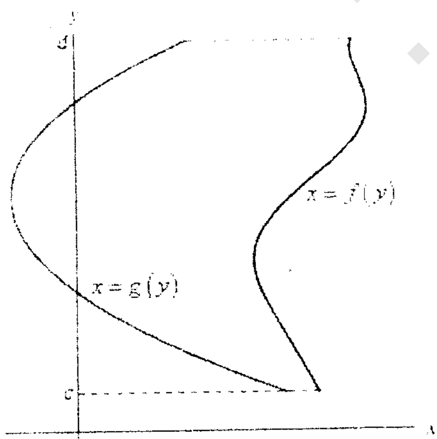
(iii) فى بعض الاحوال تكون المنطقة المطلوب ايجاد مساحتها محصورة بين :

(أ) منحنى الدالتين $x=g(y)$ ، $x=f(y)$ $\quad (f(y) \geq g(y))$

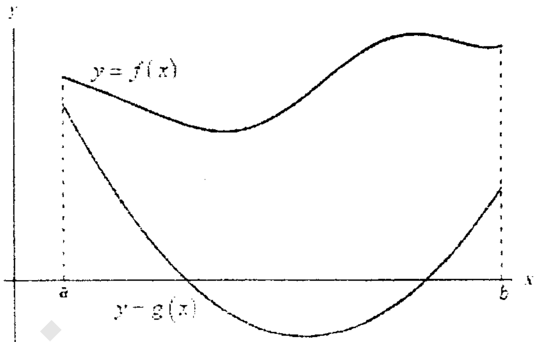
(ب) الخطين المستقيمين $y=d$ ، $y=c$

فى هذه الحالة وبطريقة مماثلة لما سبق مع ابدال المتغيرين x,y نحصل على المساحة A للمنطقة المذكورة (أنظر الشكل) كما يلى :

$$A = \int_c^d \left[f(y) - g(y)\right] dy$$



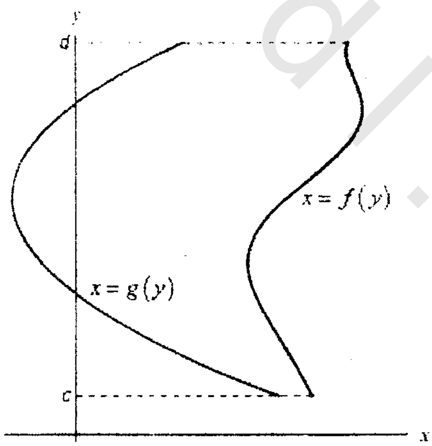
والأن بالنسبة للمساحات والحجوم المحصورة بين المنحنيات سوف نتبع مايلى:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad \text{..........................(1)}$$

للدوال $x = f(y), \quad x = g(y)$

$$f(y) \geq g(y).$$



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \quad \text{............................(2)}$$

وسوف نستخدم التعبير الاتى للمساحات

$$A = \int_a^b \begin{pmatrix} upper \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} lower \\ function \end{pmatrix} dx , \qquad a \le x \le b \qquad (3)$$

وفى الحالة الثانية نستخدم التعبير

$$A = \int_c^d \begin{pmatrix} right \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} left \\ function \end{pmatrix} dy , \qquad c \le y \le d \qquad (4)$$

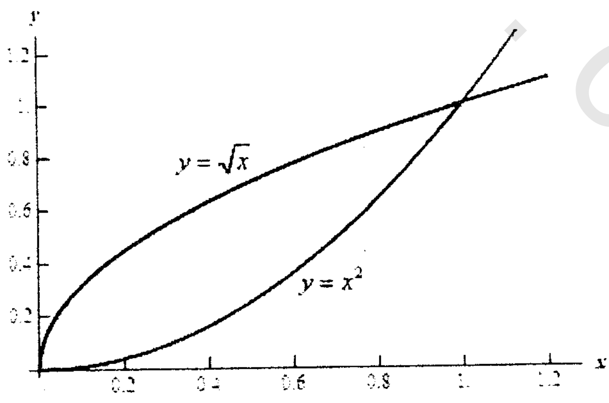
مسائل محلولة

Solved Problems

<u>**مثال**</u> أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x} .$$

<u>**الحل**</u> الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



$$A=\int_a^b \begin{pmatrix} upper \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} lower \\ function \end{pmatrix} dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{x}-x^2 dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

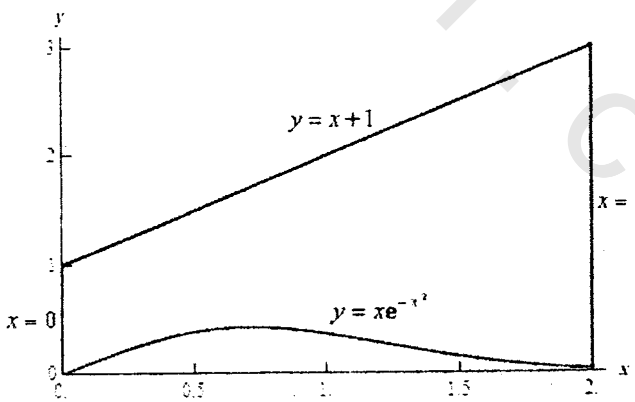
$$=\frac{1}{3}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y=xe^{-x^2}, \quad y=x+1, x=2, y \quad axis.$$

الحل

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



$$A=\int_a^b \begin{pmatrix} upper \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} lower \\ function \end{pmatrix} dx$$

$$=\int_0^2 (x+1-xe^{-x^2})dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{e^{-4}}{2}=3.5092$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y=2x^2+10 \quad ,$$

$$y=4x+16 \, .$$

الحل

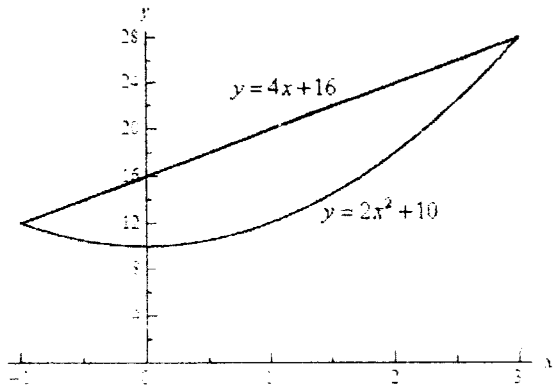
بحل المعادلتين نحصل على:

$$2x^2+10=4x+16$$

$$2x^2-4x-6=0$$

$$2(x+1)(x-3)=0$$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



$$A=\int_a^b\begin{pmatrix}upper\\function\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}lower\\function\end{pmatrix}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$

$$=\left(-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

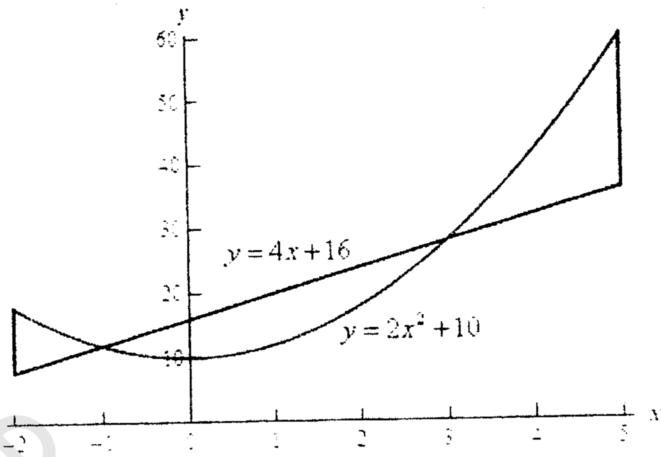
$$=\frac{64}{3}.$$

<u>مثال</u> أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$y=2x^2+10\ ,\ y=4x+16, x=-2,\quad x=5.$$

<u>الحل</u>

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها.



من الشكل السابق نلاحظ انة يوجد ثلاثة مساحات محددة بالمنحيات وتكون المساحة المطلوبة فى هذه الحالة:

$$\therefore A = \int_{-2}^{-1} 2x^2 + 10 - (4x + 6)dx + \int_{-1}^{3} 4x + 16 - (2x^2 + 10)dx$$

$$+ \int_{3}^{5} 2x^2 + 10 - (4x + 16)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)dx + \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)dx$$

$$+ \int_{3}^{5} (2x^2 - 4x - 6)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{3}^{5}$$

$$= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3}$$

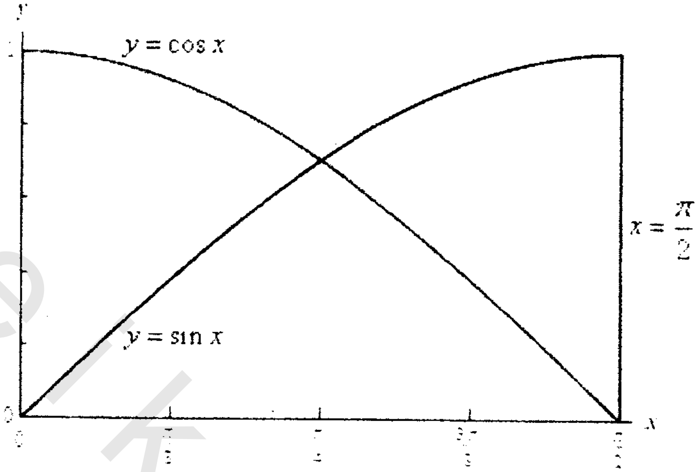
$$= \frac{142}{3}.$$

<u>مثال</u> أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, **y-axis.**

الحل

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه



فى هذا المثال يوجد حالة أخرى وهى ايجاد مساحة تكاملين متقاطعين فى النقطة: $\sin x = \cos x$

والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها هى:

$$\therefore A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 = 0.828427.$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 3 \ , \ y = x - 1 .$$

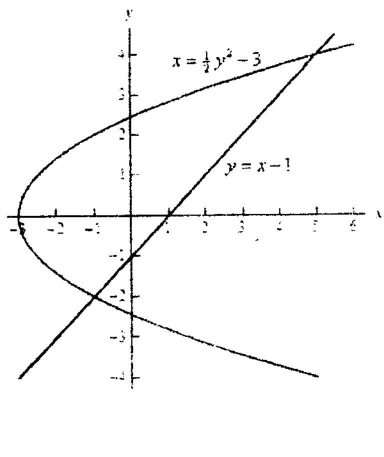
الحل

دعنا اولا نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على:

$$y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \Rightarrow$$
$$2y + 2 = y^2 - 6 \Rightarrow$$
$$0 = y^2 - 2y - 8 \Rightarrow$$
$$0 = (y - 4)(y + 2) \Rightarrow$$
$$y = -2, y = 4$$

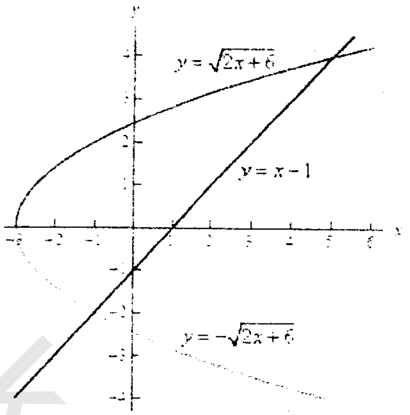
وبالتالى الاحداثيات (2-,1-), (5,4)

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها



وبالتالى يمكنا حل معدلة القطع المكافئ للدالة العاليا والسفلى مع العلم بأن الاشارة "+" للجزء العلوى والاشارة"−" للسفلى:

$$y = \pm\sqrt{2x+6}$$



وبالتالى التكامل المطلوب هو:

$$\therefore A = \int_{-3}^{1} \sqrt{2x+6}-(\sqrt{2x+6})dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6}-(x-1)dx$$

$$= \int_{-3}^{1} 2\sqrt{2x+6}dx + \int_{-1}^{5} (\sqrt{2x+6}-x+1)dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (2\sqrt{2x+6})dx + \int_{-1}^{5} (\sqrt{2x+6})dx + \int_{-1}^{5} (-x+1)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Bigg|_{0}^{4} + \left(\frac{1}{3}u^{3/2}\right)\Bigg|_{4}^{16} + \left(-\frac{1}{2}x^{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{5}$$

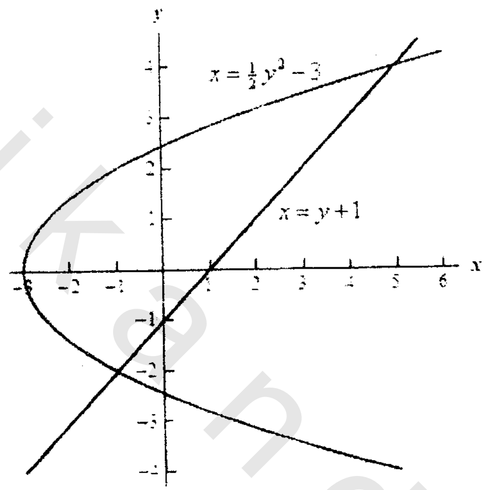
$$= 18$$

وبالتالى يبقى لنا حساب التكامل الاتى من معادلة (4):

$$A = \int_c^d \begin{pmatrix} right \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} left \\ function \end{pmatrix} dy, \qquad c \le y \le d$$

وذلك للدالة $x = f(y)$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوبة



والمساحة المطلوبة هى:

$$A = \int_c^d \begin{pmatrix} right \\ function \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} left \\ function \end{pmatrix} dy$$

$$= \int_{-2}^{4} ((y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3))dy$$

$$= \int_{-2}^{4} (-\frac{1}{2}y^2 + y + 4)dy$$

$$= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$= 18$$

وهى نفس النتيجة السابقة واسهل من الطريقة السابقة.

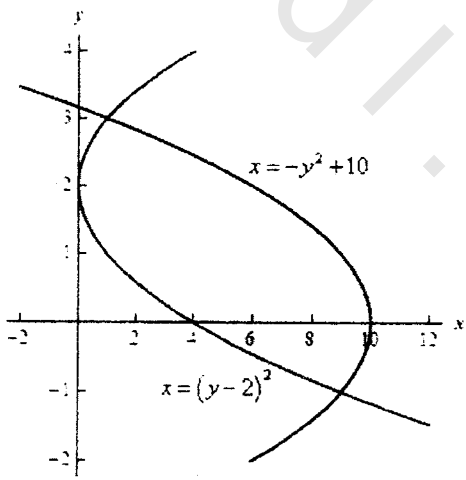
مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$$x = -y^2 + 10 \; , \; x = (y-2)^2$$

الحل دعنا اولا نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على

$$y^2 + 10 = (y-2)^2 \Rightarrow$$
$$-y^2 + 10 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow$$
$$0 = 2y^2 - 4y - 6 \Rightarrow$$
$$0 = 2(y+1)(y-3) \Rightarrow$$
$$y = -1, y = 3$$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها



والمساحة المطلوبة هى:

$$A=\int_c^d \begin{pmatrix} right \\ function \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} left \\ function \end{pmatrix} dy$$

$$=\int_{-1}^{3}((-y^2+10)-(y-2)^2)dy$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2y^2+4y+6)dy$$

$$=\left(-\frac{2}{3}y^3+2y^2+6y\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$=\frac{64}{3}$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحنيات الدوال

$x=2y^2-4$, $x=y^2$

الحل دعنا اولا نوجد نقط التقاطع وذلك بحل المعادلتين نحصل على

$put \quad y^2=2y^2-4 \Rightarrow$

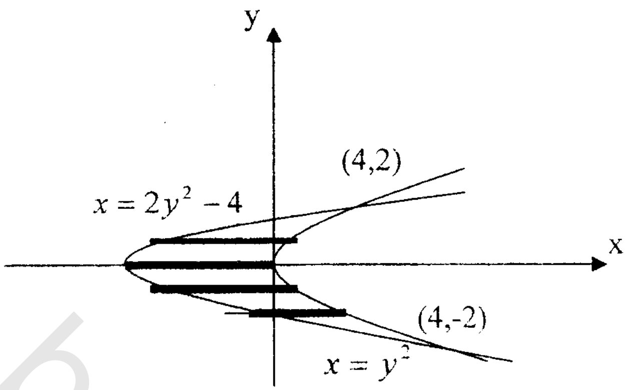
$y^2-4=0 \Rightarrow$

$(y-2)(y+2)=0$

$\Rightarrow y=2,$

$y=-2$

الشكل الآتى يوضح منحنيات الدوال المعطاه والمساحة المحصورة المطلوب ايجادها



والمساحة المطلوبة هى:

$$A = \int_{-2}^{2}[y^2 - (2y^2 - 4)]dy = \int_{-2}^{2}(4 - y^2)dy = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

اذا كانت الدالة y=f(x) معطاه فى الصورة البارامترية:

$$y = \psi(t), x = \varphi(t), \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

فإن المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة ومحور السينات والخطين المستقيمين x=b ، x=A هى :

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} y\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

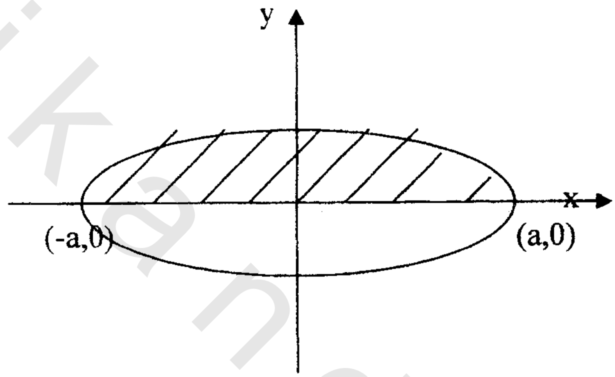
مثال أوجد مساحة القطع النقص $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

الحل نحسب مساحة النصف العلوى ثم نضاعف الناتج. فى هذه الحالة فإن x تتغير من a– الى a ، t تتغير من π الى 0.

$$A = 2\int_{\pi}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)dt$$

$$= -2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt = 2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

$$= 2ab\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt \quad = ab\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \pi ab$$



$$A = 2\int_{\pi}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)dt \quad = 2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt = -2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

$$= 2ab\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt \quad = ab\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \pi ab$$