

## الباب الرابع

المعنى الهندسى للتكامل المحدود

### Geometrical meaning for The finite integrals

والآن ما هو التفسير الهندسى للتكامل المحدود.

المعنى الهندسى للتكامل المحدود هو إيجاد المساحة أسفل المنحنى

لتوضيح ذلك سنفترض هنا أن الدالة متصلة في الفترة  $[a,b]$  وأن

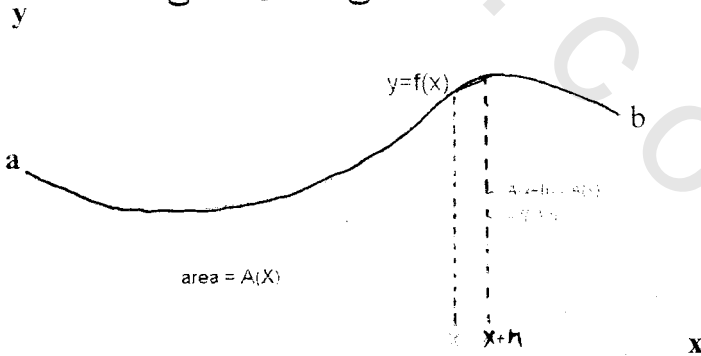
$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

ولنفرض أن  $P$  هو التجزئ النوني المنتظم للفترة  $[a,b]$  فيكون مجموع

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

ريمان

هو مساحة المنطقة المضلعة في الشكل التالي:



ومن الواضح أنه كلما زادت عدد الفترات الجزئية  $n$  وصغرت كل من الأطوال  $\Delta x_k$  كلما كثرت عدد المستطيلات المتلاصقة وصغرت قاعدة كل منها. وفي النهاية نستطيع أن نتصور أنه حين  $n \rightarrow \infty$  فإن مجموع رييمان

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

يقترّب من مساحة المنطقة المظللة في الشكل وهي المحصورة بين :

i. منحنى الدالة  $y=f(x)$

ii. محور السينات

iii. الخطيين المستقيمين  $x=a, x=b$

أى أنه إذا كانت الدالة  $y=f(x)$  متصلة في  $[a,b]$  وكانت غير سالبة في

$$\int_a^b f(x) dx$$

هذه الفترة. فإن

يعبر عن مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنى الدالة  $f$

ومحور السينات والخطيين المستقيمين  $x=a$  و  $x=b$ .

فمثلا المساحة الواقعة بين منحنى  $y = x$  ومحور السينات والمستقيمين

$$\int_1^3 x dx = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$$

$x=1$  و  $x=3$

وهي مساحة شبه المنحرف الموضح في الشكل .

وسوف نعود فى الباب الثانى الى المعنى الهندسى للتكامل  $\int_a^b f(x)dx$

**تعريف (1)** إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للتكامل على  $[a,b]$  فان :

i. 
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ii. 
$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

$$\int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{3^2 - (-2)^2}{3} = \frac{35}{3}$$

فمثلا

$$\int_3^{-2} x^2 dx = \frac{-35}{3}$$

وتبعاً لتعريف (5) يكون :

**بعض خواص التكامل المحدود**

### **Some Properties of Definite integrals**

فى هذا الفصل نقدم أهم خواص التكامل المحدود والتي يمكن إثباتها استناداً الى تعريف (3) فى الباب السابق.

**نظرية (1)** : إذا كان  $A \in \mathbb{R}$  وكانت  $f$  دالة قابلة للتكامل على  $[a,b]$

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

فإن

**نظرية (2):** إذا كانت الدالتان  $f_1, f_2$  قابلتان للتكامل على  $[a, b]$  فإن

الدالة  $f_1 + f_2$  تكون قابلة للتكامل على  $[a, b]$  ويكون :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

**نظرية (3):** إذا كانت الدالتان  $f, g$  قابلتان للتكامل على  $[a, b]$  وكان

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**نتيجة (1):** إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على الفترة  $[a, b]$  فإن

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

**نظرية (4):** إذا كانت الدالة  $f$  متصلة في  $[a, b]$  فإنه يوجد نقطة

$\xi \in [a, b]$  بحيث :

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

**البرهان:** بما أن الدالة متصلة في  $[a,b]$  فإن للدالة  $f$  قيمة عظمى  $M$  وايضا قيمة صغرى  $m$  على الفترة  $[a,b]$ . بمعنى أنه يوجد  $x_1, x_2$  في الفترة  $[a,b]$  بحيث يكون :

$$f(x_1) = M, \quad f(x_2) = m$$

$$M \geq f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b]$$

باستخدام نظرية (2) يكون :

$$\int_a^b M dx \geq \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx$$

وتبعا للمثال صفحة 73 يكون

$$M(b-a) \geq \int_b^a f(x) dx \geq m(b-a)$$

بالقسمة على  $(b-a)$  مع ملاحظة أن  $b-a > 0$  ينتج أن

$$M \geq \frac{1}{(b-a)} \int_b^a f(x) dx \geq m \quad \text{or}$$

$$f(x_1) \geq \frac{1}{(b-a)} \int_b^a f(x) dx \geq f(x_2)$$

من اتصال الدالة  $f$  توجد نقطة  $\xi$  في الفترة  $[x_1, x_2]$  تحقق المتساوي الآتية :

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_b^a f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_b^a f(x) dx = (b-a)f(\xi)$$

$$\xi \in [x_1, x_2] \subset [a, b] \quad \text{حيث}$$

**مثال** أوجد قيمة العدد  $\xi$  الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_2^5 (4x - 5) dx$$

**الحل** نفرض أن  $f(x) = 4x - 5$  فتكون  $f$  دالة متصلة في الفترة  $[2, 5]$

وبالتالي تبعا لنظرية (3) يوجد عدد  $\xi \in [2, 5]$  بحيث

$$\int_2^5 (4x - 5) dx = (5 - 2)f(\xi) = 3f(\xi)$$

$$\int_2^5 (4x - 5) dx = 4 \int_2^5 x dx - \int_2^5 5 dx$$

ولكن

$$= 4 \cdot \frac{5^2 - 2^2}{2} - 5(5 - 2) = 27$$

$$3f(\xi) = 27 \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = 9 \quad \Rightarrow$$

$$4\xi - 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad 4\xi = 14 \quad \Rightarrow$$

$$\xi = 3\frac{1}{2} \quad \in \quad [2,5].$$

### نظرية (5) :

إذا كانت  $c \in [a,b]$  فإن الدالة  $f$  تكون قابلة للتكامل على  $[a,b]$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة للتكامل على كل من  $[a,c]$  ،  $[c,b]$  وفي هذه الحالة يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \dots\dots\dots(7)$$

**البرهان :** سنكتفى هنا بإيضاح المتساوية (7) . حيث أن نهاية مجموع ريمان على  $[a,b]$  لا يعتمد على الطريقة التي نجزي بها الفترة  $[a,b]$  الى فترات جزئية ( وذلك لأن الدالة  $f$  قابلة للتكامل على هذه الفترة) لذلك سوف نجزي  $[a,b]$  الى فترات جزئية بحيث تكون النقطة  $c$  هي احدى نقط التجزئ. وهكذا فان مجموع

ريمان  $\sum_a^b$  المناظر للفترة  $[a,b]$  ينقسم الى جزئين هما  $\sum_a^c$  المناظر للفترة  $[a,c]$  ،  $\sum_c^b$  المناظر للفترة  $[c,b]$  . ويكون

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

فإننا نحصل على المتساوية (7) عندما  $\|P\| \rightarrow 0$ .

## ملاحظة

يمكن تعميم النظرية السابقة كما يلي :

إذا كانت  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$

فإن الدالة  $f$  تكون قابلة للتكامل على  $[a, b]$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة

للتكامل على

$[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_n, b]$

وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

## النظرية الأساسية لحساب التكامل

### Fundamental Theorem of Calculus

سنبحث في هذا الفصل العلاقة بين التفاضل والتكامل ليس فقط لأهميته النظرية وإنما لأن هذه العلاقة ستسفر عن وسائل أكثر سهولة لحساب التكاملات المحدودة في كثير من الحالات.

## نظرية (6)

### النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

الجزء الأول:



إذا كانت الدالة  $f$  متصلة في الفترة  $[a,b]$  وكانت  $G$  وهي الدالة المعرفة بواسطة:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\therefore \frac{d}{dx} G(x) = f(x)$$

**البرهان:** لنفرض أن  $x$ ،  $x+h$  نقطتان في الفترة  $[a,b]$  حيث  $h$  مقدارا صغيرا (موجبا أو سالبا) فيكون:

$$\begin{aligned} G(x+h) &= \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt = G(x) + \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

أى أن

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكامل فإنه يوجد عدد  $\xi \in [x, x+h]$  إذا كانت  $h > 0$  أو  $\xi \in [x+h, x]$  إذا كانت  $h < 0$  أى أن  $\xi$  تقع بين  $x+h$  و  $x$  بحيث

$$G(x+h) - G(x) = (x+h-x)f(\xi) = hf(\xi)$$

أى أن

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(\xi)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} G(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

(اتصال الدالة f على [a,b])

### ملاحظة

1- النظرية السابقة تعنى ان التكامل المحدود  $\int_a^x f(t)dt$  حيث الحد العلوى

للتكامل متغير x، هو دالة أصلية للدالة f.

2- نستنتج من النظرية (10) ان لكل دالة متصلة يوجد دالة أصلية وان

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

مثال أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية بالنسبة الى x:

i)  $\int_1^x e^{t^2} dt$

ii)  $\int_x^0 \cos t dt$

$$\text{iii) } \int_0^{x^2} \sin 2t dt$$

$$\text{iv) } \int_{\sqrt{x}}^{x^3} e^{t^2} dt$$

الحل

$$\text{i) } \frac{d}{dx} \int_1^x e^{t^2} dt = e^{x^2}$$

$$\text{ii) } \frac{d}{dx} \int_x^0 \cos t dt = \frac{d}{dx} \left( - \int_0^x \cos t dt \right) = -\cos x$$

$$\text{iii) } \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin 2t dt = \frac{d}{dx^2} \left( \int_0^{x^2} \sin 2t \right) dt \frac{dx^2}{dx} = \sin 2x^2 \times 2x$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^3} e^{t^2} dt &= \frac{d}{dx} \left( \int_{\sqrt{x}}^a e^{t^2} dt + \int_a^{x^3} e^{t^2} dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( - \int_a^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \right) + \frac{d}{dx} \left( \int_a^{x^3} e^{t^2} dt \right) \\ &= \frac{d}{d\sqrt{x}} \left( - \int_a^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \right) \times \frac{d\sqrt{x}}{dx} + \frac{d}{dx^3} \left( \int_a^{x^3} e^{t^2} dt \right) \times \frac{dx^3}{dx} \end{aligned}$$

$$= -e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{x^3} \times 3x^2$$

والآن نعطي النظرية الأساسية لحساب التكامل والتي تعطي طريقة حساب التكامل المحدود باستخدام التكامل غير المحدود. وهذا ما سنفعله دائما في ايجاد قيمة التكاملات المحدوده.

**النظرية الاساسية (نظرية نيوتن - ليبنز)**

### **Newton's -Leibniz's Fundamental Theorem**

اذا كانت الدالة  $f$  متصلة على  $[a,b]$  وكانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[a,b]$  فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**البرهان:** بما أن الدالة

$$\int_a^x f(t) dt$$

دالة أصلية للدالة  $f$  وبما أن أى دالة أصلية للدالة  $f$  تكون على الصورة

$$F(x) + c, \quad c \in R$$

فنستنتج أن

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + c \quad \dots (8)$$

بوضع  $x=a$  نحصل على :

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + c$$

وبما أن الطرف الأيسر يساوى صفراً فإن

$$C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad \text{وبالتعويض في (8) يكون :}$$

بوضع  $x=b$  في هذه المتساوية نحصل على :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

وباستخدام تعريف 5 نحصل على المطلوب.

**ملاحظة** سوف نرمز فيما بعد للمقدار  $F(b)-F(a)$  بالرمز  $[F(x)]_a^b$

**مثال** أحسب كل من التكاملين :

a)  $\int_{-2}^2 (5x^4 + 3x^2) dx$

b)  $\int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 3)} dx$

**الحل**

$$\text{a) } \int_{-2}^2 (5x^4 + 3x^2) dx = [x^5 + x^3]_{-2}^2$$

$$= (2^5 + 2^3) - ((-2)^5 + (-2)^3) = 80$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 3)^3} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (2x^2 + 3)^{-3} (4x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{(2x^2 + 3)^{-2}}{-2} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{25} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{225}$$

### ملاحظة

الفرق  $F(b) - F(a)$  لا يعتمد على اختيار الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  ولذلك في المثال السابق (أ) أخذنا الدالة الأصلية

$$F(x) = x^5 + x^3$$

لأننا لو أخذنا الدالة

$$F(x) = x^5 + x^3 + c$$

فإن قيمة التكامل لن تتغير.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin x dx$$

مثال أحسب التكامل الآتي :

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^3 (-\sin x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= - \left[ \frac{(\cos x)^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{64}$$

### ملاحظة

الفرق  $F(b)-F(a)$  لا يعتمد على اختيار الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  ولذلك في المثال السابق (أ) أخذنا الدالة الأصلية

$$F(x) = x^5 + x^3$$

لأننا لو أخذنا الدالة

$$F(x) = x^5 + x^3 + c$$

فإن قيمة التكامل لن تتغير.

**استبدال المتغير في التكامل المحدود**

### **Variables changes in finite integral**

إذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة المغلقة  $[a, b]$  واستخدمنا التعويض

$x = \varphi(t)$  حيث الدالة  $\varphi$  قابلة للتفاضل فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

حيث

$$a = \varphi(\alpha) \quad , \quad b = \varphi(\beta)$$

وذلك لأنه إذا كان :

$$\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$= [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

وسنوضح ذلك في المثال التالي :

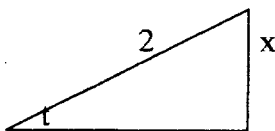
$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

مثال أحسب التكامل

فيكون  $x = 2 \sin t$

الحل نستخدم التعويض

$$dx = 2 \cos t dt$$



$$\sqrt{4-x^2}$$



$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \quad x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

مثال أحسب التكامل

الحل هذا التكامل يحل بالتجزئ كما يلي :

$$dv = \sin x \cdot dx ,$$

$$u = x$$

$$\Rightarrow v = -\cos x$$

$$- \int$$

$$du = 1 \cdot dx$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

والآن باستخدام نظرية نيوتن - ليبتز

يمكننا إثبات الخواص الإضافية التالية للتكامل المحدود للدوال المتصلة :

خاصية (1)

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

البرهان

بوضع  $x=a-t$  نجد أن  $dx=-dt$  ونحصل على :

$$\int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(a-t) dt = \int_0^a f(a-t) dt = \int_0^a f(a-x) dx$$

خاصية (2)

$$\int_0^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx & \text{if } f(a-x) = f(x) \\ 0 & \text{if } f(a-x) = -f(x) \end{cases}$$

البرهان

أولا إذا كان  $f(a-x) = -f(x)$  فمن خاصية (1) نجد أن

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_0^a f(x) dx = 0 \quad \text{وبالتالى} \quad 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx = 0 \quad \text{أذن}$$

ثانيا إذا كان  $f(a-x)=f(x)$  حيث أن

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx \dots\dots(9)$$

نضع  $x=a-t$  فيكون  $dx=-dt$  ونحصل على

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx = - \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t) dt = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx$$

ومن (9) نحصل على أن

$$\int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx$$

خاصية (3)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{if } f \text{ is even} \\ 0 & \text{if } f \text{ is odd} \end{cases}$$

البرهان

$$Q \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \dots (10)$$

بوضع  $x = -t$  نجد أن  $dx = -dt$  وبما أن

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx \dots (11)$$

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا كانت } f \text{ زوجية} \\ -f(x) & \text{إذا كانت } f \text{ فردية} \end{cases}$$

فمن (11) نجد أن

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \begin{cases} \int_0^a f(x) dx & \text{إذا كانت } f \text{ زوجية} \\ - \int_0^a f(x) dx & \text{إذا كانت } f \text{ فردية} \end{cases}$$

وبالتعويض في (10) نحصل على المطلوب.

امثلة محلولة

### Solved Problems

$$\int_0^a x(a-x)^n dx$$

**مثال** أحسب قيمة التكامل

حيث  $n \neq -2$  ،  $n \neq -1$

**الحل** من خاصية (1) نجد أن مع وضع كل  $x = (a-x)$

$$\int_0^a (a-x)^n dx = \int_0^a (a-x)x^n dx$$

$$= a \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a - \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^a = a^{n+2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

**مثال** اثبت صحة العلاقات الآتية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx , \quad \int_0^{\pi} \cos x dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2 , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0 , \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

**الحل** حيث أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

خاصية (1)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

ومن ذلك عند  $n=1$  نجد أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 1$$

وحيث أن

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad , \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

فباستخدام خاصية (2) ، نجد أن :

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad , \quad \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2$$

حيث أن  $\cos$  دالة زوجية ،  $\sin$  دالة فردية فإنه تبعا للخاصية (3) يكون

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x dx = 2 \times 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

حيث أن

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \quad , \quad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x dx = 2 \times 0 = 0$$

فإن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

مثال احسب قيمة التكامل

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x$$

$$\therefore I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$$= - \left[ \sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \dots \dots \dots (12)$$

من (12) نحصل على :

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

بالتعويض في (12) :

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

وبتكرار استخدام العلاقة (12) نلاحظ ان قيمة التكامل تتوقف في النهاية

على  $I_0$  أو  $I_1$  حسب كون  $n$  زوجية أو فردية وينتج ما يلي:

إذا كانت  $n$  زوجية فإن :

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \dots \dots \frac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

وحيث أن



$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

إذا كانت n فردية فإن :

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \Rightarrow$$

وحيث أن

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \cdot 1$$

مثال أوجد علاقة رجعية بين  $I_{m,n}$  ،  $I_{m,n-2}$  وكذلك بين  $I_{m,n}$  ،  $I_{m-2,n}$

$$I_{m,n} = \int \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$$

إذا كان

الحل

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \sin^m \theta \cos^{n-1} \theta (\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{\cos^{n-1} \theta \sin^{m+1} \theta}{m+1} - \int \frac{\sin^{m+1} \theta}{m+1} d(\cos^{n-1} \theta) \\ &= \frac{\sin^{m+1} \theta}{m+1} \cos^{m-1} \theta + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} \theta \cos^{n-2} \theta d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^{m+1} \theta}{m+1} \cos^{n-1} \theta + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m \theta (1 - \cos^2 \theta) \cos^{n-2} \theta d\theta$$

$$= \frac{\sin^{m+1} \theta}{m+1} \cos^{n-1} \theta + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n})$$

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} \theta \cos^{n-1} \theta + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}, m \neq -n \quad (1)$$

$$I_{m,0} = \int \sin^n \theta d\theta$$

وأخيرا يمكننا الوصول الى

إذا كانت n زوجية

$$I_{m,1} = \int \cos^m \theta \sin \theta d\theta$$

يمكننا الوصول الى

وإذا كانت n فردية

يمكننا الوصول الى

$$I_{m,1} = \int \cos^m \theta \sin \theta d\theta = - \int \cos^m \theta d(\cos \theta)$$

$$= \frac{-1}{m+1} \cos^{m+1} \theta + c$$

وبالمثل يمكن كتابة

$$I_{m,n} = \int \sin^{m-1} \theta \cos^n \theta (\sin \theta d\theta)$$

$$= \int \sin^{m-1} \theta \cos^n \theta d(\cos \theta)$$

$$= \frac{-1}{m+n} \sin^{m-1} \theta \cos^{n+1} \theta + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \quad m \neq -n \quad \dots(2)$$

يمكن تطبيق (2) بدلا من (1) اذا تطلب الحل ذلك.

من (2) & (1) يمكننا كتابة النتيجتين التاليتين :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^{n-2} \theta d\theta \\ \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \theta \cos^n \theta d\theta \end{cases}$$

مثال اثبت ان

$$I_{6,4} = \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{10} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

والآن يمكننا كتابة النتيجة الهامة التالية :

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$$

$$= \frac{[(m-1)(m-3)\dots](n-1)(n-3)\dots}{(m+n)(m+n-2)\dots} * P$$

2 إذا كان العدد  $m+n$  زوجي

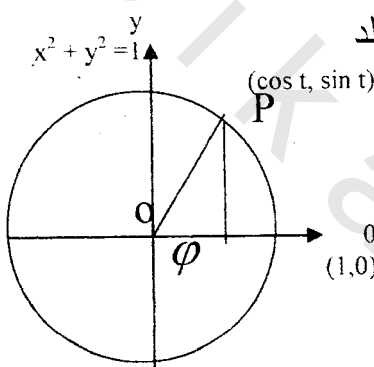
المقام ينتهي بالعدد

1 إذا كان العدد  $m+n$  فردي

$\frac{\pi}{2}$  إذا كان العدد  $m+n$  زوجي

P

=1 إذا كان غير ذلك



**مثال** أثبت أن  $\frac{t}{2}$  هو مساحة قطاع دائري متولد

من منحنى دائري يبدأ من  $(1,0)$  وينتهي

عند  $(\cos t, \sin t)$  حيث  $t \in [0, 2\pi]$ .

وأيضاً  $\frac{t}{2}$  هو مساحة قطاع زائدي يبدأ من  $(1,0)$  وينتهي عند

$(\cosh t, \sinh t)$  حيث  $t > 0$ .

**البرهان** مساحة القطاع الزائدي  $A(t)$  هي

$$A(t) = \frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

الحد الأول هو مساحة المثلث  $OP\phi$  والحد الثاني هو مساحة المنطقة

غير المظللة سوف نبين أن  $A(t) = \frac{1}{2}, t \geq 0$  وذلك بأن نثبت

$$A(0) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad \text{لكل} \quad A'(t) = \frac{1}{2}$$

$$A'(t) = \frac{1}{2} [\cosh^2 t + \sinh^2 t] - \frac{d}{dt} \left( \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} dx \right)$$

باستخدام النظرية الأساسية للتكامل

$$\frac{d}{dt} \left( \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} dx \right) = \sqrt{\cosh^2 t - 1} \frac{d}{dt} (\cosh t) = \sinh t \cdot \sinh t = \sinh^2 t$$

$$A'(t) = \frac{1}{2} [\cosh^2 t + \sinh^2 t] - \sinh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = \frac{1}{2} \cosh 0 \sinh 0 - \left( \int_1^{\cosh 0} \sqrt{x^2 - 1} dx \right) = \frac{1}{2} - \int_1^1 \sqrt{x^2 - 1} dx = 0$$

## تمارين

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^1 \sin^{-1} x dx, \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^3 dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx, \quad \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sqrt{16+9x^2} dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx \quad (3)$$

$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} dx, \quad \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2-x^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{1+3x^2} dx, \quad \int_0^3 x(3-x)^n dx \quad (5)$$

(6) اثبت أنه إذا كان  $n, m$  عددان صحيحان موجبان فإن :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(m-1)(m-3)\dots(n-1)(n-3)\dots}{(m+n)(m+n-2)\dots} \times \frac{\pi}{2} \\ \frac{(m-1)(m-3)\dots(n-1)(n-3)\dots}{(m+n)(m+n-2)\dots} \times 1 \end{array} \right.$$

إذا كان كل من  $n, m$  عدد زوجي في بقية الحالات

(7) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^5 x dx, \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x \sin^3 x dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x(x + \sin x) dx, \int_0^{\pi} (1 + \cos)^3 \sin^2 x dx$$

(8) أثبت صحة كل مما يأتي :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$$

(9) أوجد كل مما يلي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx, \int_0^{\pi} \ln \sin x dx, \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{7}{2}} dx$$

$$\int_{-a}^a x^2 (a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx, \int_0^{\pi} x \cos^4 x \sin^3 x dx$$

(10) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين  $y=x^4-2x^2$  ،  $y=2x^2$

(11) أوجد مساحة المنطقة المحصورة من الشمال بالمنحنى  $x=y^2$  ومن

اليمين بالمنحنى  $x=3-2y^2$

(12) أوجد مساحة المنطقة بين  $x=y^2$  ،  $x-y=2$

(i) التكامل بالنسبة الى  $x$  (ii) التكامل بالنسبة الى  $y$

(13) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة  $y=\sin x$  ومحور

$x$

حول الخط المستقيم  $0 \leq x \leq \pi$   $y=1$

(14) اذا دارت المنطقة بين  $y=\cos x$  ،  $y=\sin x$   $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$  حول

الخط  $y=1$ . أوجد حجم المجسم.

(15) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة بين  $y=2x$  ،  $y=x^2$

حول (i) الخط  $x=5$  (ii) الخط  $x=1$

\* \* \*