

الباب السادس

تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة

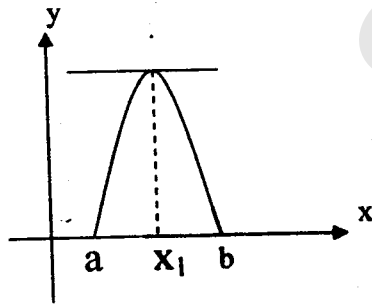
Applications for Mean Value Theorem

نظرية رول : Roll's Theorem

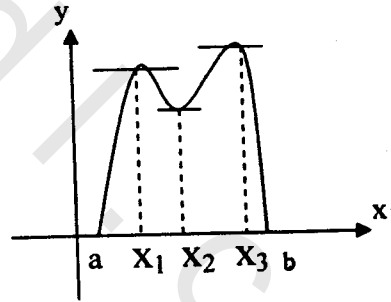
" اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكانت $f(a) = f(b) = 0$ واذا كانت $f(x)$ معرفة على نفس الفترة مع احتمال انها لا تتشأ احيانا عند نهايتى الفترة فقط فانه توجد قيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ بين a, b يكون عندها $f(x) = 0$."

ومعنى هذا هندسيا ان هناك نقطة واحدة على الاقل على

المنحنى $y = f(x)$ يكون الاحداثى x_1 الواقع بين a, b عنده المماس موازيا لمحور x



المماس عند نقطة واحدة يوازي محور x



المماس عند اكثر من نقطة يوازي محور x

البرهان :

لائبات النظرية نعتبر الاحتمالين الاتيين :

الاحتمال الاول :

ان تكون $f(x) = 0$ على طول الفترة من a الى b وفي هذه الحالة تكون $f(x) = 0$ ايضا على طول الفترة .

الاحتمال الثاني : ان تكون $f(a) = f(b) = 0$ تكون متغيرة خلال هذه الفترة فمن الواضح انه حينما تزداد x من a الى b لا يمكن للدالة $f(x)$ ان تزداد باستمرار او نقص باستمرار لان

$$. f(b) = 0 , f(x) = 0$$

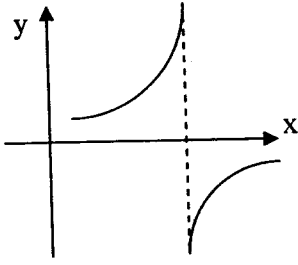
اذا فهناك قيمة واحد على الاقل من قيم x بين a, b يقف عندها ازدياد للدالة وتأخذ في النقصان او يقف عندها نقصان الدالة وتأخذ في الزيادة وهدن هذه القيمة ولتكن x_1 من قيم x تنعدم المشتقة الاولى للدالة اي $f'(x) = 0$

نتيجة :

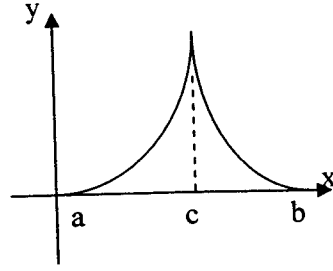
اذا كانت $f(x)$ مستوفاه لشروط نظرية رول غير ان $f(a) = f(b) \neq c$ ولكن $f(a) = f(b) \neq c$ فان $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل x_1 ، $b \leq x_1 \leq a$.

هذا ومن المهم ان يلاحظ في تطبيق نظرية رول ان تكون $f(x)$, $f'(x)$ كلتاهما متصلتان ومحدودتان في الفترة .

الاشكال الاتيه هي حالات لا يمكن تطبيق نظرية رول عليها للاخلال بأحد هذه الشروط.



شكل 1



شكل 2

فى شكل (1) : نجد ان الدالة غير متصلة عند $x = c$
 وفى شكل (2) : نجد ان المشتقة لانهاية عند (c) (غير محدودة) لان
 المماس عند (c) يوازي محور y .

امثلة محلولة Solved Problems

$$f(x) = x^3 - 12x$$

مثال:

اخبتر امكانية تطبيق نظرية رول على الدالة المعرفة على الفترة
 $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$ واوجد قيمة x_1 التى فى نظرية رول لهذه الدالة ان
 وجدت.

الحل:

$$(a, b) = (0, 2\sqrt{3})$$

$$f(a) = f(0) = 0$$

$$f(b) = f(2\sqrt{3}) = 8 \times 3\sqrt{3} - 12(2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$$

$$f(a) = f(b) = 0 ..$$

ومن الواضح ان الدالة $f(x)$ مشتقاتها $f'(x)$ متصلتان على الفترة

المرفقة لها . اذن الدالة تكون مستوفاه لشروط نظرية رول .

لايجاد x_1

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \text{ بوضع}$$

$$\therefore x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = \pm 2$$

$$-2 \notin [0, 2\sqrt{3}]$$

ولكن

$$\therefore x_1 = 2$$

نظرية القيمة المتوسطة

Mean Value Theorem

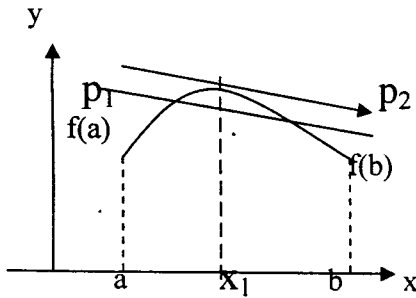
اذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ واذا نشأت الاولى لهذه

الدالة على نفس الفترة (مع احتمال عدم نشوءها عند نهايتي الفترة فقط)

فانه يوجد نقطة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ بين a, b

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1)$$

بحيث ان:



معنى هذا هندسيا

انه اذا كانت p_1, p_2 نقطتان من

نقطتان من نقاط اي منحنى متصل

فانه توجد نقطة واحدة على الاقل

بين p_1, p_2

يكون عندها ميل المماس مساويا

لميل المستقيم $p_1 p_2$ كما بالشكل

البرهان :

تحت شروط النظرية فانه يمكن ان تكون الدالة

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

..... (1)

حيث من الواضح انها متصلة على الفترة $[a, b]$ بالتعويض في (1) عن $x = a$ نجد ان

$$\varphi(a) = 0$$

وايضا عندما $x = b$ نجد ان

$$\varphi(b) = 0$$

$$\therefore \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

\therefore يمكن تطبيق نظرية رول على $\varphi(x)$

$$\therefore \varphi'(x_1) = 0 \quad , \quad b \leq x_1 \leq a \quad \dots \dots (2)$$

بتفاضل المعادلة (1) نجد ان :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \varphi' \varphi \varphi$$

$$\therefore f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهو المطلوب .

مثال: اختبر امكانية تطبيق نظرية القيمة على الدالة

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad , \quad 1 \leq x \leq 3$$

المعرفة على الفترة $1 \leq x \leq 3$ واوجد قيمة x_1 التي فى النظرية لهذه الدالة ان وجدت .

الحل :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3, \quad 1 \leq x \leq 3 \dots\dots\dots(1)$$

من الواضح ان هذه الدالة مستوفاة لشروط الاتصال لقيم x فى هذه الفترة

$$\text{at } x=1 \Rightarrow f(1) = 3 + 4 - 3 = 4$$

$$\text{at } x=3 \Rightarrow s(3) = 27 + 12 - 3 = 36$$

وحيث ان $a=1$, $b=3$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1)$$

$$\therefore f'(x_1) = \frac{46 - 4}{3 - 1} = \frac{32}{2} = 16 \dots\dots\dots(2)$$

وايضا من (2) ، نجد ان

$$5x_1 + 4 = 16 \Rightarrow 6x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 2$$

تعميم نظرية القيمة المتوسطة

Generalized low of Theorem

اذا كانت الدالتين $f(x), g(x)$ متصلتين فى الفترة $[a, b]$ واذا نشأت كل من $f'(x), g'(x)$ وكانت $g'(x) \neq 0$ على طول الفترة (مع احتمال عدم توافر هذا الشرط عند نهايتى الفترة فقط) فانه توجد قيمة واحدة على الاقل من قيم x مثل $x = x_1$ واقعة بين a, b بحيث ان :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

ملحوظة :

عندما $g(x) = x$

تصبح النظرية هي نظرية القيمة المتوسطة .

البرهان :

شروط النظرية يمكن ان تكون الدالة

$$\psi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \{g(x)\} - \{f(x) - f(a)\} \dots \dots \dots (1)$$

حيث واضح ان الدالة (1) متصلة لجميع قيم x الواقعة بين a, b

$$\text{at } x = a \Rightarrow \psi(a) = 0$$

$$\text{at } x = b \Rightarrow \psi(b) = 0$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة الى x نجد ان

$$\psi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(x) - f'(x) \dots \dots \dots (2)$$

وحيث ان الدالة تستوفى شروط نظرية رول

$$\therefore \psi'(x_1) = 0$$

$$\psi'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_1) - f'(x_1) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\therefore f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_1)$$

$$\therefore \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

وهو المطلوب .

مثال :

اوجد قيمة x_1 فى تعميم نظرية القيمة المتوسطة اذا امكن تطبيقها على الدالتين

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = 3x + 2$$

المعرفتان على الفترة $1 \leq x \leq 4$

الحل :

الدالتان $f(x)$, $g(x)$ متصلتان وقابلتان للتفاضل على الفترة $[1, 4]$ ومحدودتان عليها كما ان $g(x) \neq 0$ على هذه الفترة
 $\therefore f(x), g(x)$ مستوفيان لشروط النظرية

$$g'(x_1) = 2x_1, \quad f'(x) = 3$$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \quad a = 1, \quad b = 4$$

$$\Rightarrow \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

$$\frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{2x_1} \Rightarrow 18x_1 = 45 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$$

التطبيق للصور غير المعينة :-

اذا اتخذت الدالة قيمة معينة a من قيم المتغير المستقل لاحدى الصور،

الآتية :

$$\frac{0}{0}, \frac{x}{x}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

قيل انها غير معينة .

1- تعيين الصورة 0^0 :

واتعيين نهاية الدالة اذا كانت النهاية على هذه الصورة فنستخدم النظرية

الآتية :

نظرية لوبيتال L'Hospital's

لنفرض ان a اى عدد $f(x), g(x)$ دالتان يمكن ايجاد مشتقة الاولى لهما . فاذا كان $g'(x) \neq 0$ لجميع قيم x فى الفترة

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 ; 0 < |x-a| < \delta$$

فاذا نشأت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ فان

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان :

من الواضح ان الدوال متصلة لانه يمكن ايجاد مشتقة كل منهما فحسب تعميمك نظرية القيمة المتوسطة نجد ان

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \text{ where } a < x_1 < b \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

فان :

$$g(a) = 0 \quad , \quad f(a) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

بالتعويض في (1) بوضع x بدلا من b مع استخدام المعادلتان (2)

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \quad , \quad 0 < x_1 < x$$

فاذا جعلنا $x \rightarrow a$ فان $x_1 \rightarrow a$

ايضا لان x_1 هي احدى قيم x لان :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$$

اوجد قيمة

الحل :

من الواضح ان عندما $x = 3$ فان النهاية تكون على الصورة $\frac{0}{0}$

بتطبيق نظرية لوبيتال نجد ان :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 4x(3)^3 = 4 \times 27 = 108 \end{aligned}$$

-2 الصورة الغير معينة $\frac{\infty}{\infty}$:

نظرية لوبيتال تظل صحيحة اذا حدث احدى التعديلين الاتيين فى فروض النظرية او اذا حدث التعديلين معا وهما :
 أ) إذا استبدل الفرض

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

بالشروط البديلة

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

ب) اذا استبدلنا العدد a باللانهاية اى $\pm\infty$ واذا استبدلنا ايضا $0 < |x - a| < \delta$ بالشرط $|x| > M$ حيث M كمية موجبة .

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

اوجد قيمة

الحل :

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{المقدار} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \text{كمية غير معينة على الصورة}$$

∴ بتطبيق نظرية لوبيتال نجد ان

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^\infty} = 0$$

مثال : اوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}x}{\text{Cot}x}$$

الحل :

$\frac{\infty}{\infty}$ المقدار بعد اخذ النهاية يكون على الصورة

∴ بتطبيق نظرية لوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}x}{\text{Cot}x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-\text{Cosec}^2 x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0 \end{aligned}$$

3- الصورة الغير معينة $\infty \times 0$:

نحول هذه الصورة الى احدى صورتين $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

4- الصورة الغير معينة $\infty - \infty$:

نحول هذه الصورة الى احدى صورتين $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

مثال : اوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

الحل :

لذلك نحولها الى الصورة الاتية $\infty \times 0$ هذه النهاية على الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\text{Cot} \frac{x\pi}{2}}$$

ثم بتطبيق نظرية لوبيتال نجد ان :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\cot \frac{x\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{Cosec}^2 \frac{\pi x}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

اوجد قيمة

الحل :

هذه النهاية على الصورة $(\infty - \infty)$ لذلك نحولها الى الصورة الاتية :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{-\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cot x = 0\end{aligned}$$

الصورة الغير معينة $0^0, \infty^0, 1^\infty$:

بأخذ اللوغاريتم لهذه القيم تتحول الصور على الترتيب الى

$$0 \times \log 0, \quad 0 \times \log \infty, \quad \infty \log 1$$

$$0 \times -\infty, \quad 0 \times \infty, \quad \infty \times 0$$

ثم نحولها بعد ذلك الى احدى الصورتين $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

مثال: اوجد قيمة

الحل:

هذه النهاية تكون على الصورة 0^0

$$\text{put } y = x^x \Rightarrow \log y = x \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log y = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x}$$

وهذه الاخيرة على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

∴ يمكن تطبيق نظرية لوبيتال

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\therefore \log y \rightarrow \text{as } x \rightarrow 0$$

∴ بالرفع الى الدالة الاسية نجد ان

$$e^{\log y} \rightarrow e^0 \text{ i.e. } y \rightarrow 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

مثال: اوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$$

الحل: هذه الدالة تكون على الصورة ∞^0

$$\therefore \text{put } y = (\tan x)^{\cos x} \Rightarrow \log y = \cos x \log \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \log(\tan x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\tan x)}{\sec x}$$

وهذه النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

∴ بتطبيق نظرية لوبيتال

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log y = 0$$

بأخذ الدالة الاسية للطرفين

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\log y} = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x^x = 1$$

مثال : اوجد قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{(x-1)}}$$

الحل :

هذه النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

$$\text{put } y = x^{\frac{1}{(x-1)}}$$

$$\log y = \frac{1}{x-1} \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$$

هذه النهاية تكون على الصورة $\frac{0}{0}$

∴ يمكن تطبيق نظرية لوبيتال

$$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

$$\log y \rightarrow 1 \text{ as } x \rightarrow 1$$

$$e^{\log y} \rightarrow e^1 \Rightarrow y \rightarrow e$$

$$\therefore x^{\frac{1}{(x-1)}} = e$$

تمارين

1- اختبر امكانية تطبيق نظرية رول على الدوال الاتيه واوجد قيمة x_1 في نظرية رول اذا وجدت :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2} \text{ (i)}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2} \text{ (ii)}$$

2- اختبر امكانية تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $y = x^3$ المعرفة على الفترة $[0, 6]$ ثم اوجد قيمة x_1 التي في النظرية ان وجدت.

3- اوجد قيمة x_1 فى تعميم نظرية القيمة المتوسطة اذا امكن تطبيقها على الدالتين

$$F(x) = x^2 + 2x - 3 \quad \& \quad g(x) = x^2 - 4x + 6$$

المعرفتان على الفترة $0 \leq x \leq 1$

4- اوجد قيمة النهايات الآتية :

$$(i) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sin x^2 - x^2}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log \sin x}{\log \tan x} \right) \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$(vi) \lim_{n \rightarrow 0} (e^{ax} + bx)^{c/x}$$

* * *

تطبيقات على التفاضلات والتقريب

Applications for Differentiations & Approximations

لنعتبر الدالة $y = f(x)$ القابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ مشتقة هذه الدالة عند نقطة x في الفترة $[a, b]$ هي :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أى أن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من قيمة محددة $f'(x)$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$ وعلى ذلك فإن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

حيث $\alpha \rightarrow 0$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$

بضرب جميع الحدود فى Δx نحصل على

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

الحد $f'(x)\Delta x$ له اهمية ويرمز له بالرمز dy ويسمى تفاضله y .

أى أن :-

$$dy = f'(x)\Delta x$$

الدالة $y = x$ أو $f(x) = x$ ومنها $f'(x) = 1$

أى أن $dy = \Delta x$ وتسمى ايضا تفاضله x وعلى ذلك فإن

$$dy = f'(x) dx$$

فمثلا اذا كانت $y = x^2$ ، $y = \sin x$ فإن

$$Dy = \cos x dx , \quad dy = 2x$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال: اوجد dy , Δy للدالة $y = x^2$

لاى قيمة اختيارية للمتغير x , Δx , وايضا عندما $\Delta x = 0.1$, $x = 20$

الحل:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$dy = 2x\Delta x$$

$$x = 20, \Delta x = 0.1$$

$$\Delta y = 2(20)(0.1) + (0.1)^2 = 4.01$$

$$dy = 4$$

أى أن الخطأ هو 0.01.

مثال:

إذا كانت $y = \sqrt{x^2 + 2x + 22}$ فاوجد قيمة y التقريبية عندما $x = 1.0007$

الحل:

$$y' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 22}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 22}}$$

$$\Delta x = 0.0007 = 0.00028$$

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x = \frac{2}{5} \cdot 0.0007 = 0.00028$$

$$y + \Delta y = 5 + 0.00028$$

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$$

نأخذ

∴ القيمة التقريبية المطلوبة هي

مثال: إذا كانت

فاوجد قيمة تقريبية للدالة y عندما $x = 1.9993$

الحل :

نأخذ $x = 2$ ، $\Delta x = -0.0007$

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+17}} \Delta y \simeq y' \cdot \Delta x$$

$$\Delta y \simeq \frac{3}{5} \cdot (-0.0007) = -0.00042$$

\therefore القيمة التقريبية المطلوبة هي

$$y + \Delta y = 5 - 0.00042 = 4.99958$$

مثال :

اوجد قيمة مقربة للمقدار $(2.003)^{2.003}$ اذا علم ان :

$$\ln 2 = 0.693$$

الحل :

نفرض ان $y = x^x$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$y' = y (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

نأخذ $x = 2$ ، $\Delta x = 0.003$

$$\Delta y = y' \Delta x = 4(1 + \ln 2)(0.003)$$

$$= 4(1.693)(0.003) = 0.020316$$

\therefore القيمة التقريبية المطلوبة هي :

$$y + \Delta y = 4 + 0.020316 = 4.020316$$

مثال : اذا علم $1^0 = 0.01745$ بالتقدير الدائري فاوجد قيم تقريبية لكل

من : $\tan 46^0$, $\tan 43^0$

الحل :

نأخذ $y = \tan x$, $y' = \sec^2 x$

$$\Delta y \simeq y' \Delta x$$

نأخذ $x = 45^0$, $\Delta x = 1^0$ بالتقدير الدائري

$$\Delta x = 0.01745 , x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sec^2 x \cdot \Delta x = \sec^2 \frac{\pi}{4} (0.01745) \\ &= 2(0.01745) = 0.0349 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan 46^0 = y + \Delta y = 1.0349$$

ولإيجاد $\tan 43^0$ نأخذ $x = 45^0$ ولكن $\Delta x = -2^0$

وفي هذه الحالة نجد أن :

$$y = 1 , \Delta y = y' \cdot \Delta x = 2(-2)(0.01745) = -0.0698$$

$$\therefore \tan 43^0 = 1 - 0.0698 = 0.9303$$

تمارين

أوجد باستخدام حساب التفاضل القيمة التقريبية لكل من :-

$$1- \sqrt{7.992} , \sqrt{81.342}$$

$$2- x = 1.9842 , x = 2.048 \sqrt{7x^2 + x + 6}$$

$$3- \ln 2 = 0.693 , (2.007)^{2.007} , (2.19)^{2.19}$$

$$4- \sin 48^0 , \cot 42^0 , 1^0 = 0.01745$$