الباب الحادى عشر

مسائل متنوعة محلولة

Various Solved Problems

1.اوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$

الحل

$$1.\qquad \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\ \Big|_{0}^{b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b=\frac{\pi}{2}.\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+x^{2}}.$$

2.اوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$

الحل

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\infty}},\alpha\neq 1.$$

$$I=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\infty}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$$

$$at \quad \alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\infty}} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$at \quad \alpha < 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\infty}} = \infty.$$

$$at \quad \alpha = 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{d}{x^{\infty}1} = \ln x \quad \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

3.اوجد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

<u>الحل</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \tan^{-1} \Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha \to -\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} = I_1 + I_2 = \pi$$

4.اوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

<u>الحل</u>

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{1-x} \quad \Big|_0^{1-\varepsilon} = 2$$

5.اوجد قيمة التكامل $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

<u>الحل</u>

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{x}\ \Big|_{-1}^{-\varepsilon}-\frac{-1}{x}\ \Big|_{\varepsilon}^{1}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)-\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]=\infty$$

<u>ملاحظة</u>

اذا حسبنا قيمة التكامل بغض النظر عن كون الدالة $1/x^2$ غير متصلة عند x=0 فإننا نحصل على قيمة مختلفة تماما عن التى حصلنا عليها

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\frac{-1}{x}\ \Big|_{-1}^{1}=2$$

6.اوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

<u>الحل</u>

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}e^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-x/2}\right]_0^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-b/2}+2e^{o}\right]=2$$

7.اوجد قيمة التكامل $\int_1^\infty \frac{dt}{t^4+t^2}$

<u>الحل</u>

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^4+t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{t^2(t^2+1)}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نحصل على:

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{ct+D}{t^2+1}$$

$$1 = A(t^2+1) + Bt(t^2+1) + (ct+D)t^2$$

A=1,   B=0,   C=0,   D=-1

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{t^2} - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^b - \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} t\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}+1\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} t - \frac{\pi}{4}\right] = 1 - \frac{\pi}{4}$$

8.اوجد قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

<u>الحل</u> عند التعويض ب x=0 سنحصل على عدد غيرمحدود من النقط الحرجة (الشاذة)

$$\int_0^\infty \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \quad + \int_1^\infty \quad = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$I = \frac{-2}{\ln 3}\left[\lim_{a\to 0} 1/3^{\sqrt{x}}\right]_0^1 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3^{\sqrt{x}}}\right]_1^b$$

$$= \frac{-2}{\ln 3}\left[\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{\sqrt{a}}}\right)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{3}\right]\right.$$

$$= \frac{-2}{\ln 3}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{30}-0-\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{\ln 3}$$

9.اوجد قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

الحل

$$\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{t\to 4}\int_0^t \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}} = \lim_{t\to 4}\int_0^t -\frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\sqrt{16-x^2}\right] = 4$$

10. باستخدام الدالة المعرفة بالجدول الاتى: اوجد المساحة اسفل المنحى $y=f(x)$ بين $x=2,\ x=8$ باستخدام طريقة قاعدة شبة المنحرف – وطريقة قاعدة سمبسن.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y=f(x)	11	31	71	137	235	371	551	781	1067	1415

الحل

1.طريقة قاعدة شبة المنحرف

N=6 , a=2, b=8, h=1

$y_0=31$, $y_1=71$, $y_2=137$, ……, $y_6=781$

$$A=\frac{h}{2}\left[\left(y_0+y_6\right)+2\left(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(31+781)+2(71+137+235+371+551)\right]=1771$$

2.طريقة قاعدة سمبسن n=4

$$A=\frac{h}{3}\left[\left(y_0+y_6\right)+\left(4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(31+781)+4(71+235+551)+2(137+371)\right]=1752$$

11.اوجد قيمة التكامل $\int\frac{10^{\ln x^2}}{x}dx$

<u>الحل</u>

$$\int\frac{10^{\ln x^2}}{x}dx\Rightarrow 10^{\ln x^2}=10^{2\ln x}=(10^2)^{\ln x}=100^{\ln x}$$

$$Put\quad u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$I=\int 100^u du=\frac{100^u}{\ln 100}+c=\frac{100^{\ln x}}{\ln 100}+c$$

12.اوجد قيمة التكامل $\int\frac{10^x+1}{10^x-1}dx$

الحل

بضرب كلا من البسط والمقام فى $10^{-\frac{x}{2}}$

$$I = \int \frac{10^{\frac{x}{2}} + 10^{-\frac{x}{2}}}{10^{\frac{x}{2}} - 10^{-\frac{x}{2}}} dx \Rightarrow u = 10^{\frac{x}{2}} - 10^{-\frac{x}{2}}$$

$$du = \frac{\ln 10}{2}(10^{\frac{x}{2}} - 10^{-\frac{x}{2}})dx$$

$$I = \frac{2}{\ln 10}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{\ln 10}.\ln\left[10^{x/2} - 10^{-x/2}\right] + c$$

13.اوجد قيمة التكامل

$$I = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx$$

الحل

$$I = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx \Rightarrow \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{matrix}$$

$$\int \sec hx dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\tan^{-1} u + c$$

14 .أحسب حجم المخروط الدائرى القائم الذى نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h.

الحل

المخروط الدائرى القائم ينشأ من دوران المثلث oab حول محور السينات. معادلة المستقيم oa هى

$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{\gamma-0}{h-0}=\frac{\gamma}{h}\Rightarrow y=\frac{\gamma}{h}x$$

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx=\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\ \Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2$$

15.أحسب بالتكامل حجم المخروط الدائرى الناقص القائم الذى نصف قطرى قاعدتيه r_1 ، r_2 .

<u>الحل</u>

المخروط الدائرى القائم الناقص ينشأ عن دوران شبه المنحرف abcd حول محور السينات. معادلة المستقيم abهى

$$\frac{y-r_1}{x-0}=\frac{r_2-r_1}{h-0}$$

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx=\pi\int_0^h \left(\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1\right)^2 dx=\frac{\pi h}{3}(r_1+r_2)^2$$

$$y=\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1$$

16.أحسب المساحة المحصورة بين

$y=\log x$, **x=0** , **y=0** $0\le x\le 1.$

<u>الحل</u>

1. $A = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \log x dx = \lim_{\varepsilon \leftarrow 0} x \log x \ \Big|_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\right] = -1$$

ملاحظة:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varepsilon \log \varepsilon\right] = 0$$

(2) المساحة سالبة لانها تقع تحت ox

17. (i)أوجد مساحة السطح الدورانى الناشئ عن دوران y=cosh x ما بين $x:0\to 1$ حول ox

(ii) منطقة بالربع الاول ومحددة بمحورى الاحداثيات والمستقيم y=2 والقطع $y^2 = 12-4x$ أوجد الحجم الناشئ عن دوران المنطقة حول ox ،طول قوس من القطع بين النقطتين (3,0) ، (2,2) .

الحل

(i) $S = \int_0^1 \pi y ds = \int_0^1 2\pi \cosh x\sqrt{1+\sinh^2 x} dx$

$$= \pi \int_0^1 2\cosh^2 x dx = \pi \int_0^1 (\cosh 2x + 1) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\sinh 2x + x\pi \ \Big|_0^1 = \pi\left(\frac{\sinh 2}{2} + 1\right)$$

(ii) $V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 = \pi r^2 h = 8\pi$

$$V_2 = \int_2^3 \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi(12-4x)dx$$

$$L = \int_2^3 \sqrt{1+y'^2}dx \qquad or$$

$$\therefore L = \int_0^2 \sqrt{1+y^2/4}dy$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+x'^2}dy \Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{-4} = \frac{-y}{2}$$

18 .(i) أحسب قيمة التكامل $\int_0^1 y\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}dy$

(ii) أوجد حجم ومساحة المجسم الناشئ من دوران المساحة تحت المنحنى $y = 2\sqrt{x}$ والمحورين والخط x=3.

<u>الحل</u>

$$\text{(i)} \int_0^1 y\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}dy = \int_0^1 \frac{y(1-y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$= 2\sqrt{1-y^2}\ \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \sin\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{array}$$

$$= -\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \qquad \begin{array}{l} y: 0 \to 1 \\ \theta: 0 \to \pi/2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

(ii) $V = \int_0^3 \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi(4x)dx$

$$S = \int_0^3 2\pi y ds = \int_0^3 2\pi(2\sqrt{x})\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'^2 = 1/x \Rightarrow 1+y'^2 = 1+1/x$$

$$S = \int_0^3 4x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \int_0^3 4x\sqrt{x+1}dx$$

$$x+1 = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \begin{matrix} x: 0 \to 3 \\ t: 1 \to 4 \end{matrix}$$

$$S = \int_1^4 4(t-1)\sqrt{t}\,dtx = \int_1^4 (4t^{3/2} - 4t^{1/2}dt$$

19.أحسب لاربعة أرقام عشرية $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ **مستخدما قاعدة سيمبسون**

(2n=4)

<u>الحل</u>

$I \equiv \frac{h}{3}$ **[(y_0 +y_n) +2(even terms)+4(odd terms)**

x	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**
y	**1**	**4/5**	**1/2**	**4/13**	**1/5**

$$I = \frac{0.5}{3}[(1+1/5)+2(1/2)+4(4/5+4/13)]$$

20. أحسب $\int_1^5 \sqrt{\log x}\,dx$

باستخدام (1)قاعدة سيمبسون (2) أشباه المنحرفات

<u>الحل</u>

نقسم المسافة من 1 ← 5 الى ثمانية أقسام لحل كل قسم يساوى ½

X	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	0	.64	.84	.95	1.05	1.14	1.15	1.25	1.27

$$I = \frac{.5}{3}[(0+1.27)+2(.844+1.05+1.19)+4(.64+.93+1.14+1.25)]$$

$$I = \frac{.5}{2}[0+2(.64+.84+.93+1.05+1.14+1.19+1.25)+1.27]$$

21.أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدده بالمنحنى $y = x(2-x), x \in (0,2)$ ومحور x ومحور y .

<u>الحل</u>

$$V = \int_0^2 2\pi x[x(2-x)]dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi$$

استخدمنا طريقة القشرة الاسطوانية لان y=f(x) والدوران حول محور .oy

22. اوجد حجم المجسم الناشئ للمنطقة المحدده بالمنحنيات

$y = x^3, y = x^2, x \in (1,2)$ **للدوران حول محور x=1,y=x.**

<u>الحل</u>

$$V = \int_1^2 2\pi x(x^3 - x^2)dx = \frac{49}{10}\pi$$

اذا كان الدوران حول المستقيم x=1

$$V = \int_1^2 2\pi(1-x)(x^3 - x^2)dx$$

23. أوجد مساحة سطح المجسم الناشئ للمنطقة المحدده بالمنحنيات

$8x = y^4 + \frac{2}{y^2}, y \in [1,2]$ واذا دار المنحنى حول محور x.

<u>الحل</u>

$$8y = x^4 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow 8y' = 4x - \frac{4}{x^3}$$

$$2y' = \frac{x^6 - 1}{x^3} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^{12} - 2x^6 + 1}{4x^6}$$

$$y'^2 + 1 = \frac{x^{12} - x^6 + 1 + 4x^6}{4 \times 6} = \frac{(x^6+1)^2}{(2x^3)^2}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + y^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 + x^{-3})dx$$

$$S = \int_1^2 2\pi x ds = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_1^2 (x^4 + x^{-2})dx$$

24.اوجد المساحة السطحية للكرة التى نصف قطرها a.

25. الدالة غير محدده عند x

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

<u>الحل</u>

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$I = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_\varepsilon^1 (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx = \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\ \Big|_\varepsilon^1$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\ \Big|_\varepsilon^1 = \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \Big|_\varepsilon^1 = \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}(\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}) = \infty$$

26.اوجد قيمة التكامل

$$I = \int \cos^5\theta d\theta$$

<u>الحل</u>

$$I = \int \cos^5\theta d\theta = \int \cos^4\theta(\cos\theta d\theta) = \int (1-\sin^2\theta)^2 d\sin\theta$$

Put $x = \sin\theta$

$$= \int (1-x^2)^2 dx = \int (1 - 2x^2 + x^4)dx$$

$$= x - (2/3)^3 + (1/5)^5 + k = \sin\theta - (2/3)\sin^3\theta$$
$$+ (1/5)\sin^5\theta + k$$

27.اوجد قيمة التكامل $\int (x^4 - 3x^3 + x^2 + 8)dx$

الحل

$$\int (x^4 - 3x^3 + x^2 + 8)dx = \int x^4 dx - 3\int x^3 dx + \int x^3 dx + \int x^2 dx + 8\int dx$$
$$= x^5/5 - 3x^4/4 + x^3/3 + 8x + c$$

28.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x}}dx$

الحل

$$\int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x}}dx = \int x^{3/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{1/2} + c\ .$$

29.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{3\sqrt{3x+2}}$

الحل

$$\int \frac{dx}{3\sqrt{3x+2}} = \int (3x+2)^{-1/3}dx = \frac{1}{(2/3)(3)}(3x+2)^{2/3} + c\ .$$
$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{2/3} + c$$

30.اوجد قيمة التكامل $I = \frac{4x^2+2x-1}{2x+3}dx$

الحل

باستخدام القسمة المطولة أو الكسور الجزئية نجد أن

$$I = \int 2x dx - \int 2dx + \int \frac{5dx}{2x+3} = x^2 - 2x + (\frac{5}{2})\log|2x+3| + c$$

31.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$

<u>الحل</u>

$$I = \int \frac{e^x dx}{1+e^x}$$

Put $u = 1+e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log(1+e^x) + c$$

32.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)} dx$

<u>الحل</u>

$$I = \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)} dx$$

Put $u = 1+\cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\therefore I = \int \frac{-du}{u^2} = (1/u) + c = 1/(1+\cos x) + x$$

33.اوجد قيمة التكامل $\int \sin 5x dx$

<u>الحل</u>

$$\int \sin 5x dx = -(1/5)\cos 5x + c$$

34.اوجد قيمة التكامل $\int \sin^3 2x \cos 2x dx$

الحل

Put $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x dx$

$$\therefore I = 1/2 \int u^3 du = u^4/8 + c = (1/8)\sin^4 2x + c$$

35.اوجد قيمة التكامل $\int \sec(7x-1)\tan(7x-1)dx$

الحل

$$I = \int \sec(7x-1)\tan(7x-1)dx$$

Put $u = 7x - 1 \Rightarrow du = 7dx$

$$\therefore I = (1/7)\int \sec u \tan u du = (1/7)\sec u + c$$

36.اوجد قيمة التكامل $\int \sec^2 x \tan^2 x dx$

الحل

$$I = \int \sec^2 x \tan^2 x dx$$

Put $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$

$$\therefore I = \int u^2 du = u^3/3 + c = (1/3)\tan^3 x + c$$

$$\therefore I = \int \tan^2 x(\sec^2 x dx) = \int \tan^2 x d\tan x = (1/3)\tan^3 x + c$$

37.اوجد قيمة التكامل $\int e^{x} \tan(1+e^{x})dx$

الحل

$$I = \int e^{x} \tan(1+e^{x})dx$$

Put $u = 1+e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx$

$$\therefore I = \int e^{x} \tan(1+e^{x})dx = \int \tan u du$$

$$= \log|\sec u| + c = \log|\sec(1+e^{x})| + c$$

$$\therefore I = \int \tan(1+e^{x})de^{x} = \log|\sec(1+e^{x}| + c$$

38.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{(x+3)}{(x^{2}+6x)^{1/3}}$

الحل

$$I = \int \frac{(x+3)}{(x^{2}+6x)^{1/3}}$$

Put $u = x^{2}+6x \Rightarrow du = (2x+6)dx$

$$I = 1/2\int u^{-1/3}du = 1/2 \cdot \frac{3}{2}u^{2/3} + c = \frac{3}{4}(x^{2}+6x)^{2/3} + c$$

39.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{x^{2}+2x}{(x+1)^{2}}dx$

الحل

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx = \int \left[1-\frac{1}{(1+x)^2}\right]dx$$

$$= x+\frac{1}{1+x}+c = \frac{x^2}{(1+x)}+1+c = x^2(1+x)+k$$

40.اوجد قيمة التكامل $\int k^{\alpha x}dx$

<u>الحل</u>

$$\int k^{\alpha x}dx = (1/\alpha)\frac{k^{\alpha x}}{\log \alpha}+c$$

41.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{1+e^x}$

<u>الحل</u>

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\log(1+e^{-x})+c$$

42.اوجد قيمة التكامل $\int x \cot x^2 dx$

<u>الحل</u>

$$\int x\cot x^2 dx = 1/2\int \cot x^2 \cdot 2x dx = 1/2\log\left|\sin x^2\right|+c$$

43.اوجد قيمة التكامل $\int \sec x\, dx$

<u>الحل</u>

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \log\left|\sec x+\tan x\right|+c$$

44.اوجد قيمة التكامل $\int (1+\tan x)^2 dx$

الحل

$$\int (1+\tan x)^2 dx = \int (1+2\tan x+\tan^2 x)dx$$

$$= \int (\sec^2 x + 2\tan x)dx = \tan x + 2\log|\sec x| + c$$

45.اوجد قيمة التكامل $\int \cos ec\theta d\theta$

الحل

$$\int \cos ec\theta d\theta = \int \frac{d\theta}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}$$

$$= \frac{\sec^2(1/2\theta)}{\tan(\theta/2)} 1/2 d\theta = \log|\tan\theta/2| + c$$

46.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{du}{\csc 2u - \cot 2u}$

الحل

$$\int \frac{du}{\csc 2u - \cot 2u} = \int \frac{\sin 2u}{1-\cos 2u} du = 1/2\log(1-\cos 2u) + c$$

47 .اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{4x^2 + y}$

الحل

$$\int \frac{dx}{4x^2+y} = 1/2\int \frac{2dx}{(2x)^2+3^2} = (1/6)\tan^{-1}(\frac{2x}{3}) + c$$

48.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

<u>الحل</u>

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} = (1/3) \qquad (\frac{2x}{3}) + c$$

49.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{xdx}{x^2+3}$

<u>الحل</u>

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = 1/2 \int \frac{2xdx}{(2x^2)^2+3} = (1/2) \int \frac{dx^2}{(x^2)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= 1/2 \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\frac{x^2}{\sqrt{3}}) + c$$

50.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

<u>الحل</u>

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = 1/2 \int \frac{2xdx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = (1/2)\sec^{-1} x^2 + c$$

$$= 1/2 \cos^{-1}(1/x^2) + c$$

51.اوجد قيمة التكامل $\int \sec hx dx$

<u>الحل</u>

$$\int \sec hx dx = \int \frac{chx}{ch^2 x} = \int \frac{dshx}{1+sh^2 x} = \tan^{-1}(shx)+c$$

52.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}}$

الحل

$$\int ... = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = 2\int \frac{de^x}{(e^x)^2+1} = 2\tan^{-1}(e^x)+k$$

53.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dy}{y^2+10y+30}$

الحل

$$\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \int \frac{dy}{(y+5)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{y+5}{\sqrt{5}})+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20-x^2+8x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \sin^{-1}\frac{(x-4)}{6}+c$$

54.اوجد قيمة التكامل $\int \cos^2 3x\, dx$

الحل

$$\int \cos^2 3x dx = \int 1/2(1+\cos 6x)dx = \frac{1}{2}x + (1/12)\sin 6x + c$$

55.اوجد قيمة التكامل $\int \sin^3 x\, dx$

الحل

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx$$

$$= -\cos x + (1/3)\cos^3 x + c$$

56.اوجد قيمة التكامل $\int \cos^4 2x \ \sin^3 2x dx$

<u>الحل</u>

$$\int \cos^4 2x \sin^3 2x dx = \int \cos^4 2x \sin^2 2x \sin 2x dx$$

$$= \int \cos^4 2x(1-\cos^2 2x)\sin 2x dx$$

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x dx - \int \cos^6 2x \sin 2x dx$$

$$= -\frac{\cos^5 2x}{10} + \frac{\cos^7 2x}{14} + c$$

57.اوجد قيمة التكامل $\int \sin^3 3x \ \cos^5 3x dx$

<u>الحل</u>

$$I = \int \sin^3 3x \cos^5 3x dx = \int (1-\cos^2 3x)\cos^5 3x \sin 3x dx$$

$$= \frac{-\cos^6 3x}{18} + \frac{\cos^8 3x}{24} + c = \int \cos^5 3x \sin 3x dx - \int \cos^7 3x \sin 3x dx$$

$$I = \int \sin^3 3x(1-\sin^2 3x)\cos 3x dx = \int \sin^3 3x \cos 3x dx$$

$$= -2\int \sin^5 3x \cos 3x dx - \int \sin^7 3x \cos 3x dx$$

$$= \frac{\sin^4 3x}{12} - \frac{\sin^6 3x}{9} + \frac{\sin^8 3x}{24} + k$$

58.اوجد قيمة التكامل $\int \sin 3x \ \sin 2x dx$

الحل

$$\int \sin 3x \sin 2x dx = \tfrac{1}{2} \int [\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int [\cos x - \cos 5x)] dx = \tfrac{1}{2} \sin x - (1/10)\sin 5x + c$$

59.اوجد قيمة التكامل $\int \sec^4 2x\, dx$

الحل

$$\int \sec^4 2x dx = \int \sec^2 2x(1+\tan^2 2x) dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + 1/2 \int \tan^2 2x d \tan 2x$$

$$= \tfrac{1}{2} \tan 2x + (1/6)\tan^3 2x + c$$

60.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

الحل

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

Put $x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2\sec^2 t dt$

$$\therefore I = \int \frac{2\sec^2 t dt}{(4\tan^2 t)(2\sec t)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \frac{1}{4}\int \sin^{-2} t \cos t dt$$

$$= -\tfrac{1}{4} \sin t + c = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

61.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$

<u>الحل</u>

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Put $x = 2\sec t \Rightarrow dx = 2\sec t \tan t dt$

$$\therefore I = \int \frac{4\sec^2 t dt}{2\tan t}(2\sec t \tan t dt) = 4\int \sec^3 t dt$$

$$= 2\sec t \tan t + 2\log|\sec t + \tan t| + c$$

$$= \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2-4} + 2\log\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + k$$

62.اوجد قيمة التكامل $\int (1/x)\sqrt{9-4x^2}dx$

<u>الحل</u>

$$I = \int (1/x)\sqrt{9-4x^2}dx$$

Put $x = (3/2)\sin t \Rightarrow dx = (3/2)\cos t dt$

$$I = \int \frac{3\cos t}{\frac{3}{2}\sin t}(3/2)\cos t dt = 3\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = 3\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}$$

$$= 3\int \csc t dt - 3\int \sin t dt = 3\log|\csc t - \cos t| + 3\cos t + c_1$$

$$= \log\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + c$$

63.اوجد قيمة التكامل $\int\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

الحل

$$I=\int\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$I=-1/6\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=(-1/6)\log|x|+(3/10)\log|x-2|-(2/15)\log|x+3|+c$$

$$=\log\frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}|x+3|^{2/15}}$$

64.اوجد قيمة التكامل $\int\frac{x^4-x^2-x-1}{x^3-x^2}dx$

الحل

$$I=\int\frac{x^4-x^2-x-1}{x^3-x^2}dx$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$I=\int xdx+2\int dx/x+\int dx/x-2\int dx/(x-1)$$

$$=(1/2)x^2+2\log|x|-(1/x)-2\log|x-1|+c$$

$$=(x^2/2)-(1/x)+2\log|x/(x-1)|+c$$

65.اوجد قيمة التكامل $\int sh^2x\,dx$

الحل

$$\int sh^2 x dx = \frac{1}{2}\int (ch2x-1)dx = \frac{1}{4}sh2x - \frac{1}{2}x + c$$

66.اوجد قيمة التكامل $\int e^x chx\,dx$

الحل $\int e^x chx dx = \int e^x (\frac{e^x + e^{-x}}{2})dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)dx$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} + 1/2x + c$$

67.اوجد قيمة التكامل $\int \sqrt{x^2+4}dx$

الحل $I = \int \sqrt{x^2+4}dx$

Put $x = 2chu \Rightarrow dx = 2chudu$

$$I = 4\int ch^2 udu = 2\int (ch2u+1)du = sh2u + 2u + c$$

$$= 2shuchu + 2u + c = (1/2)x\sqrt{x^2+4} + 2sh^{-1}\frac{x}{2} + c$$

68.اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

الحل $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Put $x = \sec hu \Rightarrow dx = -\sec huthudu$

$$\therefore I = -\int \frac{\sec huthu}{\sec huthu}du = -\int du - u + c = -\sec h^{-1}x + c$$

تمارين متنوعة

Various Exercises

اثبت صحة الآتى:

1. $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\log\left|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}\right| + c$

2. $\int \frac{\sin y}{\cos^2 y}\,dy = \sec y + c$

3. $\int e^x \cos e^x\,dx = \sin e^x + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(4x/5) + c$

5. $\int e^3 \cos 2x \sin 2x = (-1/6)e^{3\cos 2x} + c$

6. $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5} = (1/3)\arctan\left[(2x+1)/3\right] + c$

7. $\int \frac{\sec x \tan x\,dx}{9 + 4\sec^2 x} = (1/6)\arctan(2\sec x/3) + c$

8. $\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 8}\,dx = (1/2)\log(x^2 - 4x + 8) + (3/2)\arctan(\frac{x-2}{2})$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \sin^{-1}\left[(x+6)/8\right] + c$

10. $\int \frac{2x+3}{9x^2 - 12x + 8}\,dx = (1/9)\log(9x^2 - 12x + 8)$

$+ (13/18)\arctan\left[(3x-2)/2\right] + c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = (1/2)sh^{-1}(2x/3)+k$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{9u^2-25}} = (1/3)sh^{-1}(3u/5)+k$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-16}} = (-1/12)\coth^{-1}(3x/4)+k$

14. $\int \frac{dy}{25-16y^2} = (1/20)th^{-1}(4y/5)+k$

15. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = -\coth^{-1}(x+3)+c$

16. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = (1/2)th^{-1}(\frac{x-2}{2})+c$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{4u-u^2}} = sh^{-1}(\frac{u+2}{2})+k$

18. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x^2+9}+2sh^{-1}(x/3)+c$

19. $\int \frac{2x-3}{4x^2-11}dx = \frac{1}{4}\log\left|4x^2-11\right| - \frac{3\sqrt{11}}{44}\log\left|\frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}}\right|+c$

20. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+(25/2)\sin^{-1}(x/5)+c$

21. $\int (1-x^3)^2\,xdx = \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{8}x^8+c$

22. $\int (x^2-x)^4(2x-1)dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5+c$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \log \frac{|0|}{(1-\sqrt{x})^2}$

24. $\int \sqrt{4x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\log(2x + \sqrt{4x^2+9} + c$

25. $\int \sqrt{12+4x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{12+4x-x^2} + 8\arcsin(\frac{x-2}{4})$

26. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx = \frac{(x-3)}{2})\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin(\frac{x-3}{3}) + c$

27. $\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$

28. $\int \cos 4x \cos 2x dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

29. $\int (1+\cos 3x)^{3/2} dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x - \frac{2}{9}\sin^3\frac{3}{2}x\right]$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin 2x}} = (-1/\sqrt{2})\log\left|arc(\pi/4-x) - \cot(\pi/4-x)\right| + c$

31. $\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \log\left|\sec x\right| + c$

32. $\int \csc^6 x dx = -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + c$

33. $\int \csc^3 x \csc^5 x dx = -\frac{1}{7}\csc^7 x + \frac{1}{5}\csc^5 x + c$