

الباب سابع

الاتصال Continuity

بعد تعريفنا لنهاية الدالة f عندما x تؤول إلى عدد معين a ، اى

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

مع وضع الشرط $x \neq a$ ، وجدنا فى العدد من الحالات ان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

من الممكن ان تكون موجودة حتى إذا لم تكن معرفة عند a .

ولكن إذا كانت f معرفة عند $x = a$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة فان

هذه النهاية من الممكن ان تساوى $f(a)$ او لا تساويها فإذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

فانه يقال ان الدالة f متصلة عند $x = a$ الان نضع التعريف التالى

لاتصال دالة عند نقطة .

تعريف (1) :

يقال أن الدالة f تكون متصلة عند العدد a إذا تحققت الشروط الآتية:

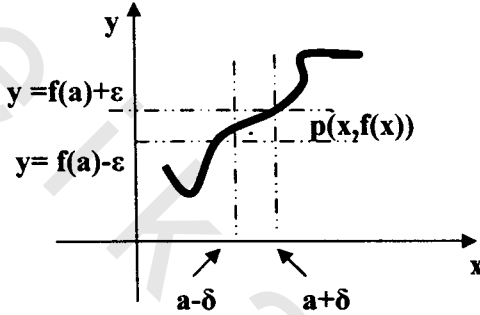
(i) معرفة على فترة مفتوحة تحتوى العدد a

(بمعنى اخر تكون معرفة فى جوار a)

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{(iii)}$$

وإذا كانت f لا تحقق أى من الشروط السابقة فيقال انها غير متصلة عند $x = a$ (discontinuous) أو أنه يوجد عدم اتصال للدالة عند a .



إذا كانت f متصلة عند a فان النقطة $(a, f(a))$ تقطع على منحنى الدالة f . وتكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

وبعبارة أخرى (انظر الرسم) Fig (1) لكل زوجين من الخطوط الافقية $y = f(a) \pm \epsilon$ يوجد زوجين مناظرين من الخطوط الرأسية $x = a \pm \delta$ بحيث إذا كان $a - \delta < x < a + \delta$ فان النقطة

$(x, f(x))$ على منحنى الدالة تقطع فى المنطقة المظللة بالشكل 1

تعريف اتصال دالة عند قيمة معينة x_0 كالآتى

مثال:

اثبت أن الدالة $y = \sin x$ متصلة عند أى نقطة (x_0, y_0) .

الحل :

$$y_0 = \sin x_0, y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$$

باستخدام المتطابقة

$$\sin a - \sin b = \frac{2}{1} \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{\Delta x}{2}\right), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad \text{بما ان } x_0 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \text{ محدودة}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

تعريف (2) :

إذا كانت f معرفة على فترة مفتوحة تحتوي العدد a فإن f تكون متصلة عند a إذا كان لكل $\varepsilon < 0$ يوجد عدد صغير $\delta > 0$ بحيث يكون:

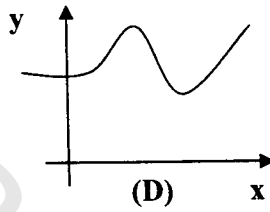
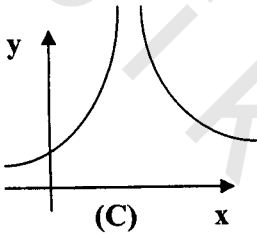
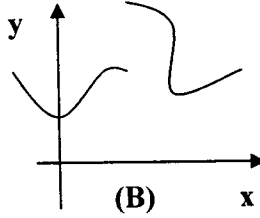
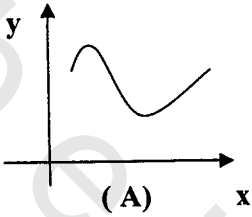
$$\text{if } |x - a| < \delta, \text{ then } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ملحوظة : في هذا التعريف نلاحظ أننا لم نضع الشرط $0 < |x - a|$

لان f تكون معرفة عند a وأيضاً عند $x = a$ فإن

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

منحنيات بعض الدوال الغير متصلة موضحة بالاشكال الاتية :



اسباب عدم الاتصال

فى الشكل (A) الدالة غير متصلة لانها غير معرفة عند $x = a$
 (B)/(C) الدالة غير معرفة عند a لان $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ غير
 موجودة

.. .. (D) قيمة الدالة عند a لا تساوى قيمة النهاية عند a .

إذا كانت الدالة f معرفة عند كل عدد فى الفترة المفتوحة (a, b) فانها
 يقال ان f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) .

تعريف (4): إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان

الدالة f تكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة على (a, b)

وبالإضافة لذلك يجب ان يكون

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$$

إذا كانت f لها نهاية يمنى أو نهاية يسرى كما ذكرنا فى التعريف السابق فإنه يقال ان الدالة متصلة من اليمين عند a أو متصلة على اليسار من b .

مثال: إذا كانت

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

ارسم منحنى الدالة f وبين أن الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[-3, 3]$.

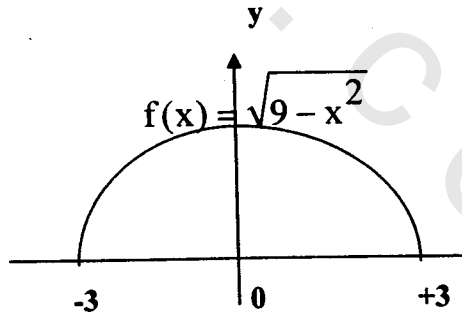
$$y = \sqrt{9 - x^2} > 0$$

$$y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 = (3)^2$$

الحل:

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها 3 ومركزها نقطة الاصل وبما ان

$y > 0$ فان المنحنى يمثل الجزء العلوى من الدائرة فقط



إذا كانت $-3 < C < 3$ فان

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - c^2} = f(c)$$

من التعريف نجد ان f متصلة عند $C: -3 < C < 3$ - يبقى اثبات أن النهايات عند بداية ونهاية الفترة تكون موجودة .

الدالة متصلة من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(-3)$$

الدالة متصلة من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$$

بذلك تكون الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[-3, 3]$.

نظرية القيمة الوسيطة

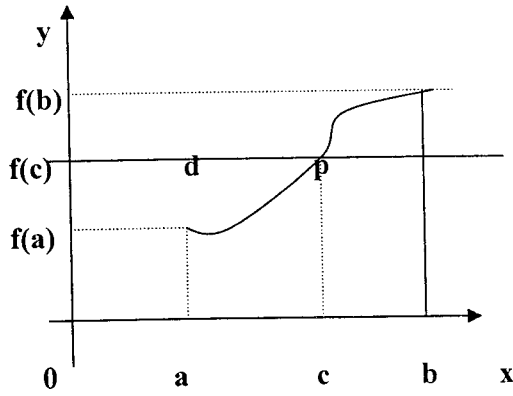
Intermediate value theorem

إذا كانت الدالة f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت

$$f(a) \neq f(b)$$

انه يوجد على الاقل عدد واحد $C \in (a, b)$ بحيث يكون

$$f(c) = d$$



ومعنى هذه النظرية ان الدالة المتصلة لاتتخطى أى أعداد أثناء مرورها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية فإذا كانت $f(a) \neq f(b)$ وكان العدد d محصورا بين $f(a), f(b)$ فان النقطتين $Q_1 = (a, f(a))$.

$Q_2 = (b, f(b))$ مع فى جهتين مختلفتين من الخط الافقى $y = d$ كما بالشكل وبما أن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فان المنحنى

$y = f(x)$ حيث $a \leq x \leq b$ يكون منحنى متصل من Q_1 إلى Q_2 لذلك فهو يقطع الخط $y = d$

عند نقطة ما ولتكن $P(c, d)$ حيث $a < c < d$ وأيضا بما

ان P تقطع على المنحنى فهي تحقق معادلتين أى أن $f(c) = d$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال: إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ متصلة على الفترة المغلقة

. $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ فاوجد قيمة x عندما $[0, 2]$

الحل :

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$f(2) = \sqrt{8+1} = 3$$

$$1 < \frac{\sqrt{5}}{2} < 3, \text{ put } d = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f(0) \neq f(3)$$

فان الدالة تحقق النظرية . وبوضع $d = \frac{\sqrt{5}}{2}$ بما ان $1 < \frac{\sqrt{5}}{2} < 3$ يوجد

عدد $C \in [0, 2]$ بحيث يكون

$$f(c) = d$$

$$f(c) = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore \sqrt{c^3+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$c^3 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

مثال : حقق نظرية القيمة الوسيطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة المغلقة $[3, 24]$.

الحل : نلاحظ ان الدالة متصلة على الفترة المعطاه كما أن

$$f(3) = \sqrt{3+1} = 2 \quad f(24) = \sqrt{24+1} = 5$$

$$\therefore f(3) \neq f(24)$$

فهي تحقق شروط النظرية .

إذا كانت d عدد حقيقي بين 5, 2, فيجب ان نجد عدد $c \in [3, 24]$

بحيث يكون $f(c) = d$ أى $\sqrt{c+1} = d$ بالتربيع

$$\Rightarrow c+1 = d^2 \Rightarrow c = d^2 - 1$$

$$4 < d^2 < 25 : 2 < d < 5$$

$$3 < c < 24 : 3 < d^2 - 1 < 24$$

أى أن $C \in (3, 24)$ كما ان

$$f(c) = f(d^2 - 1) = \sqrt{d^2 - 1 + 1} = d$$

نتيجة : إذا كانت الدالة f متصلة ليس لها اصفار على الفترة $[a, b]$ فان

$$\cdot x \in [a, b] \text{ لكل } f(x) < 0, f(x) > 0$$

صيغة تيلور

نظرية : إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة n وكان a أى عدد حقيقي فان :

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

وتسمى هذه الصيغة بمفكوك $f(x)$ فى قوى $(x-a)$.

البرهان :

حيث ان $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n في x فانه يمكن كتابتها كالتالي:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n.$$

حيث $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت حقيقية $C_n \neq 0$.

باجراء عملية التفاضل بالتتابع نحصل على

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2C_2 + 3 \times 2C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3 \times 2C_3 + \dots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1 C_n.$$

بالتعويض عن $x = a$ نحصل على

$$f(a) = C_0, \quad f'(a) = C_1, \quad f''(a) = 2!C_2,$$

$$f'''(a) = 3!C_3, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n!C_n$$

وبالتعويض عن هذه الثوابت نحصل على

امثلة محلولة Solved Problems

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 5$$

مثال : اوجد مفكوك كثيرة الحدود

في قوى $(x-1)$.

put $x-1=0$ then $x=1$

الحل:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5, \quad f(1) = -5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2, \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6, \quad f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = 24x, \quad f'''(1) = 24$$

$$f^{(4)}(x) = 24, \quad f^{(4)}(1) = 24$$

والآن

$$f(x) = -5 + (x-1)(0) + (x-1)^2 \frac{6}{2!} + (x-1)^3 \frac{24}{3!} + (x-1)^4 \frac{24}{4!}$$

$$f(x) = -5 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

نظرية : إذا كانت $f(x)$ دالة حيث $f^{(n)}(a)$ لها وجود وكانت $p_n(x)$

دالة كثيرة حدود من درجة n في x حيث

$$p_n(a) = f(a), \quad p_n^{(r)}(a) = f^{(r)}(a), \quad r=1,2,3,\dots,n$$

فان

$$p_n(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

* هذه النظرية نتيجة مباشرة من النظرية السابقة .

* تسمى $p_n(x)$ بكثيرة حدود تيلور من درجة n للدالة $f(x)$ عند a .

مثال : اوجد كثيرة حدود تيلور من درجة n لتالة e^x عند $x=0$.

الحل :

$$f^{(r)}(x) = e^x, \quad f^{(r)}(0) = 1$$

$$\therefore P_n(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1!} + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\therefore P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \frac{x^n}{n!}$$

مثال : اوجد كثيرة حدود تيلور من الدرجة الثالثة للدالة $\sin x$ عند

$$x = \frac{\pi}{4}$$

الحل :

$$p_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + (x - \frac{\pi}{4}) \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!} + (x - \frac{\pi}{4})^2 \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!} + (x - \frac{\pi}{4})^3 \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3$$

إذا كانت $p_n(x)$ هي كثيرة حدود تيلور من درجة n للدالة $f(x)$ $p_n(a) = f(a)$ أى أن كثيرة الحدود $p_n(x)$ تعطى نفس قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = a$ ولكن لقيم $x \neq a$ أى ان قدر من الدقة تكون $p_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$. من الطبيعي اذا كانت x_1 قريبة من a فان الفرق $f(x_1) - p_n(x_1)$ يكون صغيرا .

قانون تيلور بالباقي

نظرية :

إذا كانت $f(x)$ دالة بحيث ان $f^{(n)}(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ وايضا $f^{(n+1)}(x)$ لها وجود فى الفترة $[a, b]$ فانه لكل $x \in [a, b]$ يوجد عدد حقيقى ξ يقع بين a, x بحيث ان

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_{n+1}(x)$$

حيث

$$R_{n+1}(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

تسمى الصيغة السابقة بقانون تيلور بالباقي .

امثلة محلولة Solved Problems

مثال : اوجد قانون تيلور بالباقي للدالة $f(x) = \sin x$

في قوى عند $(x - \frac{\pi}{4})$

الحل :

$$f(x) = \sin x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right), \quad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + (x - \frac{\pi}{4}) \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!} + (x - \frac{\pi}{4})^2 \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!} + (x - \frac{\pi}{4})^3 \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!} + \dots +$$

$$+ (x - \frac{\pi}{4})^n \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n!} + (x - \frac{\pi}{4})^{n+1} \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{(n+1)!}.$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots +$$

$$+ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{n!} = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \frac{\sin\left(\xi + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}$$

مثال :

فى المثال السابق ، اوجد قانون تيلور بالباقي للدالة $\sin x$ فى قوى $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ، ثم استخدم هذا المفكوك لحساب $\sin 31^0$.

الحل :

بنفس الطريقة فى المثال السابق ولكن $a = \frac{\pi}{6}$.

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots +$$

$$+ \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n \frac{1}{n!} \sin\left(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \sin\left(\xi + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

لحساب $\sin 31^0$ نحولها للتقدير الدائرى

$$x = 31^0 = \frac{31}{180} \pi$$

$$\sin 31 = \sin \frac{31\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{n!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^n$$

متسلسلة تيلور

في قانون تيلور بالباقي للدالة $f(x)$ في قوى $a-x$ وهو

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_{n+1}(x)$$

قد يحدث أن $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ وتكون المتسلسلة

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

تقريبية .

* تسمى هذه المتسلسلة بمتسلسلة تيلور للدالة $f(x)$ في قوى $(x-a)$

وبأخذ a نحصل على

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n + \dots$$

وتسمى هذه بمتسلسلة مكلاورين **Maclaurin** للدالة $f(x)$ في قوى x

مثال : اوجد متسلسلة مكلاورين للدالة $\cos x$ والدالة $\ln(1+x)$ في

قوى x التصاعدية .

الحل :

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x, \quad f'''(0) = 0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = 0, \quad n \text{ is odd}$$

$$f^{(n)}(0) = \pm 1, \quad n \text{ is even.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

وتكون متسلسلة مكلاورين لهذه الدالة هي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

تمارين

1- اوجد مفكوك $x^4 - x + 5$ فى قوى $2-x$.

2- استخدم متسلسلة مكورين لاثبات أن

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3- اوجد متسلسلة مكورين لكل من الدوال $\sin x$, $\cosh x$.

4- اوجد متسلسلة مكورين لكل من الدوال $\tan x$, $\cos x$ فى قوى

$$x - \pi/4$$

5- اوجد متسلسلة مكورين لكل من الدوال $e^x \sin x$, $e^x \cos x$.

* * *