الباب العاشر

تطبيقات لرسم التكامل

Applications forGraphical integration

كما هو الحال بالنسبة للمشتقات، كذلل بالنسبة لتمثيل العلاقة بين المشتقات فى شكل رسوم بيانية،من المهم فهم معنى التكامل لتطويره.

كما هو موضح بالشكل التالى فانه يمثل السرعة v لجسيم كدالة اللحظية للوقت المنقضى. وداله هذه العلاقة تمثل بالمعادلة الاتية:

$$v = 6t$$

فالمسافة المقطوعة s للازمنة t_B ، t_A تساوى تكامل السرعة v

بالنسبة للوقت بين بين الحدود الزمنية t_B ، t_A.

$$s = \int_{t_A}^{t_B} v\,dt$$

يمكن ايجاد قيمة هذا التكامل لهذه الحالة الممثلة فى الشكل وذلك عن

طريق ملاحظة ان السرعة عبارة عن زيادة خطية. وبالتالى فأن السرعة المتوسطة

للفترة الزمنية بين $t_A ,\ t_B$ هى المتوسط الحسابى للسرعة

عند كل من $t_A ,\ t_B$ وبالتالى فانه بالنسبة للزمن

$$t_A \Rightarrow \quad v = 6t_A$$

وكذلك بالنسبة للزمن

$$t_B \Rightarrow \quad v = 6t_B$$

وبالتالى فان متوسط السرعة اللحظية للفترة الزمنية $t_A ,\ t_B$ هى:

$$\frac{6t_A + 6t_B}{2} \Rightarrow 3(t_A + t_B)$$

باستخدام معادلة السرعة المتوسطة السابقة فان المسافة الكلية المقطوعة

للفترة الزمنية $t_A ,\ t_B$ تعطى بالعلاقة:

$$s = v_{av} \Delta t$$
$$s = 3(t_A + t_B)(t_B - t_A) \qquad (I)$$

كما هو موضح بالشكل التالى

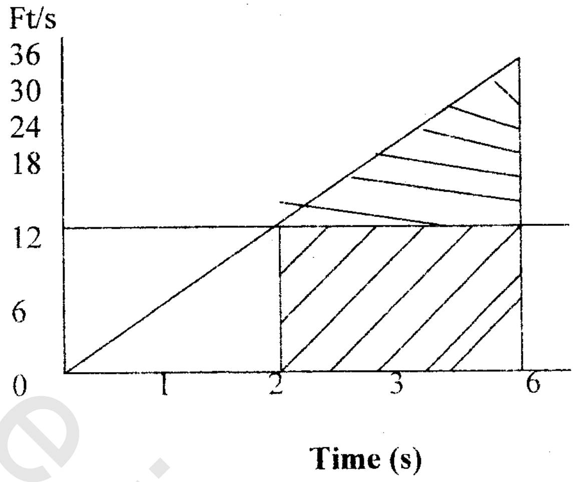

Figure 1 Graph of Velocity vs. Time

معادلة (I) هى ايضا قيمة التكامل للسرعة بين النهايتين $t_A - t_B$

كما هو موضح بالشكل السابق اى ان:

$$\int_{t_A}^{t_B} 3(t_A + t_B)(t_B - t_A)$$

كذلك يمكن حساب المساحة المظللة بالشكل السابق كما يلى:

$$\begin{aligned} Area &= \left[(t_B - t_A)(6t_A)\right] + \left[1/2(t_B - t_A)(6t_B - 6t_A)\right] \\ &= 6t_A t_B - 6t_A^2 + 3t_B^2 - 6t_A t_B + 3t_A^2 \\ &= 3t_B^2 - 3t_A^2 \\ &= 3(t_B + t_A)(t_B - tA) \end{aligned}$$

هذا مساوى تماما لقيمة تكامل السرعة بالنسبة الى الفترة الزمنية t_A, t_B

وحيث ان المسافة المقطوعة = تكامل السرعة بالنسبة للزمن $\int v dt$

وحيث ان هذا التكامل = المساحة اسفل منحنى السرعة مقابل الزمن.

كما هو مبين بالشكل السابق نجد ان زيادة السرعة بمعدل ثابت.وعندما تكون الدالة ليست خط مستقيم فايجاد المساحة اسفل المنحنى تكون صعبة الحصول عليها. وبالتالى يمكن ان نبين ان :

تكامل الدالة= المساحة المحصورة بين x وبين الرسم البيانى للدالة محور

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) = Area \quad between \quad f(x) \quad and \quad x-axis$$

$$from \quad x_1 \quad to \quad x_2$$

فى الرياضيات، النظم الديناميكية تحتوى على عديد من العمليات لتكامل الدوال. وكما هو الحال للمشتقات كذلك ايضا تكامل الدوال لايمكن حسابة عن طريق تخطيط الدالة وقياس المساحة اسفل المنحنى.

على الرغم من ان هذا الاسلوب يمكن استخدامة، فقد تطورت التقنيات التى تسمح بايجاد قيمة تكامل الدالة مباشرة اعتمادا على صورة الدالة. وكما هو معروف فان تقنية ايجاد قيمة التكامل هى عكس تقنية ايجاد قيمة التفاضل. سنوضح ذللك بالاوثلة التالية:

Examples امثلة

مشتقة الدالة

$$f(x) = ax + c, where \quad a, c \quad are \quad const. \Rightarrow$$
$$f'(x) = a, where \quad a \quad const.$$

وتكامل الدالة

$$f(x) = a \Rightarrow$$
$$\int f(x)dx = ax + c, where \quad a \quad const.$$

وكذلك تكامل الدالة:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow$$
$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c, where \quad n+1 \quad another \quad constant.$$

وتكامل الدالة

$$f(x) = ae^{bx}$$

$$\int f(x)dx = \frac{a}{b}e^{bx}$$

كما هو الحال مع تقنيات من أجل ايجاد مشتقات الدوال ، وهذه التقنيات العامة لإيجاد تكامل المشتقات هي في المقام الأول مهمة فقط لأولئك الذين يفضلون التحليل الرياضى فى العمليات الحسابية للنظم الحيوية. هذه التقنيات ليست مصادفة في يوم ليوم وتشغيل منشأة نووية. ومع ذلك ، فإنه من المفيد أن نفهم أن ايجاد قيمة التكامل لاى دالة هو على العكس من ايجاد مشتقة الدالة. من حيث مجموع ومساحات المناطق الواقعة تحت المنحيات ، ومعدلات التغير ووكذلك ميل المنحنيات.

الخلاصة

المعلومات الهامة التي يشملها هذا الفصل ملخصة كالاتى:

- ملخص التفاضل والتكامل

- مشتقة الدالة يعرف بأنه معدل التغير في كمية واحدة فيما يتعلق بكمية اخرى ، والذى هو ميل الدالة.

- تكامل الدالة يعرف على انة المساحة اسفل المنحنى.

* * *