الباب الثامن

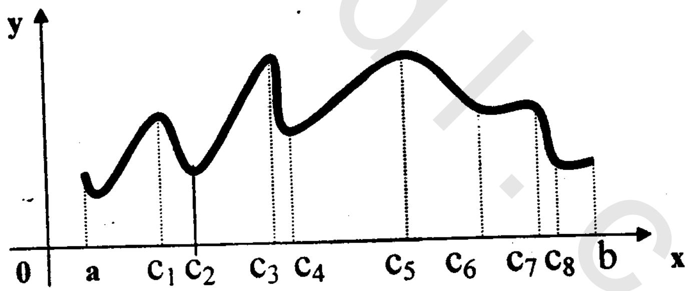
تطبيقات على التفاضل

النهايات العظمى والصغرى المحلية

Local Extrema of Functions

اعتبر المنحنى الموضح بشكل (1) والذى يوضح تغير كمية طبيعية بالنسبة للزمن. فى هذه الحالة محور x يمثل الزمن بينما يمثل الاحداثى y قيمة هذه الكمية عند مختلف الازمنه . فمثلا قيم y من الممكن ان تمثل قياسات طبيعية مثل درجة الحرارة ، المقاومة فى الدوائر الكهربية ، ضغط الدم لشخص ما أو تعداد البكتريا فى البنات ، الخ ....

كما هو مبين بالشكل التالى:



بالنظر إلى المنحنى نجد ان هذه الكمية تزيد مع الزمن فى الفترة

$[a, C_1]$,بينما تقل فى الفترة $[C_1, C_2]$ وتزداد فى الفترة $[C_2, C_4]$ وهكذا .

اذا اعتبرنا الفترة $[C_1, C_4]$ نجد ان هذه الكمية تأخذ أقصى قيمة لها عند C_3 وأصغر قيمة (min.) لها عند C_2 . فى الفترات الأخرى توجد قيم اخرى عظمى وصغرى .

اذا كان المنحنى فى الشكل السابق يمثل منحنى الدالة f وتغيرها مع الاحداثى x فسوف نضع الصيغ الرياضية لتزايد الدالة وتناقصها بتغيير x فى التعريف التالى :

تعريف (1) :

بفرض ان الدالة f معرفة على الفترة I وان $x_1, x_2 \in I$ فان:

(i) يقال ان f دالة تزايدية على I اذا كان

$$f(x_1) < f(x_2) \forall x_1 < x_2$$

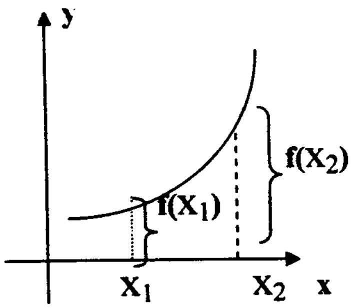
(ii) يقال ان f دالة تناقصية على I اذا كان

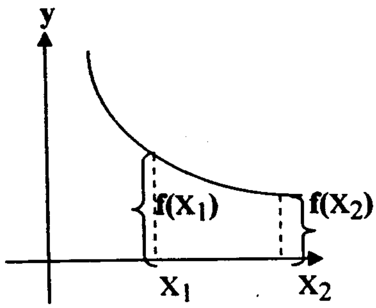
$$f(x_1) > f(x_2) \forall x_1 < x_2$$

(iii) يقال ان f دالة ثابتة على I اذا كان

$$f(x_1) = f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I.$$

التمثيل الهندسى لهذا التعريف فى الشكل التالى ونلاحظ انه اذا كانت f دالة ثابتة فانه يمكن تمثيلها بخط افقى موازى لمحور x .





Increasing function **Decreasing function**

سوف نستخدم الرمز f او الرمز f(x) للتعبير عن تزايد او تناقص الدالة .

<u>تعريف (2) :</u>

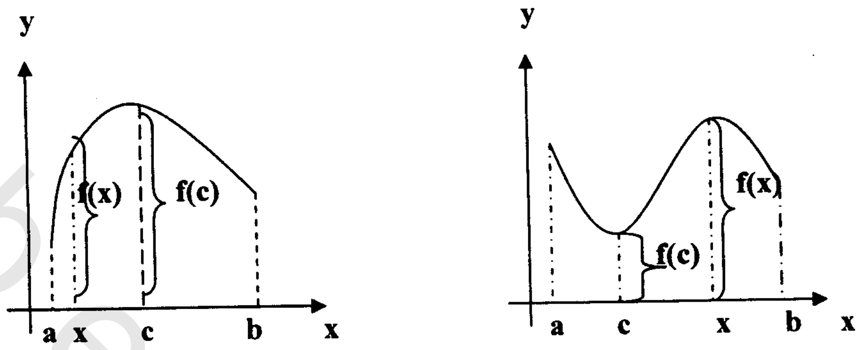
بفرض ان الدالة f معرفة على الفترة I وكان $C \in I$ فان:

(i) f(c) تكون قيمة عظمى (maximum value) للدالة f على I اذا كان :

$$f(x) \le f(c) \quad \forall x \in I$$

(ii) f(c) تكون قيمة صغرى (minimum value) للدالة f على I اذا كان :

$$f(x) \ge f(c) \quad \forall \in I$$



(i) Maximum value f(c) **(ii) Minimum value f(c)**

Fig. 3

القيم العظمى والصغرى للدوال موضحة فى Fig. (3) ونلاحظ اننا رسمنا I على شكل فترة مغلقة [a, b] ولكن تعريف (2) يكون صحيحا لاى فترة I .

نلاحظ ان المنحنيات فى Fig. (3) تكون المماسات لها عند c افقية (horizontal) عند النقطة (c,f(c)) ولكن القيم العظمى والصغرى للدالة من الممكن ان تحدث ايضا فى بعض الاحوال عند ركن من اركان الدالة Corners او عند نهايتى الفترة (end – points of domain) دالة يمكن ان تأخذ قيم عظمى أو صغرى اكثر من مرة فمثلا نجد انه اذا كانت f دالة ثابتة فان f(c)

تكون قيمة عظمى وقيمة صغرى عند حقيقى c .بعض الدوال من الممكن ان تأخذ قيمة عظمى ولايكون لها قيمة صغرى على فترة التعريف والعكس صحيح وهناك ايضا بعض الدوال لايكون لها قيمة عظمى او قيمة صغرى فمثلا نعتبر الدالة $f(x)=1/x, x \neq 0$ الموضحة فى الشكل التالى:

Fig. 3

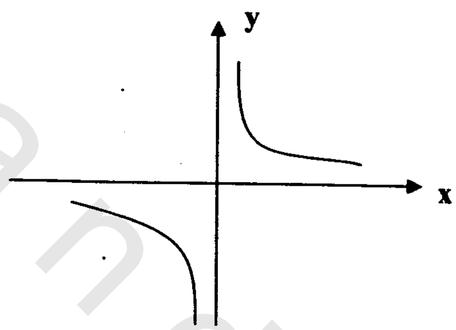


Fig. 4

نلاحظ ان f تكون غير متصلة عند (0) . على الفترة [1 ,1-] نجـد ان الدالة لاتكون لها قيمة عظمى او قيمة صغرى (لماذا ؟) .

وايضا على الفترة (0, 1) اذا كان $0 < a < 1$ فانه يوجد دائما عددان x_1, x_2 فى (0, 1) بحيث يكون

$$F(x_1) > f(a) \text{ and } f(x_2) < f(a)$$

- على الفترة النصف مفتوحة $[0, 1)$ توجد قيمة صغرى $f(1)$ ولكن لاتوجد قيمة عظمى للدالة .

- على الفترة النصف مفتوحة $(-1, 0]$ توجد قيمة صغرى $f(-1)$ ولكن لاتوجد قيمة صغرى للدالة .

- على الفترة $[1, 2]$ نجد ان f لها قيمة عظمى $f(1)$ وقيمة صغرى $f(2)$ من التحليل السابق نجد ان وجود قيم عظمى أو قيم صغرى للدالة يمكن ان يعتمد على اتصال الدالة وايضا على ما اذا كانت الفترة المعرفة عليها للدالة اذا كانت مفتوحة او مغلقة او نصف مفتوحة . النظرية التالية تحدد شروط وجود نهاية عظمى أو صغرى للدالة على فترة التعريف :

نظرية (1) :

واذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان f تأخذ قيمة صغرى أو قيمة عظمى على الاقل مرة واحدة فى $[a, b]$.

تعريف : (القيم العظمى والصغرى والمحلية)

اذا كان c أى عدد فى نطاق الدالة f فان :

(i) $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية (local maximum) اذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) تحتوى العدد c بحيث يكون :

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (a, b)$$

(ii) $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية (local minimum) اذا وجدت

فترة مفتوحة (a, b) تحتوى العدد c بحيث يكون :

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in (a,b)$$

<u>ملحوظة :</u>

كلمة محلية (local) تستخدم لتحديد ان هذه النهاية سواء كانت عظمى أو صغرى تكون موجودة داخل فترة صغيرة مفتوحة وبحيث تأخذ f اكبر أو أصغر قيمة لها داخل هذه الفترة ولكن خارج هذه الفترة من الممكن ان نأخذ f قيما (values) اكبر من او اصغر من القيم التى تأخذها داخل الفترة فمثلا نعتبر شكل الدالة الموضح فى التالى:

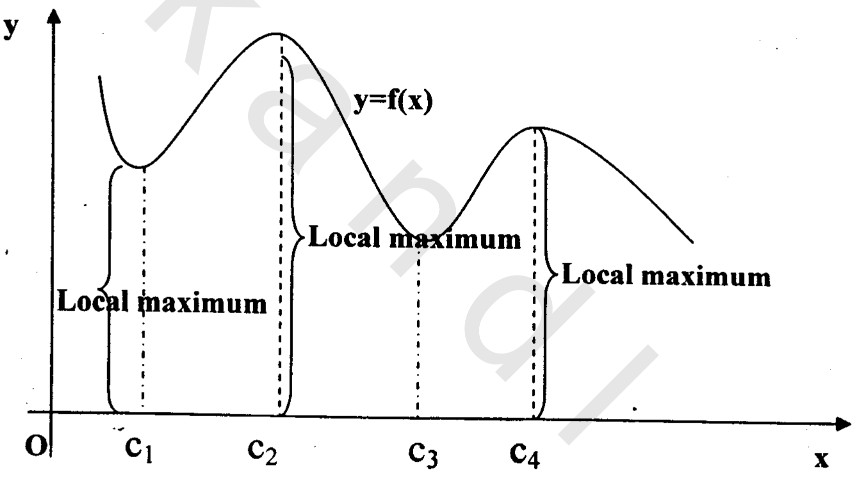


Fig. 5

نجد ان القيمة الصغرى المحلية عند C_1 اكبر من القيمة العظمى المحلية عند C_4 لذلك سوف نستخدم التعبير الاتى :

القيمة العظمى المطلقة (absolute. max)

والقيمة الصغرى المطلقة (absolute min)

للتعبير عن اكبر أو اصغر قيمتان للدالة فى نطاقها .

فى Fig.(5) نجد ان عند النقاط المناظرة للقيم العظمـــى والــصغرى المحلية يكون المماس للمنحنى اما افقى او ان هناك ركن للمنحنى (corner) كما عند C_3 وبذلك نجد ان الاحداثى x لهذه النقــاط يكون عدد بحيث تكون مشتقة الدالة عنده امـــا صـــفر او غيـــر موجودة (كما عند C_3) .

<u>نظرية (2)</u> :

اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة [a, b] وتأخذ قيمة عظمى أو صغرى عند عدد c داخل الفترة المفتوحة (a, b) فان $f'(c)$ اما تساوى صفر او $f'(c)$ غير موجودة .

<u>تعريف (النقطة الحرجة) :</u>

النقطة C فى نطاق الدالة F تسمى النقطة حرجـــة (Critical point) اذا كان :

$f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة .

تزايد وتناقص الدوال باستخدام المشتقة الاولى

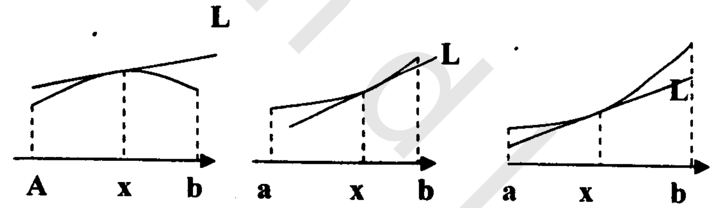
<u>نظرية (3)</u> :

اذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b] وقابلة للتفاضل على المفتوحة (a ,b) فان:

(i) اذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in (a,b)$ فان f دالة تزايدية على [a, b]

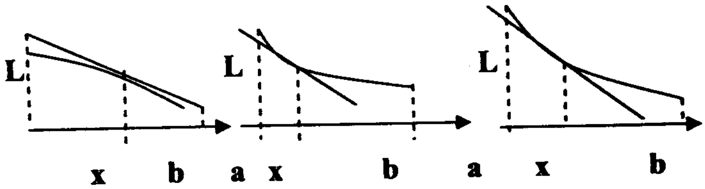
(ii) اذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in (a,b)$ فان f دالة تناقصية على [a, b]

<u>**التفسير الهندسى**</u> لهذه النظرية موضحا فى الاشكال الاتية حيث نلاحظ ان خط المماس للدالة فى عند اى نقطة $x \in (a,b)$ يرتفع الى اعلى لان $f'(x) > 0$ وبالتالى فان المنحنى ايضا يرتفع الى اعلى بتزايد x وعلى ذلك فان الدالة تزايدية .



f(x)>0; f increasing on [a,b]

وايضا فى الشكل التالى انه $f'(x) < 0$ لذلك فان كلا من المنحنى والمماس له عند x يهبطان لاسفل بتزايد x.



f(x)<0; f drcreasing on [a,b]

لذلك فان الدالة تناقصية عندما $f'(x) < 0$.

The first derivative test اختبار المشتقة الاولى

نظرية (4) :

بفرض ان C نقطة حرجة للدالة f , (a, b) فترة مفتوحة تحتوى العدد C وبفرض ان f دالة متصلة على (a, b) مع احتمال عدم حدوث هذا عند c نفسها فان :

(i) If $f'(x) > 0$ for $a < x < c$ and $f'(x) < 0$ for $c < x < b$

فان f(c) **تكون قيمة عظمى محلية** للدالة f

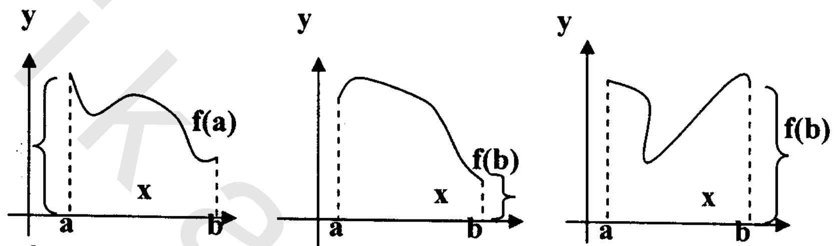
(ii) If $f'(x) < 0$ for $a < x < c$ and $f'(x) < 0$ for $c < x < b$

فان f(c) تكون **قيمة صغرى محلية** للدالة f

(iii) If $f'(x) > 0$ or if $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b); x \neq C$

فان f(c) **ليست** قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة f

من نظرية (2) نجد انه اذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b] فان القيم العظمى والصغرى المطلقة تحدث عند النقاط الحرجة للدالة f او عند نهايتى الفترة a أو b الاشكال التالية توضح هذا المفهوم.



absolute maximum f(a)   absolute maximum f(b)   absolute maximum f(b)

<u>طريقة ايجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة :</u>

اذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b]

(i) نوجد كل النقاط الحرجة للدالة f

(ii) نحسب f(c) عند كل النقاط الحرجة c .

(iii) نحسب f(b) , f(a) .

(iv) القيم العظمى والصغرى المطلقة على [a, b] هى اكبر واصغر قيمة للدالة من القيم المحسوبة فى (ii) .

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: اوجد النقطة الحرجة للدالة

$$f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

الحـــل :

$$f(x) = (x+5)^2 (x-4)^{1/3}$$

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = (x+5)^2 (\frac{1}{3})(x-4)^{-2/3} + 2(x+5)(x-4)^{1/3}$$

$$= \frac{(x+5)^2}{3(x-4)^{2/3}} + 2(x+5)(x-4)^{1/3}$$

$$= \frac{(x+5)^2 + 6(x+5)(x-4)}{3(x-4)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{2/3}}$$

بوضع $f'(x) = 0$ نجد ان $x = 1917$, $x = -5$

ايضا نجد ان $f'(x)$ غير معرفة عند $x - 4 = 0$ أى عند $x = 4$

فتكون النقط الحرجة هى

$$x_1 = -5, x_2 = \frac{19}{7}, x_3 = 4$$

نوجد قيم f عند النقاط الحرجة

$$f(x_1) = f(-5) = 0$$

$$f(x_2) = f(\frac{19}{7}) = -114.26$$

$$f(x_2) = f(4) = 0$$

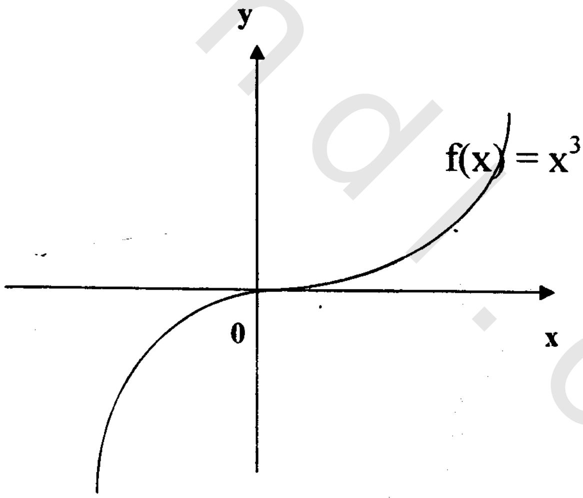
$\therefore$ **النقاط الحَرجة هى** $(-5,0), (\frac{19}{7}, -114.26), (4,0)$

مثال :

اثبت ان الدالة $f(x) = x^3$ لاتوجد لها قيم عظمى أو صغرى محلية

الحــل : نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = 3x^2$$



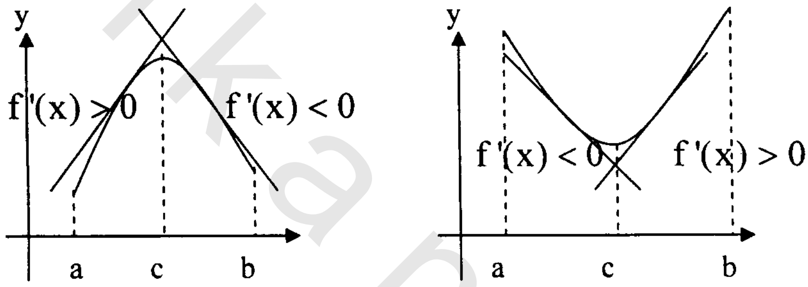
عندما $f'(x) = 0$ نجد ان $x = 0$

اى ان $x = 0$ هة النقطة الوحيدة الحرجة للدالة ولكن

عندما $x < 0$ نجد ان $f(x) < 0$

وعندما $x > 0$ نجد ان $f(x) > 0$

اى انه لاتوجد فترة مفتوحة أو مغلقة تحتوى النقطة $x = 0$ بحيث تكون $f(0) = 0$ هى اكبر أو اصغر قيمة للدالـــة علـــى هـــذه الفتــرة وبالتالى فان هذه الدالة لاتوجد لها قيم عظمى او صغرى محلية .



(i) Local maximum **(ii) local minimum**

<u>مثال</u> :اوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

$$F(x) = x^{1/3}(8 - x)$$

<u>الحـــــل</u> :

$$f'(x) = x^{1/3}(-1) + (8-x)(\frac{1}{3})x^{2/3} = \frac{-3x+8-x}{3x^{2/3}} = \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}}$$

النقط الحرجة للدالة عند $x = 0$, $x = 2$ لذلك نعتبر اشارة $f'(x)$ على

الفترات $(-\infty,0),(0,2),(2,\infty)$

نكون الجدول التالى وذلك بان نأخذ فى كل فترة عدد k ينتمى الى هذه

الفترة

Interval	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
K	-1	1	8
Test value of $f'(x)$	4	$\frac{4}{3}$	-2
Sign of $f'(x)$	+	+	-
Variation of f(x)	Increasing on $(-\infty,0)$	Increasing on (0, 2)	Decreasing $(2,\infty)$

من هذا الجدول نجد ان اشارة $f'(x)$ تتغير عند العدد 2 من + الى

– وبالتالى توجد قيمة عظمى محلية للدالة عند $x = 2$ وتساوى

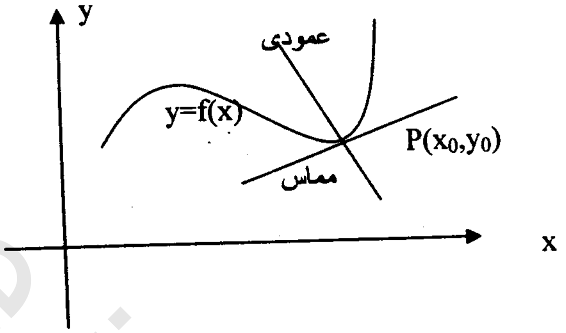
$f(x) = 6\sqrt{2}$

تطبيقات هندسية

علمنا فيمات سبق ان اى دالة $y = f(x)$ تمثل معادلة منحنى فاذا كانت

$P(x_0,y_0)$ نقطة معلومة على هذا المنحنى فان

$$f'_{x_0} = dy/dx \,\big|_{(x_0,y_0)}$$



تمثل ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة P .

1- **<u>معادلة المماس للمنحنى</u>** : معادلة المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(x_0,y_0)$ هى

$$[y - y_0]/[x - x_0] = f'_{x_0}$$

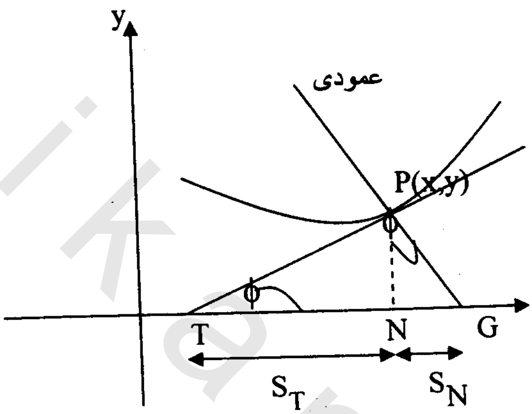
2- **<u>معادلة العمودى للمنحنى</u>** : معادلة العمودى $y = f(x)$ عند النقطة $P(x_0,y_0)$ هى

$$y - y_0 / x - x_0 = -1/f'_{x_0}$$

3- **<u>طول تحت المماس subtangent وتحت العمودى subnormal</u>**

<u>وطول المماس وطول العمودى</u> :

لنفرض ان $y = f(x)$ معادلة منحنى معلوم وان $P(x, y)$ هى نقطة ما على هذا المنحنى ونفرض أن المماس والعمودى P يقطعان محور X فى C & T على الترتيب وان N هى مسقط P على المحور X .كما هو مبين فى الشكل التالى:



يعرف تحت المماس عند P بانه TN وتحت العمودى بانه NG سوف نضع $S_N = \overline{NG}, S_T = \overline{TN}$

ويعرف طول المماس للمنحنى بأنه PN أى طول الجزء من المماس المحصور بين نقطة التماس ونقطة تقاطعه مع محور X . كما يعرف طول العمودى بانه PG .من الرسم نجد أن تحت المماس

1) $\tan\phi = y / TN = y / S_T = y' \Rightarrow S_T = y / y'$

تحت العمودى

2) $S_N / y = y'$ $\Rightarrow S_N = y.y'$

3) $PT = \sqrt{(TN)^2 + (NP)^2}$

طول المماس

$$PT = \sqrt{S_T^2 + y^2} = \sqrt{y2 / y \backslash 2 + y^2} = y / y' \sqrt{1 + y^2}$$

الطول العمودى

$$4) PG = \sqrt{(SN)^2 + y^2} = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثـــال : أوجــد معــادلتى الممـــاس والعمـــودى للمنحنـــى $\sqrt{x / y} + \sqrt{y / x} = 5 / 2$ عند النقطة (8, 2) .

الحـــل :

بالضرب × $\sqrt{xy}$

$$\sqrt{x / y} + \sqrt{y / x} = 5 / 2$$

$$x + y = 5 / 2\sqrt{xy}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$1 + y = 5 / 2.(x.y + y) / 2\sqrt{xy}$$

نفرض أن $m = y$ ميل المماس عند النقطة (8, 2)

$1+m=5/4.(8m+2)/\sqrt{16} \quad \Rightarrow 1+m=5/16(8m+2)$

$8+8m=20m+5 \Rightarrow 12m=3 \Rightarrow y=m=1/4$

معادلة المماس

$(y-2)/(x-8)=1/4 \Rightarrow x-8=4y=8 \Rightarrow x=4y$

معادلة العمودى

$(y-2)/(x-8)=-4 \Rightarrow y-2=-4x+32 \Rightarrow 4x+y=34$

<u>مثال</u> : أوجد طول كل من تحت المماس وتحت العمودى وطول المماس والعمودى للمنحنى $xy+2x-y=5$ عند النقطة $(2, 1)$.

<u>الحــــل</u> :

$$xy`+y+2-y`=0$$

$$y`=(y+2)/(1-x)$$

عند النقطة $(2, 1)$

$$m=y`=3/-1=3$$

$S_T=y/y`=1/-3$ **طول تحت المماس = 3 / 1 لان**

طول تحت العمودى = 3

$$S_N=y'y=1\times-3=-3$$

طول المماس

طول المماس $=\sqrt{1+,y^2}.y/'y$

$$=1/-3\sqrt{1+9}=\sqrt{10}/3$$

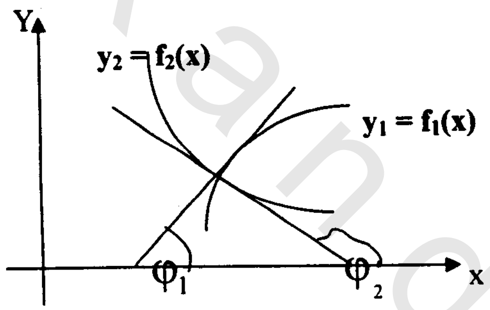
طول العمودى $=y\sqrt{1+y^2}=1\times\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

ثانيا : زاوية تقاطع منحنيين

لنفرض ان P هى نقطة تقاطع المنحنيين

$$y_1=f_1(x)\ \&\ y_2=f_2(x)$$

فتكون الزاوية بينهما عند النقطة P هى الزاويةالمحصورة بين المماسين المرسومين للمنحنيين عند هذه النقطة اى ان:



$$\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$

$$\tan\varphi=\tan(\phi 2-\phi 1)$$

$$=\lfloor\tan\phi_2-\tan\phi_1\rfloor/\lfloor 1+\tan\phi_2-\tan\phi_1\rfloor$$

ولكن بما ان

$$\tan\phi_1=y_1\ \&\ \tan\phi_2=y_2$$

عند هذه النقطة

$\tan\varphi = [y_2 - y_1]/[1 + y_2 \cdot y_1]|_p$

مثال : اوجد زاوية تقاطع المنحنيين

$$y = x \;\&\; x^2 + y^2 = 2$$

الحــــل : نعين اولا نقط المنحنيين بحل معادلتيهما

$(x = y) \Rightarrow x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -1$

$\therefore$ نقط التقاطع هى $(1, 1) \;\&\; (-1, -1)$

– نعين ميل المنحنى الاول

– نعين ميل المنحتى الثانى $y_1 = 1$

$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y'_2 = -x/y$

عند النقطة $(-1, -1)$	عند النقطة $(1, 1)$
$y'_1 = 1, y'_2 = -1$ $\tan\varphi_2 = (1 - 1)/(1 + 1) = 0$ $\therefore \varphi_2 = 0$	$\tan\varphi_1 = (y'_1 - y'_2)/(1 + y'_1 y'_2)$ $= (1 + 1)/(1 - 1) = \infty$ $\therefore \varphi_1 = \pi/2$

مثال : أوجد زاوية تقاطع المنحنيين:

$$y = \tan^{-1}(2x + 1) \;\&\; y = \tan^{-1} x$$

الحـــل :

نقرض ان ميل المنحنى الاول m_1 وميل المنحنى الثانى m_2

$$m_1 = \tan\theta_1, m_2 = \tan\theta_2$$

∴ زاوية تقاطع المنحنيين هى $(\theta_2 - \theta_1)$

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) =$$
$$(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)/(1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1)$$
$$= (m_2 - m_1) / (1 + m_2 m_1)$$
$$y_1 = \tan^{-1} x, m_1 = dy_1 / dx = 1\ n/ (1 + x^2)$$
$$y_2 = \tan^{-1} (2x + 1),$$
$$m_2 = dy_2 / dx = 1 /[1+(2x + 1)^2(2))$$
$$= 2 / 4x^2 + 4x + 2$$
$$= 1 / (2x^2 + 2x + 1)$$

لايجاد نقطة تقاطع المنحنيين نحل معادليتهما

$$\tan x = \tan(2x + 1) \Rightarrow 2x + 1 = x \Rightarrow$$
$$x = -1$$
$$m_1 = 1/(1 + x^2)|_{x=-1} = 1/2$$
$$m_2 = 1/(2x^2 + 2x + 1)|_{x=-1} = 1$$

لذلك تكون زاوية التقاطع $(\theta_2 - \theta_1) = \varphi$

هى

$$\tan\varphi = (m_2 - m_1)/(1 + m_2 m_1) = 1/3$$

ثالثا : تطبيقات المشتقات على الاحداثيات القطبية (r, θ)

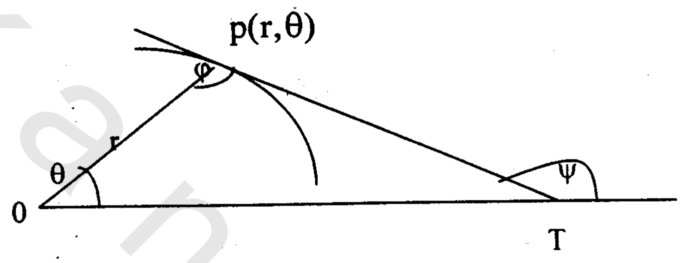
الاحداثياتِ القطبيان لنقطة ما مثل p هما نصف القطر المتجه

r (radius vector) وهو يمثل بعد النقطة p عن نقطة ثابتة (0)

تسمى القطب والاحداثى الاخر هو الزاوية θ التى يصنعها 0p مع خط

مستقيم ثابت 0x يسمى بالخط الابتدائى والمعادلة القطبية $r = f_{(0)}$ هى

علاقة او دالة تربط الاحداثيين r , θ لاى نقطة على المنحنى



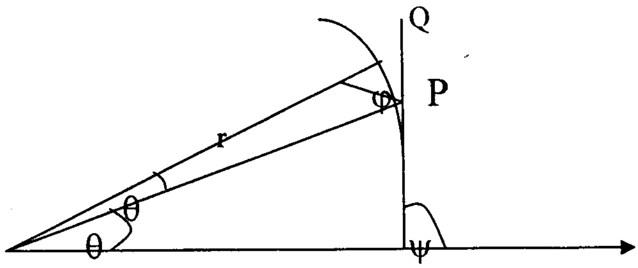
* الزاوية بين المماس ونصف القطر المتجه

لايجاد الزاوية φ الواقعة بين المماس عند النقطة P الواقعة على المنحنى

$$r = f(\theta)$$

ونصف القطر المتجه

$$0p = r$$



نتبع الخطوات الاتية :

- نفرض ان $P(r_1,\theta)$ تقع على المنحنى

- ناخذ نقطة قريبة جدا منها ولتكن $Q(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ حيث نصف القطر المتجه لها هو $r+\Delta r$ ، الزاوية القطبية لها هى $\theta+\Delta\theta$

$$\therefore Q0p = \Delta\theta$$

- اذا كان φ هى الزاوية بين المماس ونصف القطر 0p

- من الشكل نجد ان $\varphi =$ الزاوية المحصورة بين NQ, Qp حيث $PN \perp 0Q$

$$\therefore \tan\varphi = r\Delta\phi/\Delta r = r(\Delta\theta/\Delta r)$$

وعندما $\Delta r \Rightarrow 0$

$$\therefore \tan\varphi - r\mathrm{Lim}(\Delta\theta/\Delta r) = r.(d\theta/dr)$$

$$\tan\varphi = r/(dr/d\theta) = r/r', r' = dr/d\theta$$

$$\varphi = \tan^{-1} r/r'; Q = \theta+\varphi$$

زاوية ميل المماس مع محور ox

مثال : اوجد الزاوية بين المماس ونصف القطر المتجه للمنحنى

$$r = 2 + \cos\theta$$

عندما $\theta = \pi/3$. ثم اوجد ميل المماس عند هذه النقطة .

الحـــل : نفرض ان الزاوية المطلوبة هى φ

$$\therefore \tan\varphi = r/r'$$

$$r = 2 + \cos\theta \Rightarrow r' = -\sin\theta$$

$$\text{at } \theta = \pi/3 = 60^o \Rightarrow r = 2 + 1/2 = 5/2, r^1 = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan\varphi = (5/2)/(\sqrt{3}/2) = -5/\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-5/\sqrt{3})$$

لايجاد ميل المماس نجد ان

$$y' = \tan\varphi = \tan(\theta + \varphi)$$
$$= (\tan\theta + \tan\varphi)/(1 - \tan\theta\tan\varphi)$$
$$= [\sqrt{3} - 5/\sqrt{3}]/[1 + (\sqrt{3} - 5/\sqrt{3})]$$
$$= -2/\sqrt{3}/6 = -1/3\sqrt{3}$$

تمارين

1- اوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات الاتية :

a) $y = \tan_{2x}$ at $(0, 0)$

b) $xy + 2x - y = 5$ at $(2, 1)$

c) $y^2 = 4ax$ at $(1, 4)$

اوجد كذلك طول كل من تحت المماس وتحت العمودى لكل منحنى عند النقطة المبينة امامه.

2- برهن على ان طول تحت المماس فى المنحنى الدالة الاتية :

$Y = b e^{x/a}$, a, b constants

يساوى مقدارا ثابتا وان طول تحت العمودى هو b^2 / a

3- اوجد طول العمودى وطول المماس لمنحنى الدالة $y = \cosh^{-1} x$ عند $x = 2$

4- اوجد زاوية تقاطع المنحنيين

$$x + y + 2 = 0 \ \& \ x^2 + y^2 - 10y = 0$$

5- اوجد زاوية تقاطع المنحنيين $xy = 10 \ \& \ y = x + 3$

6- اوجد الزاوية المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 \ \& \ y = x^2$

7- أوجد الزاوية بين المماس ونصف القطر الموجه ثم ميل المماس للمنحنيات الاتية :

I. $r^2 = 3 + \cos 2\theta$ at $\theta = \pi / 6$

II. $r = 4 \sin 3\theta$ at $\theta = \pi / 4$

8- اثبت ان المنحنى $r = ae^{B\cot}$ ، ثابت ، تكون الزاوية بين المماس عند اية نقطة عليه ونصف القطر المتجه ثابته وتساوى α .

* * *