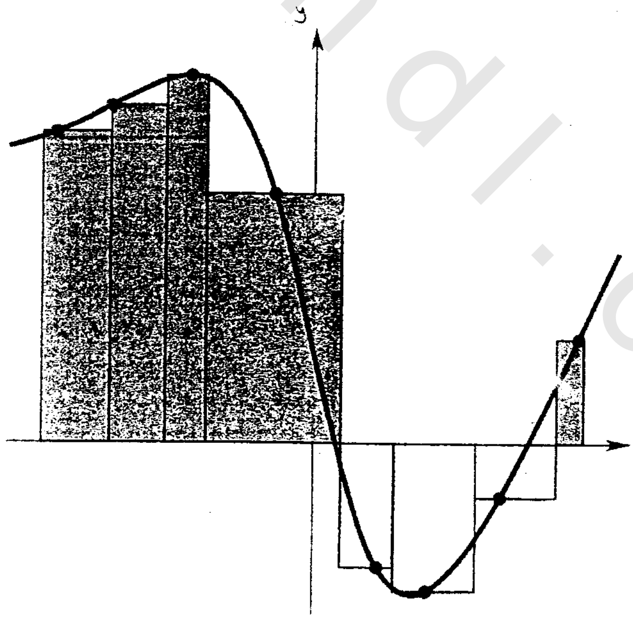
# الباب الثالث

## التكامل المحدود "تكامل ريمان "

## Definite Integrals "Riemann Integral"

فى هذا الباب سنتكلم عما يسمى "تكامل دالة على فترة حقيقية" وسوف نرى أن عملية التكامل هذه ما هى الا عملية جمع ذات طابع خاص تتمثل فى جمع عدد لانهائى من العناصر الصغيرة جدا، وحينما يكون لهذا المجموع ناتج محدود ووحيد فسوف نقول أن الدالة المعطاة قابلة للتكامل على الفترة المعطاة.



وقد نشأ موضوع التكامل كغيرة من الموضوعات الرياضية الهامة لحل مجموعة من المشكلات ومن أهم المشكلات التى ساعدت على ظهورفكرة التكامل المحدود مشكلة إيجاد مساحة منطقة مستوية مثل المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

**وسيكون موضوع الدراسة هنا تحت الشروط الآتية :**

1- أن تكون الدالة حقيقية

2- أن تكون الفترة التى تكامل عليها الدالة مغلقة $[a,b]$ حيث $a<b$

## تكامل ريمان

## Riemann's Integral

**فى حساب التفاضل والتكامل يعرف التكامل على انه ايجاد المساحة اسفل المنحى** في حين أن هذا التفسير هو بالتأكيد مفيد. فى هذة الحالة لاعتبارات هندسيية تطبيقية فأن ملخص تفسير التكامل سيجعل الكثير من الخواص سهل تذكرها.

أولا ، كما جرت العادة ، يتعين علينا أن نعرف التكامل قبل أن نتمكن من مناقشة خواصة. سنبدأ مع **تعريف تكامل ريمان.**

## 1 تعريف ريمان للتكامل Reimann's Definition

**تعريف (1) :**

اذا كانت الدالة $[a,b]$ فترة مغلقة فإن تجزئ هذه الفترة يعنى تقسيمها الى

عدد قدره n من الفترات الجزئية ويتم ذلك بواسطة تحديد مجموعة من النقط تسمى بنقط التجزئ وعددها n+1 :

$$a = x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots, x_k, \ldots\ldots, x_n = b \in [a,b]$$

حيث

$$x_0 < x_1 < x_2, \ldots\ldots < x_n$$

وتسمى الفئة

$$P = \left\{ [x_{k-1}, x_k] : \quad k = 1,2,3,\ldots,n \right\}$$

بالتجزئ النونى للفترة [a,b].

وتسمى الفترة $\left[x_{k-1}, x_k\right], k = 1,2,\ldots\ldots,n$ بفترة جزئية للفترة [a,b]، ويستخدم الرمز $\Delta x_k$ للدلالة على طول هذه الفترة أى أن

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

سنرمز بالرمز ||p|| لمعيار التجزئ p والذى يعرف بإنه

$$\|P\| = \max \Delta x_k$$

واذا كانت المسافات بين نقط التجزئ متساوية يسمى التجزئ الناتج بالتجزئ المنتظم النونى للفترة [a,b] .واذا كانت فى هذه الحالة $\Delta x$ تعبر عن طول أى فترة جزئية وأن

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

وتكون نقط التجزئ المنتظم النونى للفترة [a,b] هى :

$$x_r = a + r\Delta x, \qquad r = 0,1,2,\ldots,n.$$

**مثال**

* ماهو معيار تجزىء 10 اجزاء متساوية من الفترة المغلقة[0,2] ؟

ما هو معيار n لفترات متساوية من الفترة المغلقة [a,b] ؟
*تجزىء

* بين انه اذا كان P' هو تكرير P فيكون $|P'| \leq |P|$

بأستخدام هذة الخواص السابقة ، يمكن تعريف الآتى:

## تعريف مجموع ريمانDefinition Riemann Sums

**تعريف (2):**

لتكن الدالة f معرفة على الفترة [a,b] . يعرف مجموع ريمان للدالة f المناظر للتجزئ p بأنه المجموع

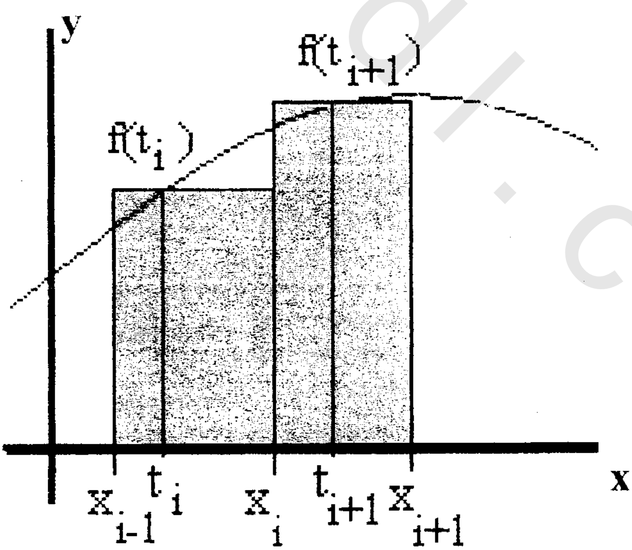
$$S_p(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

حيث $t_j$ نقطة اختيارية فى الفترة $[x_j - x_{j-1}]$ .

**ملاحظة (1) :**

1- من التعريف (2) يتضح أن مجموع ريمان ليس وحيدا حيث أنه يعتمد على طريقة التجزئ للفترة [a,b] أى يعتمد على عدد الفترات الجزئية التى قسمنا إليها [a,b] وعلى أطوال هذه الفترات كما أنه يعتمد أيضا على طريقة إختيارنا للنقط $t_j$

2-مساحة المنطقة المضلعة فى الشكل التالى تمثل مجموع ريمان . ونحصل عليها بإن نرسم مستطيلا ارتفاعه $f(t_j)$ على كل فترة جزئية $[x_j - x_{j-1}]$ من فترات التجزئ P.



## ملاحظة2

اذا كانت الدالة $f$ موجبة فأن مجموع ريمان هندسيا يمثل مجموع مساحات المستطيلات $[x_j - x_{j-1}]$ بطول $[x_j - x_{j-1}]$ وارتفاع $f(t_j)$

## خواص تكامل ريمان

## Properties of the Riemann Integral

نفرض ان **f, g** هما دوال ريمان للفترة المغلقة $[a,b]$

**الخواص الاتية متحققة :**

1. $\int_a^b c\,f(x) + d\,g(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$

2. **If** $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

4. **If** $g(x) < f(x)$ **on** $[a, b]$**, then** $\Rightarrow \int_c^b g(x)\,dx \le \int_c^b f(x)\,dx$

حيث g(x) داله اخرى فى الفترة [a,b].

اذا كانت g(x) داله اخرى فى الفترة [a,b] فأن $f(x) \cdot g(x)$

يمكن تكاملها على نفس الفترة السابقة.

## تعريف (3):

لتكن الدالة f معرفة على الفترة [a,b]. اذا كانت النهاية

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

معرفة ودائما تساوى عدد حقيقى I مهما كانت طريقة تكوين مجموع ريمان

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

فإن العدد I يسمى بالتكامل المحدود (أو تكامل ريمان المحدود) للدالة f على الفترة [a,b] ويرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

اى أن :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_n$$

ويقال أيضا فى هذه الحالة أن f قابلة للتكامل على [a,b].

## ملاحظة (3)

1- من التعريف السابق يتضح أنه اذا كانت fقابلة للتكامل على

2- [a,b] فإن التكامل $$\int_a^b f(x)dx$$

والذى يقرأ " تكامل f من a إلى b" هو عدد حقيقى يعتمد على أمرين فقط هما :

ا- قيمتا العددين a,b ( ويسمى العددان a,b حدا التكامل)

ب-قاعدة تعريف الدالة f

أما رمز المتغير x فيمكن استبداله باى رمز آخر فيكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b$$

2-من تعريف النهايات التى سبق دراستها فى مرحلة سابقة يمكننا اعادة **صياغة تعريف 3 بطريقة أخرى كما يلى :**

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة [a,b] فإن العدد I يسمى تكامل ريمان المحدود للدالة f على الفترة [a,b] اذا تحقق الشرط التالى :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad |I - S_p| < \varepsilon$$

لكل تجزئ P فيه $\|P\| < \delta$. وذلك لاى اختيار للنقط

$$k = 1,2,........,n \qquad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

## نظرية (1)

اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة [a,b] فإنها تكون محدودة

على نفس الفترة .

**البرهان:** لنفرض أن f غير محدودة على الفترة [a,b] ، أى أنه

$$\forall c > 0 \qquad \exists x \in [a,b] \qquad \ni |f(x)| > c$$

إذن لاى تجزئ

$$P = \{[x_{k-1}, x_k] : k = 1,2,........,n\}$$

للفترة [a,b] توجد فترة جزئية واحدة على الأقل $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ بحيث

تكون الدالة f غير محدودة فيها، اى أن

$$\forall c > 0 \quad \exists \zeta_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] ; \quad |f(\xi_{k_0})| > c \qquad (1)$$

باختيار النقط $\zeta_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ فى الفترات الأخرى ، حيث

k≠k، فإن مجموع ريمان يكون

$$S_p = f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} + \sum_{k=1, k \neq k_0}^{n} f(\xi_n) \Delta x_n$$

بتثبيت هذا الاختيار نفرض أن

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq k_0}}^{n} f(\xi_n)\Delta x_k = L$$

$$S_p = f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} + L\,, \qquad f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} = S_p - L$$

$$|f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0}| \leq |S_p| + |L|$$

$$|P| \geq |f(\xi_{k_0})|\,\Delta x_{k_0} - |L| \qquad ................(2)$$

إذا كان $\varepsilon>0$ عدد أختيارى موجب فإنه يمكن أختيار c بالشكل (من الواضح أن $c>0$) .

$$c = \frac{|L| + \varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$$

من (1) نجد أنه توجد نقطة $\zeta_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ بحيث

$$|f(\xi_{k_0})| > c = \frac{|L| + \varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$$

من (2) نحصل على أنه لأى عدد $\varepsilon>0$ يكون

$$|S_p| > \frac{|L| + \varepsilon}{\Delta x_{k_0}}\Delta x_{k_0} - L = \varepsilon$$

أى أن لآى عدد $\varepsilon>0$ (مهما كان كبيرا) ولاى تجزئ P للفترة [a,b]

يوجد اختيار للنقط $\left[x_{k_0-1}, x_{k_0}\right] \in \zeta_{k_0}$ بحيث

$$\left|S_p\right| > \varepsilon$$

وهذا يعنى عدم وجود نهاية I (فى التعريف 3) وبالتالى فإن الدالة f تكون غير قابلة للتكامل على الفترة [a,b] .

**ملاحظة (3):**

من النظرية السابقة نجد أنه لدراسة الدوال القابلة للتكامل على فترة معينة فإننا نستبعد الدوال غير المحدودة فى هذه الفترة، وبالتالى سنقصر دراستنا فيما يلى على الدوال المحدودة فقط، حيث أنه من النظرية السابقة نجد أن فئة الدوال القابلة للتكامل (على فترة معينة) هى فئة جزئية من فئة الدوال المحدودة (على نفس الفترة).

## امثلة محلولة Solved Problem

**مثال** ابحث قابلية الدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ للتكامل على [3,5].

**الحل** الدالة f معرفة بشرط

$$9-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geq |x|$$

$$\Rightarrow \quad 3 \geq x \geq -3 \quad \Rightarrow \quad x \in [-3,3]$$

أى أن الدالة f معرفة على [-3,3] أو على أى فترة جزئية منها وبما أن $[3,5] \not\subset [-3,3]$ فإن f غير معرفة على [3,5] أى أن الدالة f غير قابلة

للتكامل على هذه الفترة.

**مثال** اثبت ان الدالة $\phi$ المعرفة على الفترة $[0,1]$ بالصورة :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & ,x\in Q\\ 0 & ,x\notin Q\end{cases}$$

دالة غير قابلة للتكامل على الفترة $[0,1]$.

**الحل** بالنسبة لاى تجزئ P للفترة $[0,1]$ نجد أن أى فترة جزئية تحتوى على اعداد نسبية وغير نسبية

**أولا:** نختار جميع النقط $\zeta_{k_0}\in\left[x_{k_0-1},x_{k_0}\right]$ بحيث $\zeta_{k_0}\in Q$ فى هذه الحالة يكون مجموع ريمان هو

$$S_p=\sum_{k=1}^{n}1.\Delta x_k=1\Rightarrow$$

$$\lim_{\|P\|\to 0}S_p=1$$

**ثانيا:**

إذا اخترنا جميع النقط $\zeta_k$ بحيث $\zeta_k\in Q$ فإن مجموع ريمان يكون

$$S_p=\sum_{k=1}^{n}0.\Delta x_k=0\Rightarrow$$

$$\lim_{\|P\|\to 0}S_p=0$$

وهكذا يتضح أن الدالة غير قابلة للتكامل .

**ملاحظة (4):**

نجد ان المثال السابق يوضح أن عكس نظرية (1) غير صحيح.

اى ان اذا كانت الدالة محدودة فانة ليس من الضرورة ان تكون الدالة قابلة للتكامل.

**مثال** اثبت ان الدالة الثابتة على الفترة [a,b] تكون قابله للتكامل على هذه الفترة .

**الحل** لنفرض أن الدالة هى:

$$f(x)=c, \forall x \in [a,b]$$

ونعتبر التجزئ الاختيارى للفترة [a,b] :

$$P=\{[x_{k-1},x_k]:k=1,2,.......,n\}$$

فيكون مجموع ريمان هو

$$S_p=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c.\Delta x_k = c(b-a)$$

وذلك بغض النظر عن طريقة اختيارنا للنقط $\zeta_k \in [x_{k-1},x_k]$

ويكون

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_p = c(b-a)$$

أى أن الدالة f قابلة للتكامل ويكون

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

**(فسر ذلك بالمساحات؟)**

**سنختتم هذا الفصل بالتذكير لبعض قوانين المجموع**

(والتى يمكن اثبات صحة كل منهم باستخدام الاستنتاج الرياضى)

والتى تستخدم فى حل الأمثلة والتمارين :

1- $\sum_{r=1}^{n}(a_r \pm b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r \pm \sum_{r=1}^{n} b_r$

2- $\sum_{r=1}^{n} ca_r = c\sum_{r=1}^{n} a_r \quad , \quad c \in R$

3- $\sum_{r=1}^{n} c = cn \quad , \quad c \in R$

4- $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$

5- $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

6- $\sum_{r=1}^{n} r^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

## 2.المجموع العلوى والسفلى

## Upper and Lower Sum

**تعريف (4)** اذا كانت f دالة محدودة فى الفترة [a,b] وكان

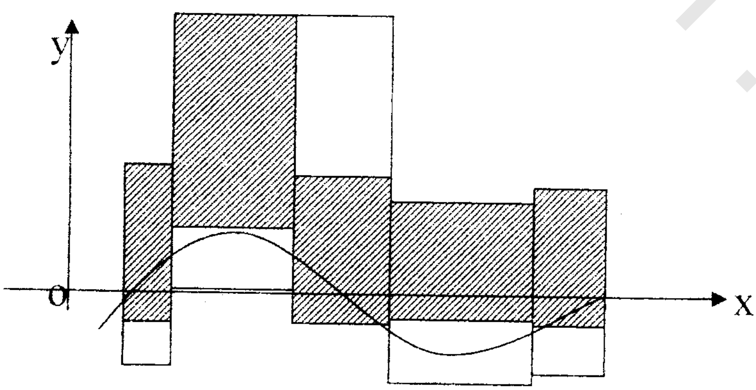
$$P = \{[x_{k-p}, x_k] : k = 1,2,\dots\dots,n\}$$

تجزيئا للفترة [a,b] واذا كان $m_k$ اكبر حد سفلى لقيم f(x) على الفترة $[x_{k-1},x_k]$ وكان $M_k$ أصغر حد علوى لقيم f(x) على الفترة $[x_{k-1},x_k]$ فإن :

$$\overline{S_p} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad , \quad \underline{S}_p = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad \dots(3)$$

يسميان على الترتيب المجموع السفلى و المجموع العلوى للدالة f على الفترة [a,b] المناظران للتجزئ P.

**ملاحظة (5):** اذا كانت $f(x) \geq 0$ فإن المجموع السفلى $\underline{S}_p$ هو عبارة عن المساحةالمظللة أما المجموع العلوى $S_p$ فهو مساحة المنطقة المضلعة العليا.



## بعض خواص المجموع العلوى والسفلى

## Properties of Upper and Lower Sum

**الخاصية(1):** لآى تجزئ P يكون

$$\underline{S}_p \leq \overline{S}_p \qquad ...(4)$$

**البرهان:** نحصل على (4) بسهولة من (3) حيث أن

$$m_k \leq M_k \qquad \forall k=1,2,3,\ldots\ldots,n$$

**الخاصية(2)** اذا كان

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \& \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

فانه لاى تجزئ P يكون

$$\underline{S}_p \geq m(b-a) \quad \& \quad \overline{S}_p \leq M(b-a) \qquad ...(5)$$

$$m(b-a) \leq \underline{S}_p \leq \overline{S}_p \leq M(b-a) \qquad ...(6)$$

**تعريف (5):**

يسمى العددان $\overline{I},\underline{I}$ بالتكامل السفلى والتكامل العلوى للدالة f على الفترة [a,b] ويرمز لها بالرمزيين:

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \& \quad \overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

## ملاحظة (6):

لآى تجزئ P للفترة [a,b] يكون

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{S}_p \le \overline{S}_p \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

والآن سنذكر النظرية التالية دون برهان:

## Chi Theorem:(نظرية كاى)

**نظرية (2):** اذا كانت الدالة f معرفة ومحددة على الفترة المغلقة [a,b] فإنهاتكون قابلة للتكامل على هذه الفترة اذا وفقط اذا تحقق احد الشرطينالتاليين :

(i) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in p[a,b] \ni \overline{S}_p - \underline{S}_p < \varepsilon$

## ملاحظة (7) :

**1**-اذا تحقق أحد الشرطين (i) أو (ii) فإن :

2-الشرطان (i) ، (ii) متكافئان لان كل منهما يكافئ شرط ان تكون الدالة f قابلة للتكامل.

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

# 3. الدوال القابلة للتكامل

# Integrable Functions

من المعلومات السابق ذكرها يتضح لنا مدى صعوبة اثبات أندالة ما قابلة للتكامل أو غير قابلة للتكامل على فترة ما. وسوف لا نهتمكثيرا بطرق اختبار ما أذا كانت دالة ما قابلة أو غير قابلة للتكامل علىفترة ما، وانما سنكتفى بتناول دوال نعرف مقدما أنها قابلة للتكامل وسيكون أهتمامنا منصبا

بصفة عامة على حساب تكاملات هذه الدوال.وسنعتمد فى معرفتنا لقابلية تكامل الدوال على النظريات التالية.

**نظرية (3):** اذا كانت الدالة fمتصلة على فترة مغلقة فانها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة .

**البرهان:** لنفرض ان

$$P = \{[x_{k-1}, x_k] : k = 1,2,\ldots,n\}$$

هو تجزئيا للفترة [a,b] ، فيكون

$$\overline{S}_p - \underline{S}_p = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

حيث

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \& \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

وحيث أن الدالة f متصلة على [a,b] فان:

$$m_k = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \& \quad M_k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

إذن $-m_k$ هى القيمة العظمى للقيم $-f(x)$ ، $\forall x \in [a,b]$ وبالتالى فإن

$$-m_k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]}(-f(x))$$

$$\therefore M_k - m_k = \max_{x`,x``\in[x_{k-1},x_k]} \left|f(x`)-f(x``)\right|$$

وحيث ان الدالة f متصلة على [a,b] فإنها منتظمة الاتصال على هذه الفترة أى ان

$\forall \varepsilon>0 \qquad \delta>0 \quad \ni :$

$$\left|f(x`)-f(x``)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x`, x``$$

as $\left|x`-x``\right| < \delta$

فاذا كان P تجزئ للفترة [a,b] بحيث $\|P\|<\delta$ فإن

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x`, x``$$

وبالتالى فإن :

$$\overline{S}_p - \underline{S}_p = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \exists \delta > 0$ و $\overline{S}_p - \underline{S}_p < \varepsilon$

لاى تجزئ P يحقق الشرط ||P||<δ.

وهكذا يتحقق الجزء (ii) من نظرية (2)، وبالتالى فإن f تكون قابلة للتكامل على الفترة [a,b].

## نظرية (4)

اذا كانت الدالة f مطرده ومحدده على فترة مغلقة فانها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

### البرهان :

لنفرض أن f غير تناقصية على الفترة [a,b] أى أن

$$f(x_1) \le f(x_2)$$
$$\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [a,b]$$

فإذا كان

$$P = \{[x_{k-1}, x_k] : k = 1,2,\ldots,n\}$$

تجزئيا للفترة [a,b] فإن

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \qquad \&$$
$$\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$$

ويكون $\& \quad m_k = f(x_{k-1})$

$$M_k = f(x_k)$$

ومن 2 ينتج أن:

$$\overline{S}_p - \underline{S}_p = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k$$

وحيث أن $f(b) - f(a) > 0$

فإنه لاى ε>0 نأخذ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ فيكون δ>0

فاذا كان التجزئ P يحقق الشرط ||P|| < δ فان

$$\overline{S}_p - \underline{S}_p < \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\overline{S}_p - \underline{S}_p < \varepsilon$$

وهكذا يحقق الشرط (ii) من نظرية (2) وبالتالى فالدالة f قابلة للتكامل

على [a,b].اذا كانت f غير تزايدية فبطريقة مماثلة يمكن اثبات أن f قابلة للتكامل على الفترة [a,b] .

## ملاحظة (8):

نظرا لان كل دالة مطردة على الفترة [a,b] تكون متصلة على هذه الفترة ماعدا فئة منتهية أو معدودة من نقط الفترة، لذلك فإن نظرية (4) تضيف إضافة طفيفة الى نظرية (3) فى مجال البحث عن الدوال القابلة للتكامل.ولذلك سنكتفى هنا بتناول الدوال المتصلة والامثلة التالية توضح كيفية حساب بعض التكاملات باستخدام التعريف (3) واعتمادا على النظرية (3).

## أمثلة محلولة Solved Problems

**مثال** اثبت ان الدالة $f(x) = x$ ، $\forall x \in R$ قابلة للتكامل على [a,b] واحسب قيمة هذا التكامل.

**الحل** بما ان الدالة f(x) متصلة على R

اذن الدالة f(x) قابلة للتكامل على R وبما ان $(a,b) \in R$

اذن الدالة قابلة للتكامل على (a,b).

**مثال** اثبت ان الدالة $f(x) = x^2$ قابلة للتكامل على الفترة [a,b] وأوجد قيمة هذا التكامل.

**الحل** بما ان الدالة f(x) خطية من الدرجة الثانية اذن متصلة على R

اذن الدالة f(x) قابلة للتكامل على R وبما ان $(a,b) \in R$

اذن الدالة قابلة للتكامل على R.

**مثال** اثبت ان الدالة $f(x) = e^x$

قابلة للتكامل فى الفترة [a,b] ثم أوجد قيمة هذا التكامل.

**ملاحظة (9) :**

من الامثلة الثلاثة السابقة يتضح أن حساب المتكاملات المحدودة باستخدام تعريف (3) مباشرة (أى ايجاد مجموع ريمان ثم النهاية) فيه صعوبة كبيرة رغم ان الدوال المعطاة هى دوال بسيطة جدا. وبالطبع فان المشكلة سوف تزداد تعقيدا للدوال غير البسيطة. لذلك فانه من الطبيعى ان نبحث عن طريقة أسهل لحساب التكاملات المحدودة وهذه الطريقة قد أوجدها نيوتن وليبنز والتى سوف نذكرها الباب الثالث.

* * *