

# الباب التاسع

## الحلول التقريبية

### Approximate Solutions

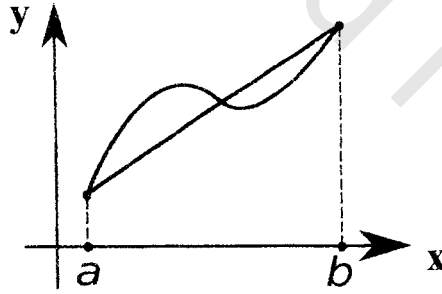
#### قاعدة شبة المنحرف Trapezoidal Rule

في الرياضيات ، قاعدة شبة المنحرف **the trapezium rule**

(المصطلح الانجليزي ) او **trapezoidal rule** (المصطلح الامريكى)

هى طريقة لتقريب حسابات التكامل المحدود الذى له الشكل التالى:

$$\int_a^b f(x) dx .$$



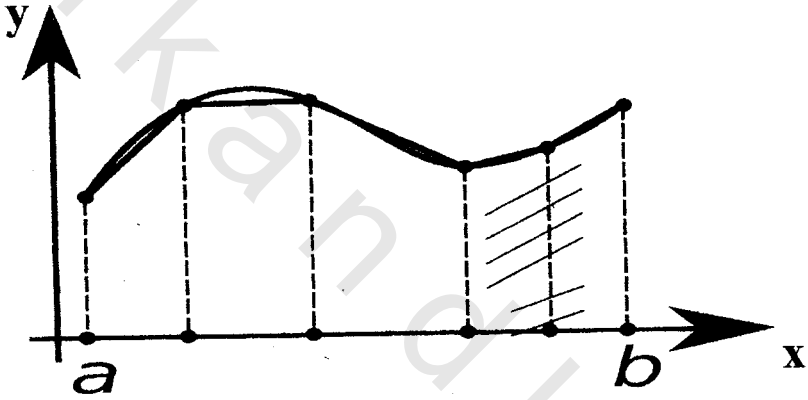
وطريقة قاعدة شبة المنحرف لحساب المساحة اسفل المنحنى للدالة

السابقة كالتالى:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(b) - f(a)}{2}$$

ولحساب هذا التكامل بأكثر دقة نقوم بتقسيم الفترة  $[a,b]$  الى عدد  $n$

من الفترات الصغيرة وبعد ذلك نطبق طريقة شبه المنحرف على كل فترة صغيرة . وبذلك نحصل على عديد من قاعدة شبه المنحرف كما هو موضح بالرسم التالي:



نقسم المساحة المحددة بالمنحنى  $f(x)$  بالخطوط  $x=a, x=b$  الى عدد  $n$  الشرائح الطولية وعرض كل منها

$$\frac{b-a}{n} = h$$

وسنعتبر الجزء  $P_{i-1}P_i$  للمنحنى  $y=f(x)$  ويمكن حساب هذه المساحة بواسطة المعادلة التقريبية التالية:

$$\frac{1}{2} h \{f[a + (i-1)h] + f(a + ih)\}$$

والتي تمكننا من الحصول على مساحة شبه المنحرف عن طريق المعادلة:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2} \{f(a+h) + f(a+2h)\} + \dots$$

$$\dots + \frac{h}{2} \{f(a+(n-1)h) + f(b)\} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \{f(a) + 2f(a+h)\} + 2f(a+2h) + \dots$$

$$\dots + 2f[a+(n-1)h] + f(b) \quad \dots(1)$$

## 2. الطريقة الهرمية Pyramidal Method

$$\int_a^b f(x) dx$$

نفرض أن المساحة المعروفة بالتكامل

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{قسمت الى شريحتين رأسييتين عرض كل منهما هو :}$$

ونفرض أن القوس  $P_0P_1P_2$  للمنحنى  $y=f(x)$  أستبدل بقوس القطع

المكافئ  $y = ax^2 + bx + c$  والذي يمر بالنقط  $P_2, P_1, P_0$

كما في الشكل السابق.

المطلوب : حساب قيمة التكامل تقريبا باستخدام المعلومات السابقة

من الواضح أن :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx = \int_a^b (Ax^2 + Bx + c) dx$$

وبحل هذا التكامل ينتج أن

$$\int_a^b (ax^2 + Bx + c)dx = \frac{b-a}{3} \left[ A(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}B(a+b) + 3c \right]$$

وحيث أن منحنى القطع المكافئ يمر بالنقط

$$P_0 \equiv (a, f(a)) , P_1 \equiv \left( \frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), P_2 \equiv (b, f(b))$$

فإن هذه النقط تحقق معادلته وينتج ما يلي:

$$f(a) = Aa^2 + Ba + c$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + c,$$

$$f(b) = Ab^2 + Bb + c$$

من السهل أثبات أن :

$$f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = 2\left[A(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}B(a+b) + 3c\right]$$

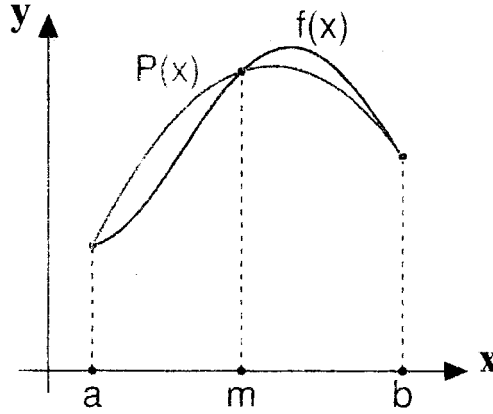
$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \dots\dots\dots(2)$$

وهذه هي الصيغة المطلوبة .

### 3. قاعدة سمبسن Simpson's Rule

فى التحليل العددى، قاعدة سمبسن هى طريقة للتكامل العددى او التقريب

العددى للتكامل المحدود



نفرض أنه أمكن تقسيم المسافة المطلوب حسابها الى  $n=2m$  شريحة،  
مساحة كل منها  $h = \frac{b-a}{n}$  (انظر الشكل). نستخدم الصيغة الهرمية  
السابقة لتقريب المساحة تحت كل من الأقواس

$$P_0P_1P_2 , P_2P_3P_4 , \dots , P_{2m-2}P_{2m-1}P_{2m}$$

ينتج أن :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \{ f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots \\ \dots + 2f(a+(2m-2)h) + 4f(a+(2m-1)h) + f(b) \} \dots (3)$$

#### 4. طريقة مفكوك الدالة Expand rule

في هذه الطريقة نستخدم مفكوك تيلور أو ماكلورين لكتابة مفكوك الدالة  
 $f(x)$  في متسلسلة بدلالة قوى  $x$  (أو  $(x-a)$ ) وقد استخدمنا هذه الطريقة  
في الفصل السابق. هذه الطريقة تعتبر أساسا في امكانية ايجاد مفكوك  
الدالة بحيث تتقارب المتسلسلة في حدود حدى التكامل.

## امثلة محلولة

### Solved Problem

**مثال** اوجد قيمة التكامل الآتى مستخدما صيغ قواعد طرق التقريب الاربعة وقارن النتائج المقربة باستخدام طريقة التكامل العادية

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

**الحل**

الطريقة الأولى : شبه المنحرف

نعتبر  $n=5$  فى هذه الحالة  $h = \left(\frac{1/2-0}{5}\right) = 0.1$  بالتعويض فى (1)

$$h = \left(\frac{1/2-0}{5}\right) = 0.1 \quad \text{حيث :}$$

$$a = 0, a + h = 0.1, a + 2h = 0.2,$$

$$a + 3h = 0.3, a + 4h = 0.4, b = 0.5$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0.1}{2} [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + 2f(0.4) + f(0.5)]$$

$$= \frac{1}{20} \left(1 + \frac{2}{1.01} + \frac{2}{1.04} + \frac{2}{1.09} + \frac{2}{1.16} + \frac{1}{1.25}\right) = 0.4631$$

الطريقة الثانية: الهرمية

$$h = \frac{1/2-0}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f(0) = 1,$$

$$f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}$$

$$\therefore \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12} (1 + 3.76471 + 0.8) = 0.4637$$

الطريقة الثالثة: سميسن (n=4)

$$h = \frac{1/2 - 0}{4} = \frac{1}{8}$$

$$a=0, \quad a+h = \frac{1}{8}, \quad a+3h = \frac{3}{8}, \quad a+2h = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{24} \left(1 + 4 \frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4 \frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{24} \left(1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5}\right) = 0.4637 \end{aligned}$$

الطريقة الرابعة: المفكوك

نكتب سبعة حدود للمفكوك

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\approx \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12}) dx \approx \\ &\approx \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{1/2} = 0.4 \end{aligned}$$

واخيرا باجراء التكامل :

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{1/2} = \arctan \frac{1}{2} = 0.4636$$

**مثال** أوجد المساحة المحصورة بالمنحنى  $y = e^{-x^2}$  ومحور السينات والخطين  $x=0$ ،  $x=1$  وذلك باستخدام

(أ) قاعدة سمسن باعتبار  $n=4$  (ب) طريقة المفكوك

**الحل**

الطريقة الاولى: سميسن (n=4)

$$a=0, b=1, h=\frac{1}{4}, a+h=\frac{1}{4}, a+3h=\frac{3}{4}, a+2h=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1/4}{3} (1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

باستخدام الجداول نحصل على :

$$\int_0^1 \dots dx \approx 0.747 \quad sq.un$$

الطريقة الثانية: طريقة المفكوك :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}) dx$$

$$\approx \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{11}}{11.5!} + \frac{x^{13}}{13.6!} \right]_0^1 = 0.747 \text{ square unite.}$$



## تمارين

1- أوجد القيمة التقريبية للتكامل  $\int_0^6 \frac{dx}{x}$  وذلك باستخدام :

(أ) طريقة شبه المنحرف (ضع  $n=4$ ) (الجواب : 1.117)

(ب) الطريقة الهرمية (الجواب : 1.111)

(ح) قاعدة سمسن ( $n=4$ ) (الجواب : 1.100)

(د) باستخدام التكامل (الجواب : 1.099)

2- باستخدام الطرق المذكورة في (أ) ، (ح) ، (د) في المسألة السابقة أوجد القيمة التقريبية للتكامل :  $\int_0^3 \ln x dx$  مع اعتبار  $n=5$  في (أ) ،  $n=8$

في (ح) (الجواب (أ)=1.2870، (ح)=1.2958، (د)=1.2958)

3- باستخدام قاعدة سمسن ( $n=6$ ) أوجد  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  (الجواب: 1.852)

4- أوجد  $\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$  وذلك باستخدام :

(أ) طريقة شبه المنحرف ( $n=5$ ) (الجواب: 1.115)

(ب) قاعدة سمسن ( $n=4$ ) (الجواب: 1.111)

\* \* \*