الباب الخامس

نظرية رول ونظرية لاجرانج

1. نظرية رول ونظرية لاجرانج

سوف نستخدم الرمز $[a, b]$ للدلالة على الفترة المغلقة $a \le x \le b$

والرمز $]a, b[$ للدلالة على الفترة المفتوحة $a < x < b$.

نقول ان الدالة $y = f(x)$

تفاضلية (او قابلة للاشتقاق) عند نقطة ما

$x = x_0$ اذا كانت $f'(x_0)$ موجودة ومحدودة . وتبعا لتعريف المشتقة

الاولى فان هذا يعنى ان النهاية

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة ومحدودة . وكما تعلم فان وجود هذه النهاية يكافىء وجود

النهايتين

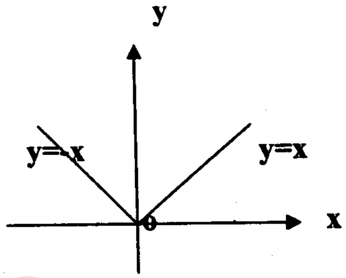
$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

حيث تسمى $f'(x_0^+)$ بالمشتقة اليمنى عند x_0 و $f'(x_0^-)$ بالمشتقة

اليسرى وتساويها.لتوضيح ذلك نعبر الدالة

$y = |x|$

أى ان



$$y=\begin{cases}-x & \text{if } x<0\\ x & \text{if } x\geq 0\end{cases}$$

هذه الدالة متصلة عند جميع نقط محور x ، وتفاضلية عند جميع نقط هذا المحورماعدا ربما عند $x = 0$. ندرس تفاضلية هذه الدالة عند $x = 0$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1.$$

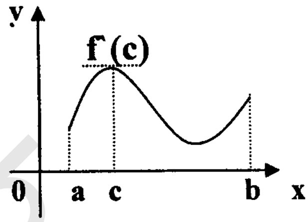
اذن الدالة $y = |x|$ غير تفاضلية عند $x = 0$. من هذا المثال تتضح حقيقية هامة جدا وهى أن اتصال الدالة عند نقطة غير كاف لكى تكون تفاضلية عند هذه النقطة .

نظرية رول Rolle`s Theorem

اذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ وتفاضلية فى الفترة $]a, b[$ وكانت $f(a) = f(b)$ فانه توجد على الاقل نقطة واحدة c تنتمى الى $]a, b[$ بحيث ان

$f`(c) = 0$

تتضح صحة هذه النظرية من انه يوجد احتمالان للدالة $y = f(x)$ فـــى



الفترة $]a, b[$:

<u>الاول</u> : الدالة $y = f(x)$ ثابتة فى هذه الفترة وبالتالى تتلاشى مـــشتقاتها الاولى عند جمع نقط هذه الفترة .

<u>الثانى</u> : الدالة لاتساوى ثابتا فى الفترة وبالتالى نتيجة لذلك توجـــد علـــى الاقل نقطة واحدة فى الفترة $]a, b[$ تكون عنـــدها للدالـــة $f(x)$ نهاية عظمى أو صغرى وكما هو معلوم فان المشتقة الاولى

تتلاشى عند نقط النهايات العظمى والصغرى .

والمعنى الهندسى لهذه النظرية هو أنه يوجد على الاقل اساس افقى واحد

بين a و b اذا حققت $f(x)$ جميع شروط هذه النظرية .

امثلة محلولة Solved Problems

<u>مثال</u> : هل تحقق الدالة $y = x^2 |x|$ شروط نظرية رول فى الفتـــرة $[-1, 1]$.

<u>الحـــــل</u> : لدينا أن

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{if} \quad x \ge 0 \\ -x^3 & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

هذه الدالة متصلة فى كل من الفترتين $[-1, 0[,]0, 1]$. ندرس اتصالها عند $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0, \lim_{x\to 0^-} f(x)=0, f(0)=0$$

واذن فهى متصلة عند $x = 0$ وعلى ذلك فهذه الدالة متصلة فى الفترة $]-1, 1[$ ماعدا ربما $x = c$ التى يجب دراستها على حدة :

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0,$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{x}=0.$$

اذن الدالة تفاضلية عند $x = 0$ بالاضافة إلى أن $f'(0) = 0$.

الدالة تفاضلية فى الفترة $]-1, 1[$ كما ان

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x \ge 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

أخيرا لدينا ان **$f(-1) = f(1) = 1$** .

اذن تتحقق جميع شروط نظرية رول

وبالتالى فلابد من وجود نقطة واحدة **c** على الاقل فى الفترة

] 1 ,1- [تكون عندها $f'(0)=0$ من (i) نجد انه توجد نقطة

واحـــــــــــــــدة هـــــــــــــــى

$$f'(0)=0 \Rightarrow c=0$$

<u>مثال</u> : هل تحقق الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{if} \quad x \ge 1 \\ 6-4x & \text{if} \quad x<1 \end{cases}$$

شروط نظرية رول فى الفترة $[0,2]$.

<u>الحـــل</u> :

هذه الدالة متصلة فى الفترة $[0,2]$ لان

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=2.$$

كما أن $f(0)=f(2)=6$ من ناحية أخرى

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{if} \quad x \ge 1 \\ -4 & \text{if} \quad x<1. \end{cases}$$

عند النقطة $x=1$ لدينا أن

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x)-2}{x-1}=3,$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1}\frac{(6-4x)-2}{x-1}=-4.$$

اذن الدالة غير تفاضلية عند $x=1$

وبالتالى فان شروط رول لاتتحقق جميعها .

نظرية لاجرانج (أو القيمة المتوسطة)

Lagrane`s (Mean Value Theorem)

اذا كانت الدالة $y = f(x)$

متصلة فى الفترة $[a, b]$ وتفاضلية فى

الفترة $]a , b[$ فانه توجد نقطة c فى الفترة $]a , b[$ بحيث ان

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \ldots . \quad (1)$$

<u>البرهان</u> : نعتبر الدالة

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b - x)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بما ان $f(x)$ متصلة وتفاضلية فان $g(x)$ ايضا متصلة وتفاضلية ، كما أن

$$\mathbf{g(a) = g(b) = c}$$

أذن جميع شروط نظرية رول تتحقق وبالتالى

$$g'(c) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big|_{x=c} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

وهذا يبين صحة النظرية .

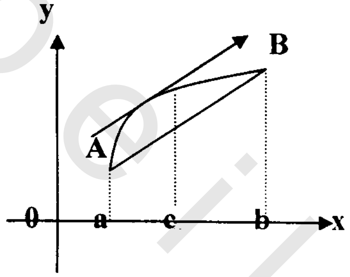
تسمى (1) أحيانا **بقانون لاجرانج** كما تسمى $f'(c)$ **بالقيمة المتوسطة**

لمشتقة الدالة فى الفترة $]a, b[$.

المعنى الهندسى لنظرية القيمة المتوسطة

بما ان ميل الوتر AB هو $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

و $f'(c)$ هو ميل المماس للمنحنى



$y = f(x)$ عند النقطة $(c, f(c))$ فان

النظرية تعنى وجود مماس موازى للوتر AB . اذا وضعنا فى (1)

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad \ldots.(2)$$

مثال : هل تحقق الدالة $y = \ln x$ شروط نظرية القيمة المتوسطة فى الفترة $[1, 3]$ واذا كانت تحققها فأوجد c الموجودة فى قانون لاجـرانج (1) .

الحـل : بمـا أن الدالـة $y = \ln x$ متـصلة فـى الفتـرة $[1, 3]$ وتفاضليةفى الفترة $]1, 3[$ (لاحظ أن $y' = \dfrac{1}{x}$) اذن تتحقق نظرية لاجرانج . لدينا أن

$$f'(c)=\frac{1}{c}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\ln 3-\ln 1}{2}$$

$$\Rightarrow c=\frac{2}{\ln 3}$$

2- قاعدة اوبيتال

L`Hopital`s Rule

تنص هذه القاعدة على أنه اذا كانت الدالتان $f(x)$, $g(x)$ تفاضليتين فى فترة تحوى بداخلها النقطة $x=a$ بحيث ان $g'(a)\neq 0$ واذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{or} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

فان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

وقبل اثبات هذه القاعدة نلاحظ انها تطبق فقط عندما يكون $\frac{f(a)}{g(a)}$ كمية غير معينة من الصورة $\frac{0}{0}$ أو الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ اما فى الحالات الاخرى فيجب فى البداية تحويلها جبريا الى هاتين الصورتين .

اثبات قاعدة اوبيتال :

نفرض ان $f(a)=g(a)=0$

تبعا لنظرية لاجرانج فانه توجد نقطة c_1 بحيث ان

$$a<c_1<x$$

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(c_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)f'(c_1)$$

وبالمثل توجد نقطة c_2 حيث $a < c_2 < x$

$$g(x) = (x-a)g'(c_1)$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to g}\frac{(x-a)f'(c_1)}{(x-a)f'(c_2)}$$

ولكن عندما $x \to a$ تؤول كل من c_2 , c_1 الى a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

وهو المطلوب اثباته اولا ،

يمكن اثبات هذه القاعدة فى الحالة الثانية اذا كتبنا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

Solved Problems امثلة محلولة

<u>**مثال**</u> : احسب النهايات التالية :

$$(1) \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{8x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad \lim_{x\to 0} x(\ln x) = 0.(-\infty)$$

نستطيع هنا تطبيق قاعدة اوبيتال ولكن بايجاد فكتابتها على الصورة التالية يمكننا تطبيقها .

$$\lim = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc x} = 1^{\infty}$

حالات عدم التعيين من الصورة 1^{∞} أو ∞^{0} أو 0^{0} نحولها الى عدم تعيين من الصورة $0.\infty$ باستخدام اللوغاريتمات . نضع

$$y = (\cos x)^{\csc x} \Rightarrow \ln y = \csc x \ \ln(\cos x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x.\cos x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{0} = 1.$$

تماريـــــن

1) اكتب منطوق نظرية رول وحققها على الدالة $y = x^2 - 4x + 3$ فى الفترة $]1, 3[$.

2) اكتب منطوق نظرية لاجرانج وحققها على الدالة $y = x^3$ فى الفترة $[-1, 2]$.

3) هل تحقق الدوال الاتية شروط نظرية رول فى الفترات المذكورة واذا

لم تحققها اذكر لماذا؟:.

i) $y = 1 - x \quad ; \quad [-1,1]$

ii) $y = \ln \sin x \quad ; \quad [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

4) هل تحقق الدوال الاتية شروط نظرية لاجرانج فى الفترات المذكورة واذا كانت تحققها أوجد c الموجودة فى قانون لاجرانج واذا لم تحققها اذكر السبب ؟:

i) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \quad ; \quad [0,1]$

ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{if} \quad x \le 0 \\ 5 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases} ; [-1,2]$

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if} \quad x \le 1 \\ 1 - x & \text{if} \quad x > 1 \end{cases} ; [0,2]$

iii) $f(x) = x\,|\,x\,| ; [-2,1]$

باستخدام قاعدة اوبيتال احسب النهايات التالية :

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$ 6) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

* * *