الباب الثانى

طرق التكامل

Methods of Integration

فى بعض مسائل التكامل (**غير المحدود**) يصادفنا تكاملات ليست على الصور الأساسية (أى الدوال المحتواه فى جدول التكاملات الأساسية) ولكنه يمكن فى بعض الأحيان تحويل مثل هذه التكاملات الى الصور الأساسية وذلك باستخدام بعض الطرق. وسنذكر فيما يلى بعض أهم هذه الطرق.

I.التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

لنفرض أن $\int f(x)dx = F(x)$

ومن ثم فإن $\therefore \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

إذا وضعنا $x = \varphi(u)$ حيث φ دالة لها معكوس φ^{-1} فإن

$x = \varphi(u) \quad where \quad \varphi \quad is \quad inverse \quad \varphi^{-1},$

$$f(\varphi(u)) = \frac{dF(\varphi(u))}{dx} = \frac{dF(\varphi(u))}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أى أن $\dfrac{dF(\varphi(u))}{du} = f(\varphi(u))\dfrac{dx}{du} = f(\varphi(u)) \cdot \varphi`(u)$

باجراء التكامل بالنسبة للمتغير الجديد نحصل على :

$$\int \frac{dF(\varphi(u))}{du} du = \int f\,(\varphi(u), \varphi`(u))du$$

أى أن

$$F(\varphi(u)) = F(x) = \int f(\varphi(u))\varphi`(u)du$$

اذن

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u)\varphi`(u)du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ملاحظة (2):

(1) فى التكاملات التى على الصورة

بوضع $u = f(x)$ فيكون $du = f`(x)dx$ ونحصل على

$$\int [f(x)]^n f`(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

وتكون القاعدة هى :

$$\int [f(x)]^n f`(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

(2) فى التكاملات التى على الصورة $\int \frac{f`(x)}{f(x)} dx$ باستخدام نفس

التعويض فى الملحوظة (1) نحصل على القاعدة التالية :

$$\int \frac{f`(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

(3)فى التكاملات التى على الصورة $\int e^{f(x)} f`(x)dx$ نستخدم نفس التعويض المشار إليه فى الملحوظة (1) ونحصل على القاعدة التالية:

$$\int e^{f(x)} f`(x)dx = e^{f(x)} + c$$

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال اوجد قيمة التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

الحل بوضع

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int u^{-1} du = \frac{2}{3} u^{1/2} + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} (3x^2) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

مثال اوجد قيمة التكامل $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3} dx$

الحل بوضع

$$u = 2\sin x + 3 \Rightarrow du = 2\cos x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\cos x}{2\sin x + 3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|2\sin x + 3| + c$$

مثال اوجد قيمة التكامل $\int x^3 e^{4x^4} dx$

الحل بوضع

$$u = 4x^4 \quad \Rightarrow \quad du = 16x^3 dx \Rightarrow$$

$$\int x^3 e^{4x^4} dx = \frac{1}{16} \int e^{4x^4} (16x^3) dx = \frac{1}{16} e^{4x^4} + c$$

ملاحظة: تستخدم القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

فى الحصول على تكاملات الدوال المثلثية (والزائدية) غير المذكورة بالجدول الأساسى للتكاملات:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x+\cot x)}{\operatorname{cosec} x+\cot x}dx$$

$$= -\ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right| + c$$

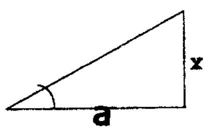
وبالمثل يمكن استنتاج تكامل الدوال الزائدية.

إزالة الجذور

Integrals of Functions containing a Quadratic Trinomials

فى بعض التكاملات التى تحتوى على جذور تربيعية يمكن بواسطة تعويض مناسب التخلص من هذه الجذور وتحويل مثل هذه التكاملات إلى إحدى الصور الأساسية:

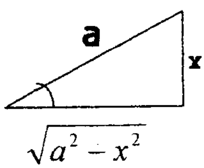
1)التكاملات التي تشتمل على قوى الجذر



$\sqrt{a^2+x^2}$ يستخدم التعويض $x = a\tan t$ ويكون

$$dx = a\sec^2 t\,dt$$

2)التكاملات التى تشتمل على قوى الجذر



$\sqrt{a^2-x^2}$ يستخدم التعويض $x = a\sin t$ ويكون

$$dx = a\cos t\,dt$$

3)التكاملات التي تشتمل على قوي الجذر $\sqrt{x^2-a^2}$ **يستخدم**

التعويض $x = a\sec t$ ويكون $dx = a\sec t\tan t\,dt$

4)تكاملات على الصورة $\int\sqrt{ax^2+bx+cdx}$ أو

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

فى هذه الحالة نتبع الخطوات التالية :

1- استخرج معامل x^2 (بغض النظر عن اشارته) خارج علاقة الجذر.

2- اكمال المربع تحت الجذر

وتبعا لذلك يتحول التكامل المعطى إلى إحدى الصور السابق ذكرها

5)تكاملات على الصورة

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,,$$

أو

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

نضع $Ax+B=\alpha(2ax+b)+\beta$ ثم نعين β,α فينقسم التكامل إلى

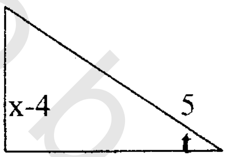
تكاملين يمكن حلهما :

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\alpha\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\beta\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

<u>مثال</u>: أوجد التكامل

$$\int \sqrt{25-(x-4)^2}\,dx$$

<u>الحل</u>



نستخدم الحالة الثانية بوضع $x-4=5\sin t$

فيكون $dx=5\cos t dt$ ونحصل على

$$I=\int \sqrt{25-(x-4)^2}\,dx$$

$$I=\sqrt{25-(5\sin t)^2}.(5\cos t.dt)=25\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$$

$$=25\int \cos t dt$$

$$=25.(\sin t)+c=25.(\frac{x-4}{5})+c$$

$$=5(x-4)+c=5x-20+c$$

<u>مثال</u>: أوجد التكامل $\int \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}dx$

<u>الحل</u>

بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{2-x}$ نحصل على

$$I=\int \frac{2-x}{\sqrt{6-x-x^2}}dx$$

نضع $2-x=\alpha(-2x-1)+\beta$

ينتج أن $\alpha = \frac{1}{2}$ ، $\beta = \frac{5}{2}$ اذن:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{-2x-1}{\sqrt{6-x-x^2}}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{6-x-x^2} + \frac{5}{2}\sin^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{5}{2}} + c$$

امثلة محلولة

Solved problems

مثال: أوجد التكامل $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

الحل بأستخدام التعويض

$$u = x^2+1$$

$$\therefore du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

وبالتعويض بهذة الدالة فى التكامل المعطى نحصل على:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln(x^2+1)$$

مثال: أوجد التكامل $\int x^2 \sin x^3 dx$

الحل بأستخدام التعويض

$u = x^3$

$du = 3x^2 dx \Rightarrow$

$dx = \dfrac{du}{3x^2}$

$\therefore du = 2x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$

وبالتعويض بهذة الدالة فى التكامل المعطى نحصل على:

$$\int x^2 \sin x^3 dx = \int x^2 \sin u \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \sin u du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(u) + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

مثال: أوجد التكامل $\int \cot x\, dx$

الحل

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

بأستخدام التعويض

$u = \sin x$

$du = \cos x \Rightarrow$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

مثال: أوجد التكامل $\int \tan x \ \sec^2 x dx$

الحل بأستخدام التعويض

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x dx \Rightarrow$$

$$\therefore \int \tan x \ \sec^2 x dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 + C$$

مثال: أوجد التكامل $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$

الحل

$$Q \ \ln x^2 = 2 \ln x$$

بأستخدام التعويض

$$u = \ln x , \qquad du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\therefore 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = 2(\frac{1}{2} u^2) + C$$

$$= (\ln x)^2 + C$$

مثال: أوجد التكامل $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$

الحل

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$$

بأستخدام التعويض

$$u = 4 + x^2$$
$$du = 2x\,dx \Rightarrow$$
$$\therefore 2\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}du = u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \sqrt{x^2+4} + C$$

مثال: أوجد التكامل
$$\int \frac{x}{1-x^2}dx$$

الحل بأستخدام التعويض

$$u = 1 - x^2$$
$$du = -2x\,dx \Rightarrow$$
$$\therefore \int \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| + C$$

II.التكامل بالتجزئ

Integration by Parts

في حساب التفاضل والتكامل ، وبشكل أعم في التحليل الرياضي ، التكامل بالتجزئ هو القاعدة التي تحول نواتج التكامل من دالة الى اخرى بسيطة يمكن تكاملها. هذة القاعدة من قاعدة ضرب التفاضل.

إذا كانت u، v دالتان قابلتان للاشتقاق فإن تفاضل حاصل ضربهما هو:

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right]=u(x)v`(x)+u`(x)v(x)$$

ومن ثم فإن

$$u(x)v(x) = \int\left[u(x)v`(x)+u`(x)v)x)\right]dx$$

وبالتالى فإن

$$\int u(x)v`(x)dx = u(x)v(x)-\int v(x)u`(x)dx \ ...(2)$$

والقانون الأخير يسمى بقانون التكامل الجزئى والذى يمكن أعادة كتابته فى الصورة :

$$\int udv = uv-\int vdu$$

وهذا القانون يعبر عن التكامل المطلوب إيجاده (فى الطرف الأيسر)

بدلالة تكامل آخر (فى الطرف الأيمن) ، ولذلك فإن هذه الطريقة تكون مفيدة اذا كان التكامل بالطرف الايمن من التكاملات التى يسهل ايجادها.

ونلاحظ هنا أننا وضعنا الدالة المراد تكاملها على صورة حاصل ضرب دالتين $u(x)$ ، $v`(x)$.

امثلة محلولة Solved Problems

<u>مثال</u>: أوجد التكامل $\int x\cos x dx$

<u>الحل</u> بأستخدام التعويض

$$v`(x) = \cos x dx \quad , \quad u(x) = x$$

$$\therefore v(x) = \sin x \,, \quad - \int \quad u`(x) = 1\, dx = du$$

$$\because \int u dv = uv - \int v du \Rightarrow$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

<u>مثال</u>: أوجد التكامل $\int x^2 e^x dx$

<u>الحل</u> بأستخدام التعويض

$$v`(x) = e^x dx \,, \quad u(x) = x^2$$

$$\therefore v(x) = e^x \,, \quad -\int \quad u`(x) = 2x dx = du$$

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

وفى هذا التكامل الأخير نطبق القاعدة (2) مرة أخرى:

$$v`(x) = e^x dx \quad , \quad u(x) = x$$

$$v(x) = e^x \quad \xrightarrow{,\ -\ \int} \quad u`(x) = 1dx = du$$

$$Q \int udv = uv - \int v du \Rightarrow$$

فنحصل على :

$$I = x^2 e^x - 2\left| xe^x - \int e^x dx \right|$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

<u>مثال</u>: أوجد التكامل

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

<u>الحل</u> بأستخدام التعويض

$$v`(x) = 1.dx \quad , \quad u(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$v(x) = x \quad , \xrightarrow{-\ \int} \quad u`(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = du$$

$$Q \int udv = uv - \int v du \Rightarrow$$

فنحصل على :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \Rightarrow$$

$$Q \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \Rightarrow Multiplying \quad by$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + c$$

مثال: أوجد التكامل $\int \cosh^{-1} x dx$

الحل بأستخدام التعويض

$$u(x) = \cosh^{-1} x \qquad , \qquad v`(x) = 1dx$$

$$u`(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx = du \qquad \xrightarrow{-\int} \qquad v(x) = x ,$$

$$\because \int u dv = uv - \int v du \Rightarrow$$

$$I = \int \cosh^{-1} x dx = x\cosh^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx$$

$$= x\cosh^{-1} x - \cosh^{-1} x + c = (x-1)\cosh^{-1} x + c$$

III. طريقة الاختزال المتتالى

Method of Successive Abbreviation

تعتمد طريقة الاختزال المتتالى على تطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ اكثر من مرة للحصول فى النهاية على صورة يمكن حساب تكاملها. وسنبدأ **أولا بصياغة ذلك نظريا :**

لنفرض أن لدينا التكامل $\int uv^{(n+1)}dx$

حيث u دالة فى x، $v^{(n+1)}$ هى المشتقة من الرتبة (n+1) للدالة v بالنسبة الى x باستخدام التكامل بالتجزئ مرة نحصل على :

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int udv^{(n)} = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}du$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزئ مرات أخرى نحصل على:

$$,\ \int v^{(n)}du = \int u'dv^{(n-1)} = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}dx$$

$$\int u''v^{(n-1)}dx = \int u''dv^{(n-2)} = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}dx$$

- -

$$\int u^{n}v'dx = \int u^{(n)}dv = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}vdx$$

بضرب المتساويات السابقة على التوالى فى 1+ وفى 1- ثم بجمع الأطراف اليسرى ومساواتها بحاصل جمع الأطراف اليمنى مع حذف

الحدود المتساوية فى الطرفين نحصل على:

$$\int u^{n} v^{(n-1)} dx = uv^{(n)} - u\grave{}v^{(n-1)} + u\grave{}\grave{}v^{(n-2)} + \dots\dots$$

$$\dots\dots + (-1)^{n} u^{(n)} v + (-1)^{n-1} \int u^{(n+1)} v dx \quad \dots\dots\dots(3)$$

ويسمى القانون (3) بقانون الاختزال المتتالى.

ويمثل هذا القانون أهمية خاصة عند حساب تكاملات حاصل ضرب دالتين أحدهما كثيرة حدود من درجة n وذلك لأنه بوضع

$$u(x) = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n \Rightarrow$$

$$u^{(n+1)}(x) = 0$$

<u>**مثال:**</u> أوجد التكامل $\int x^3 \sin x \, dx$

<u>**الحل**</u> هنا $u = x^3$ عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة 3 ولذلك نضع

$$\begin{aligned}
u &= x^3 , & v^{(4)} &= \sin x \\
u^{(1)} &= 3x^2 , & v^{(3)} &= -\cos x \\
u^{(2)} &= 6x , & v^{(2)} &= -\sin x \\
u^{(3)} &= 6 , & v^{(1)} &= \cos x \\
u^{(4)} &= 0 , & v &= \sin x
\end{aligned}$$

بتطبيق قانون الاختزال المتتالى نحصل على :

$$\int x^3 \sin x dx = \int u v^{(4)} dx$$

$$= uv^{(3)} - u^{(1)}v^{(2)} + u^{(2)}v^{(1)} - u^{(3)}v + \int u^{(4)} v dx$$

$$x^3(-\cos x) - 3x^2(-\sin x) + 6x(\cos x) - 6(\sin x) + 0$$

ملاحظة (4):

يمكن ايجاد قانون الاختزال المتتالى للتكاملات دون اللجوء الى تذكر القانون (3) وسنوضح ذلك فى الامثلة التالية:

مثال: أوجد قانون الاختزال المتتالى للتكامل

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx$$

ثم أحسب التكامل

$$\int x^4 e^{3x} dx$$

الحل

باجراء التكامل بالتجزئ مع وضع :

$$\begin{array}{lcl} v`(x) = e^{ax} & & u(x) = x^n \\ v(x) = \dfrac{1}{a} e^{ax} & , \quad -\int & u`(x) = nx^{n-1} \end{array}$$

$$\text{Q} \int u dv = uv - \int v du \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx \Rightarrow I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}$$

وهذا هو قانون الاختزال المتتالى للتكامل. وبالتعويض المتتالى فى هذا القانون سنصل فى النهاية الى التكامل I_0 .

$$I_0 = \int x^0 e^{ax}dx = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \Rightarrow$$

$$I_0 = \int x^0 e^{ax}dx = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c,$$

$$I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1} \Rightarrow I_4 = \int x^4 e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{3}I_2 \quad , \quad I_2 = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}I_0 \quad , \quad I_0 = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

$$I_4 = \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}I_3 = \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{3}I_2\right\}$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{3}[\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - I_1]\right\}$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{3}\left[\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^1 e^{3x} - I_0\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{3}x^4 e^{3x} - \frac{4}{9}x^3 e^{3x} + \frac{4}{9}x^2 e^{3x} - \frac{8}{27}xe^{3x} + \frac{8}{81}e^{3x} + c$$

مثال: أوجد قانون الاختزال المتتالى للتكامل $I_n = \int x^n \sin ax dx$

ثم أحسب التكامل $\int x^5 \sin 2x dx$

الحل

نجرى التكامل بطريقة التجزئ مع وضع :

$$u(x) = x^n \quad , \quad v`(x) = \sin ax \, dx$$

$$u`(x) = nx^{n-1}dx \qquad -\int \qquad v(x) = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$I_n = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax dx$$

بالنسبة الى التكامل فى الطرف الأيمن نطبق طريقة التكامل بالتجزئ مرة أخرى فنحصل على :

$$I_n = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a^2}\left[x^{n-1}\sin ax - (n-1)\int x^{n-2}\sin ax\right]$$

$$\therefore I_n = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a^2}x^{n-1}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}$$

نلاحظ ان قانون الاختزال المتتالى السابق يقودنا الى أحدى الحالتين :

الحالة الأولى : n فردى

فى هذه الحالة نصل إلى I_1 :

$$I_1 = \int x \sin ax dx = -\frac{1}{a}x\cos ax + \frac{1}{a}\int \cos ax dx$$

$$= -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + c$$

<u>الحالة الثانية : n زوجى</u>

فى هذه الحالة نصل إلى I_0 :

$$Q\, I_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

$$I_0 = \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$I_5 = \int x^5 \sin 2x dx \Rightarrow n = 5, \quad a = 2 \Rightarrow$$

$$I_5 = -\frac{1}{2} x^5 \cos 2x + \frac{5}{4} x^4 \sin 2x - \frac{5 \times 4}{4} I_3$$

$$I_3 = -\frac{1}{2} x^3 \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 \sin 2x - \frac{3 \times 2}{4} I_1$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\therefore I_5 = -\frac{1}{2} x^5 \cos 2x + \frac{5}{4} x^4 \sin 2x + \frac{5}{2} x^3 \cos 2x$$

$$-\frac{15}{4} x^2 \sin 2x - \frac{15}{4} x \cos 2x + \frac{15}{8} \sin 2x + c$$

<u>مثال</u>: أوجد قانون الاختزال المتتالى للتكامل $I_n = \int \sec^n x dx$

<u>الحل</u> نجرى التكامل بطريقة التجزئ مع وضع :

$$I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \int \sec^{n-2} x d(\tan x)$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan^2 x \cdot (n-2) \sec^{n-3} \sec x dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int (\sec^2 x - 1) \sec^{n-2} dx$$

$$\therefore I_n = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow (n-1) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{(n-2)}{(n-1)} I_{n-2}$$

IV . التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration of Rational (Partial) Fractions

في حساب التفاضل والتكامل باستخدام الكسور الجزئية هو مطلوب لايجاد التكامل فى صورة الكسور الجزئية . أي كسر حقيقى يمكن كتابتة فى صورة مجموع كثيرة حدود بالاضافة الى عدد محدود من الكسور.

نفرض ان الدالة المراد تكاملها على الصورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P، Q كثيرتا حدود ودرجة البسط P أقل من درجة المقام Q.

لنفرض ان المقام Q على الصورة

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots\ldots (x - a_n)^{\alpha_n}$$

حيث $a_n, \ldots\ldots, a_1$ أعداد حقيقية عبارة عن جذور كثيرة الحدود Q(x)

نضع الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \ldots\ldots$$

$$+\frac{L_1}{(x-a_n)} + \frac{L_2}{(x-a_n)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{L_{\alpha_1}}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \ldots\ldots(4)$$

لتعيين المعاملات

$$A_1, \ldots\ldots, A_{\alpha_1}, \ldots\ldots\ldots, L_1, \ldots\ldots, L_{\alpha_n}$$

نوحد مقامات الطرف الأيمن فى (4) ونساوى معاملات قوى x المتشابهة فى الطرفين أو نعوض عن x بقيم عددية مناسبة.

امثلة محلولة Solved Prplems

مثال أحسب التكامل $I = \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

الحل نضع

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن ومساواه البسطين نحصل على

$$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1)\ldots(5)$$

(i) الطريقة الأولى

لتعيين المعاملات نكتب (5) على الصورة:

$$x = (A + B_1)x^2 + (2A + B_2)x + (A - B_1 - B_2)$$

وبمساواة معاملات قوى x المتساوية فى الطرفين نحصل على

$$0 = (A - B_1 - B_2)\ ,\ 1 = (2A + B_2)\ ,\ 0 = (A + B_1)$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن

$$A = \frac{1}{4}\text{،}\ B_1 = -\frac{1}{4}\text{،}\ B_2 = \frac{1}{2}$$

(ii) والطريقة الثانية

لتعيين المعاملات: نضع x=1 فى (5) نحصل على

$$1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

ثم نضع x =-1 نحصل على

$$-1 = -2B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}$$

ثم نضع x =0 فنحصل على

$$0 = A - B_1 - B_2 \Rightarrow B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}$$

وبالتالى (سواء بالطريق الاولى أو الثانية) يكون

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+c$$

<u>مثال</u> أحسب التكامل $I=\int\frac{dx}{x^3-2x^2-x}$

<u>الحل</u> نضع

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+cx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وللحصول على المعاملات فى حالتنا هذه سنستخدم الطريقتين معا .

نضع x=0 فى (6) فنحصل على A=1 ونضع x=1

فنحصل على c=1 ثم أخيرا نساوى معاملى x^2 فى الطرفين

فنحصل على 0=A+B ومنها ينتج أن B = -1.

$$\therefore I=\int\frac{d}{dx}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

<u>ملاحظة (5) :</u>

إذا كان لكثيرة الحدود Q(x) جذور مركبة a±ib مكرره k من المرات

فإنه بالاضافة الى الصورة (4) نضيف حدودا على الصورة:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\dots\dots\dots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$$

$$x^2+px+q=\left[x-(a+ib)\right].\left[x-(a-ib)\right]$$

حيث $i=1,2,\dots,k \quad N_i, M_i,$

أما الثوابت فيجرى تعيينها بالطرق السابقة.

<u>مثال</u> أحسب التكامل

$$I=\int\frac{x^2+5x+3}{x^3-1}dx$$

<u>الحل</u>

$$\text{Q}\ \frac{x^2+5x+3}{x^3-1}=\frac{x^2+5x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

بتوحيد المقامات ومساواة البسط نحصل على :

$$x^2+5x+3=A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)$$

بوضع $x=1$ نحصل على $3A=9$ ومنها $A=3$ بمقارنة معامل x^2

يكون $A+M=1$ ومنها $M=-2$ بمقارنة معامل x

يكون $A-M+N=5$ ومنها $N=0$

$$\therefore I = 3\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x}{x^2+x+1}dx$$

$$= 3\ln|x-1| - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + dx \int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$= 3\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[(x+\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right] + c$$

V.تكاملات الدول المثلثية

Integration of Trigonometric Functions

الصورة العامة للتكامل فى هذه الحالة هى

$$\int f(\sin x, \cos x)dx$$

والتعويض المستخدم هو $\tan\frac{x}{2} = t$ (أى $x = 2\tan^{-1} t$) وبالتالى فإن :

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

وهكذا يتحول التكامل المذكور الى تكامل دوال جبرية يمكن حسابه كما سبق.

مثال أحسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

الحل نضع $\tan \frac{x}{2} = t$ فيكون

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln \tan \frac{x}{2} + c$$

ملاحظة (6):

التعويض $\tan \frac{x}{2} = t$ يجعلنا قادرين على إيجاد تكامل أى دالة فى الصورة $f(\sin x, \cos x)$ ولذلك فإنه يسمى "التعويض المثلثى العام" .

وبالرغم من ذلك فإن هناك بعض الصور الخاصة للدالة $f(\sin x, \cos x)$ نستخدم لكل منها تعويض خاص قد يسهل الحل عما لو استخدمنا التعويض المثلثى العام، وسنعطى منها النماذج الآتية :

I. التكامل فى الصورة

$$\int f(\sin x) \cos x dx$$

نضع $\sin x = t$ فيكون $dt = \cos x dx$

II. التكامل فى الصورة

$$\int f(\cos x)\sin x dx$$

نضع $\cos x = t$ فيكون $dt = -\sin x dx$

III. التكامل فى الصورة

$$\int f(\tan x)dx$$

نضع $\tan x = t$ فيكون $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

IV. التكامل فى الصورة

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$$

حيث m,n عددان صحيحان. سوف نعتبر الحالات الآتية :

I. اذا كان $m = 2k+1$ **عددا فرديا :**

$$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x)$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

ومن ثم يمكن اجراء التكامل (انظر الملاحظات).بالمثل يمكن اجراء التكامل

اذا كان n عددا فرديا

أمثلة محلولة

Solved Problems

<u>**مثال**</u>

$$\int \sin^{10} x \cos^3 dx = \int \sin^{10} x(1-\sin^2 x)d(\sin x)$$

$$= \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13}}{13}$$

i.اذا كان كل من m,n أعداد زوجية موجبة:

فى هذه الحاله نجرى التحويلات التالية :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

<u>**مثال**</u>

$$\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx$$

$$\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{(1-\cos 6x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left[\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right] + c$$

II.اذا كان $m=-k, n=-l$ عددين صحيحين سالبين فرديين معا أو زوجين معا فإن

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^k x \cos^l x} = \int \cos ec^k x \sec^{l-2} x d(\tan x)$$

$$= \int (1 + \frac{1}{\tan^2 x})^{\frac{k}{2}} (1+\tan^2 x)^{\frac{l-2}{2}} d(\tan x)$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x)^{\frac{k+l}{2}-1}}{\tan^k x} d(\tan x)$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x)^{\frac{k+l}{2}-1}}{\tan^k x} d(\tan x)$$

والحالات الخاصة التالية يمكن أن تتحول الى الحالة (iii):

$$, \int \frac{dx}{\sin^k x} = \frac{1}{2^{k-1}} \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^k \frac{x}{2} \cos^k \frac{x}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^l x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin^l (x+\frac{\pi}{2})}$$

مثال

$$\int \frac{dx}{\cos^4} = \int \sec^2 x d(\tan x) = \int (1+\tan^2 x) d(\tan x)$$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

مثال

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \int \tan^{-3} \frac{x}{2} \sec^6 \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{(1+\tan^2 \frac{x}{2})^2}{\tan^3 \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{2}{8}\int\left[\tan^{-3}\frac{x}{2} + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}} + \tan\frac{x}{2}\right]d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2\tan^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right] + c$$

V.التكامل فى الصورة

$$\int f(\sin x, \cos x)dx$$

حيث كل من $\sin x$ ، $\cos x$ تظهر باسس زوجية فقط

نضع $\tan x = t$ أو $(x = \tan^{-1} t)$ فيكون

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \quad , \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

مثال

$$I = \int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

$$= \int\frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} + c \quad ,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})+c$$

ملاحظة:

التعويض السابق (المستخدم فى V) يستخدم ايضا فى حل التكامل

$$\int f(\sin x,\cos x)dx$$

حيث m,n أعداد زوجية واحدهما (على الاقل) سالب حيث أن الطريقة (iii) IV غير مجدية فى حالة أن أحد العددين الزوجيين m,n سالب والآخر موجب.

مثال

باستخدام التعويض $\tan x=t$ يكون

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int t^2(1+t^2)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+c=\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+c$$

VI.التكامل فى احدى الصور

$$\int\sin mx\sin nxdx \quad , \quad \int\cos mx\cos nxdx$$

$$\int\sin mx\cos nxdx \qquad m\neq n$$

فى هذه الحالات نستخدم العلاقات التالية لتحويل التكامل الى احدى الصور الاساسية :

$$\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int \left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx$$

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx$$

$$\int \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx$$

مثال

$$\int \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \left[-\cos 8x + \cos 2x\right]dx$$

$$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

تمارين

1- أوجد تكاملات الدوال الآتية بالنسبة الى x:

I. x^5 , $x^2\sqrt{x}$, $x^4 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\sqrt{x}(3x - \frac{1}{x})^2$

II. $(3x+2)^3$, $\frac{1}{3-4x}$, $\cos(7x+2)$,

e^{-5x}

III. $\sec 4x \tan 4x$, $\cos ec^2(9x+4)$,

$(\sec hx - \tanh x)^2$

IV. $\cos ec^2 \frac{1}{3}(2-4x)$, $\tanh^2 \frac{1}{3}(1-4x)$, $(e^{3x} + e^{-7x})^2$

V. $[\sin(3x+1) + \cos(3x+1)]^2$, $(1 - \cosh 5x)^2$

2- أوجد التكاملات الآتية :

I. $\int \frac{1}{\sinh^2 x\sqrt{\tanh^2 x - 1}}$, $\int \frac{\ln x}{x} dx$, $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

II. $\int \sin^4 x \cos x dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$,

$\int x^2 \cos(x^3+1) dx$

III. $\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}dx$, $\int \frac{\cos x}{3-\sin^2 x}dx$

IV. $\int \sqrt{x^2+6x+5}dx$, $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$, $\int \sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}dx$

V. $\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+5}dx$, $\int \frac{2x+3}{2-3x^2}dx$, $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

VI. $\int \frac{2+3x}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$, $\int \frac{4x+5}{\sqrt{3x-x^2}}dx$,

VII. $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$

VIII. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$,

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

3- أوجد التكاملات الآتية :

I. $\int \sin^{-1} x dx$, $\int \tan^{-1} x dx$, $\int \sec^{-1} x dx$, $\int \tanh^{-1} x dx$

II. $\int x \sinh x dx$, $\int x \tan^{-1} x dx$, $\int x^3 \ln x dx$

III. $\int x^n \ln x dx$, $\int \ln(x^2+1) dx$, $\int x \cos^2 x dx$

IV. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx, \int\sqrt{x^2-4}dx, \int\sqrt{x^2+2x}dx$

V. $\int xe^{3x}dx$, $\int(5x+1)^2e^{-x}dx$, $\int x^2e^3dx$

VI. $\int e^{2x}\sin 3xdx$, $\int x\sin^{-1}x^2dx$, $\int x\sin^{-1}xdx$

4- أوجد قانون الاختزال المتتالى لكل من التكاملات الآتية:

$\int \sinh^n xdx$, $\int \sin^n xdx$, $\int x^n\sinh^n xdx$, $\int x^n\cosh^n xdx$

5- أوجد قانون الاختزال المتتتالى للتكامل $\int \sec h^n xdx$

6- ثم استخدم الناتج لإيجاد كل من التكاملات الآتية :

$\int \tanh^n xdx$, $\int \tanh^4 x\sec hxdx$, $\int \sec h^6 xdx$

6- اذا كان $I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n xdx$

فأوجد قانون الأختزال المتتالى يربط كل من التكاملين :

$I_{m,n} \wedge I_{m,n+2}$, . $I_{m,n} \wedge I_{m+2,n-2}$ $I_{m,n} \wedge I_{m-2,n+2}$ I. ,

7- أوجد التكاملات الاتية :

I. $\int\frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$, $\int\frac{1}{(x-1)^2(x+3)}dx$, $\int\frac{x^2+x+1}{x^2+3}dx$

II. $\int \frac{1}{(1+x)(4-x^2)}dx$, $\int \frac{1}{1-x^4}dx$, $\int \frac{x^2+1}{x^2+4}dx$

III. $\int \frac{1}{(x-1)^2(1+x^2)}dx$, $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+2x}dx$

8- اوجد التكاملات الآتية :

IV. $\int \sin^3 x dx$, $\int \cos^4 x dx$, $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

V. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$, $\int \tan^3 x dx$, $\int \cot^5 x dx$.,

VI. $\int \tan^4 x \sec^4 x dx$, $\int \cos 2x \sin 4x dx$

VII. $\int \frac{1}{4-\sin x}dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$, $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

VIII. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$, $\int \sec x dx$, $\int \sqrt{1-\cos x}dx$

IX. $\int (1+\cos x)^{\frac{3}{2}} dx$, $\int \tan^5 x dx$, $\int \operatorname{cosec}^6 x dx$

X. $\int \frac{1}{\sin^2 x+\tan^2 x}dx$,

XI. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

* * *